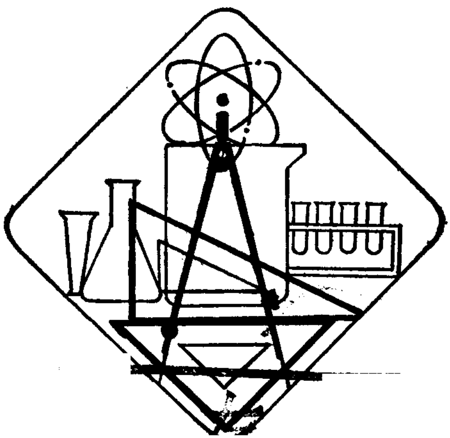
中学数理化学习指导丛书

初三几何辅导与练习

北京市海淀区教师进修学校主编



重庆出版社

中学数理化学习指导丛书

初三几何辅导与练习

北京市海淀区教师进修学校主编

重 庆 出 版 社

一九八二年·重庆

编 者

北京大学附属中学 陆 乘
北京师院附属中学 邵元铭
北京市十一学校 王燕谋
北京市清河二中 耿楚吉
北京市海淀区教师进修学校 王增民
陈保民

初三几何辅导与练习

重庆出版社出版（重庆李子坝正街102号）
四川省新华书店重庆发行所发行
重庆印制第一厂印刷
*
开本：787×1092 1/32 印张：3.5 字数：72千
1982年12月第一版 1982年12月第一次印刷
印数1—959,000

书号：7114·31 定价：0.26元

内 容 提 要

本册在编写时，同上册一样。紧密配合现行的统编教材，对重点概念和有关能力的培养进行了专题研究，总结了基本题型，并配有一定的练习、习题和自我检查题。

另外，本册还对初中的平面几何总复习提了几点想法，还备有两组综合练习题，可供平面几何的复习、总结和检查之用，也可作为教师参考之用。

同样，本册在编写过程中，也是力图使读者更好地掌握几何学习的规律，对平面几何的学习有一定的帮助。

前　　言

长期以来，我们感到：学生迫切需要一种能帮助他们学好功课的课外读物；家长希望有一种能借助于它督促和检查自己孩子学习的材料；教师欢迎出版一种能帮助自己辅导学生的书籍。为了解决这种问题，我们组织了一些有教学经验的教师，编写了这套书。

通过教学实践，我们认识到：

（1） 只有把知识的结构分析清楚时，它才易于学生理解、记忆和运用；

（2） 打好基础，是学生学好全部知识的前提。在基础知识之中，重点、难点之处掌握不好，又是有些学生学习不好的主要原因；

（3） 引导学生对学过哪些主要题型心中有数，同时又掌握各类题型的解题规律，是提高学生解题能力的有效途径；

（4） 在学好基础知识的前提下，提高综合运用知识的能力，以及把知识向深、广两个方面进行适当的引申，对学习较好的学生来说，不但是可以的而且是应该的；

（5） 知识必须通过不断地复习、检查，才能逐步深化、巩固。

基于以上认识，本书在编写时，朝以下几个方面做了一定努力：

（1） 注重知识系统和结构的分析；

（2） 注重基础知识，尤其是重点、难点部分的详细、

通俗的讲解；

（3） 注重把习题归类，列出主要题型，配以典型例题，并说明解题规律；

（4） 注重介绍教师的经验和体会，并适当启发学生对所学知识做更深入地思考；

（5） 在每单元之后，配备知识面尽量全、具有一定综合性、足以检查本单元的学习是否可以“通过”的自我检查题。

限于编者水平，书中难免出现错误或不妥之处。我们诚恳地希望读者给予批评指正。

北京市海淀区教师进修学校

1982年7月

目　录

第五章　圆

圆这一章是平面几何学所属的最后一章，是平面几何的总结。它所用到的知识除它本章的新知识外，凡是平面几何中的公理，定理、概念等都与圆有着密切的联系。所以，同学们在学习这一章时必须对前面直线形部分的一切概念、定理要熟练掌握。同时，学好圆这一章又是对直线形部分全部知识的温习。

圆这一章的重点是掌握它的一些重要性质和定理，如垂径定理，切线的判定与性质，圆周角的度量定理及推论，圆幂定理，正多边形有关元素的计算公式，弧长公式等。它们是证明线段相等、角相等、垂直、三点共线、四点共圆有关命题的主要论据。有的是为进行计算、作图提供了公式、方法和原理，所有这些定理和公式要求同学们全部熟练掌握。另外，关于圆与直线，圆与圆，圆与多边形的相关位置，要求同学们熟悉并掌握它们的主要性质。掌握作圆的切线，两圆的公切线等一些作图题的方法与原理。

一、圆的基本性质

圆是大家早巳熟知的，但究竟它的数学定义和性质是什

么未必全然了解。在以前把圆看作是由平面上一线段绕其一个端点旋转一周，另一个端点所经过的封闭曲线。实际上、这个圆是由满足上述条件的无数条线段的另一端点所组成的图形。这样一些点，与平面上其余的点有什么本质的差异呢？当时未给指出。现在我们用近代数学的观点，从理论上对圆给予严密的定义，这对后来学习点的轨迹是十分有用的。圆是这样定义的：“在平面内到一个定点的距离等于定长的点的集合叫做圆”。从这个定义上讲，圆是点的集合，是到定点的距离等于定长的点的集合。同时还须强调指出“同一平面”这一条件，如果去掉这个条件，那么到定点的距离等于定长的点的集合不是圆而成为球面了。定点叫圆的中心、即圆心，而定长叫圆的半径。从圆的定义不难推出：同圆半径相等；同圆直径相等。

其次，在圆的确定问题上，通过实验得出一个重要定理，即圆的存在唯一性定理：过不在一条直线上的三个点可以作一个且只能作一个圆。同学们在学习这一定理的时候，必须将定理证明的前半部分与后半部分搞清楚。前半部是关于圆的存在性的证明，后半部分是关于圆的唯一性的证明。我们是通过圆心唯一、半径唯一来证明圆的唯一的，而圆心唯一又是依据两直线相交则交点唯一的理论来证明的。同时，同学们也不可忽视：“不在一条直线上”这个条件，这是存在的前提，否则圆就不存在了。而三个点又是作为唯一的保证，若超过四点（除非这四点共圆）一般是不能作圆的，从而得出不在一条直线上的三个点可确定一个圆的重要结论。除了圆的存在唯一性外，圆还有轴对称性和旋转不变性。利用它的轴对称性，可以论证垂径定理，利用它的旋转

不变性又可论证圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系，进而就可以研究圆心角度数定理和圆周角度数定理。

1． 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系

根据圆的旋转不变性不难论证下面一些重要的定理，这些定理是这一单元的重点，它们在论证和计算中应用十分广泛，比如：它们是证明圆周角度数定理，推导扇形面积的重要理论基础，同学们要给予足够地重视。

（1） 等量关系、

在同圆或等圆中

① 如果圆心角相等，那么所对的弧也相等；反之，如果弧相等，那么所对的圆心角也相等。

② 如果弧相等，那么所对的弦也相等；反之，如果弦相等，那么所对的劣弧也相等。

③ 如果弦相等，那么弦心距也相等；反之，如果弦心距相等，那么弦也相等。

（2） 不等量关系：

在同圆或等圆中

① 如果圆心角不等，那么所对的弧也不等，圆心角大所对的弧也大。反之，如果弧不等，那么所对的圆心角也不等，大弧所对的圆心角也大。

② 如果两弧不等，那么所对的弦也不等。大弧（劣弧）对大弦。反之，大弦所对的劣弧也大。

③ 如果弦不等，那么弦心距也不等，大弦则弦心距小，反之，如果弦心距不等，那么弦也不等，弦心距大则弦反而小。

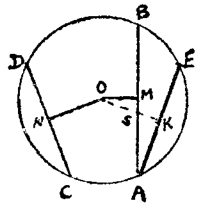
同学们在学习上面这些定理的时候，需要注意这样的几个问题：

（1） 所谓等弧的概念是指在同圆或等圆中能够重合的弧，也就是说，只有在同圆或等圆中才能比较弧的相等与不等。

（2） 定理中的“所对”二字，是指“所对”的弧相等，“所对”的弦相等，“所对”的弦心距相等。

（3） 必须搞清定理中的大前提，小前提与结论，希望同学们把原定理与逆定理的大、小前提和结论分别写出来。

以上这些定理的论证，鉴于本书篇幅有限，不能全部给予证明，只就其中部分予以证明、余者留给同学们自己去证明。



5－1

定理：在同圆或等圆中，对两条不相等的弦，大弦的弦心距较小。

已知：如图5－1在⊙O中，弦AB>弦CD，OM⊥AB，ON⊥CD。

求证：OM<ON。

证明：在 $\overset{\frown}{AB}$ 上截取 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{DC}$，

则AE＝DC，

作OK⊥AE于K，并交AB于S，

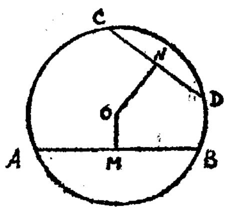
则 OK＝ON，但在直角三角形OSM中，

OS>OM，

但 OS<OK，

∴ OM<OK，

∴ OM<ON.



5－2

定理：在同圆或等圆中，对两条不相等的弦，弦心距较小的弦较大.

已知：AB和CD是圆O中的两条弦，又OM⊥AB NO⊥CD，且OM<ON.

求证：AB>CD

证明：（用反证法）

弦AB和CD之间只能有三种情况之一：

$$AB=CD,\ AB<CD,\ AB>CD$$

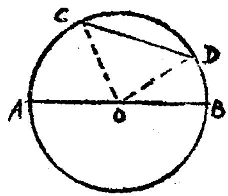
假设AB≯CD

如果AB＝CD就有OM＝ON这与已知OM＜ON矛盾，

如果AB＜CD就有OM＞ON 这与已知OM＜ON也矛盾，

∴只有AB＞CD成立.

例：求证：圆的直径是最大的弦，



5—3

已知：圆O中AB是直径，CD是不通过圆心的任意弦，

求证：AB＞CD

证明：连OC，OD

∵CD为不过圆心的任意弦

∴一定可以作出一个三角形OCD

在△OCD中，OC＋OD＞CD（△两边之和大于第三边）

但OC＋OD＝AB，

∴AB＞CD.

练　习　题

1．⊙O的两条弦AB，CD相交于一点P，且AB＝CD 求证：AP＝DP，BP＝CP。

2．上题中的两弦AB，CD 延长后相交于圆外，那么会有什么结论？为什么？

3．过圆上一定点A，引弦AB和AC，分别等于该圆的半径，连BC，求圆心到BC的距离．$\left(\frac{R}{2}\right)$

4．圆内一弦与直径相交成30°的角，且分直径为1 cm和5 cm，

求这弦的弦心距．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（1 cm）

5．圆中一条弦把与它相垂直的直径分为3 cm和1 cm两部分，求弦长　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（$2\sqrt{3}$ cm）

6．在⊙O中，弦AB∥CD，求证：$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，∠AOD＝∠BOC

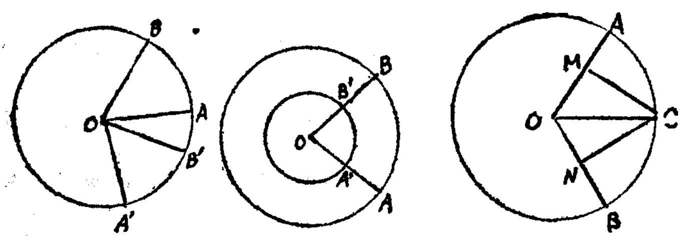
7．AB是⊙O的直径，已知BC弦长4 cm，求弦AC的中点到圆心O的距离。

8．AB，DE为圆的直径，弦AC∥DE，求证：CE＝BE

2．和圆有关的角

和圆有关的角有五种，它们是圆心角，圆周角，圆内角，圆外角和弦切角。在这五种角中，以圆心角定理为基本的角与弧的度量关系、其它的角与弧的度量关系都是由此推导出来的。所以在研究其它四种角与弧的度量关系时，可以转化到圆心角上去研究。关于弦切角的度量将在直线与圆的位置关系中去研究，这里先不介绍。

圆心角度数定理说的是圆心角的度数等于它所对弧的度数。这里同学必须要搞清楚的是：①角与弧的度数相等而绝不是角与弧相等，有时出现∠AOB＝$\overset{\frown}{AB}$的错误，就是对这一概念的不清，正确的表示应是∠AOB$\overset{m}{=}\overset{\frown}{AB}$。②相等的弧和相同度数的弧的意义也是不同的。图5－4（1）中$\overset{\frown}{A'B'}$



（1）　5－4　（2）　　　　5－5

和$\overset{\frown}{AB}$是相等的弧，也是相同度数的弧，图5—4（2）中$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{A'B'}$是相同的度数的弧，但不是相等的弧。

例：如图5—5已知$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，M，N各是半径OA，OB的中点，求证：MC=NC

证明：

$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$　　$\therefore \angle AOC=\angle BOC$

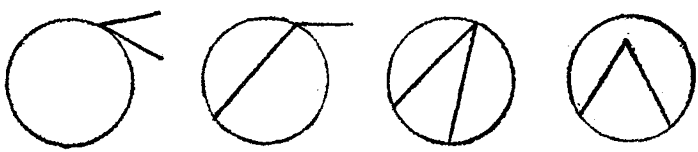
又M、N各为半径的中点，

$\therefore OM=ON$（等量之半相等）

$OC=OC$　　$\therefore \triangle MOC \cong \triangle NOC$.

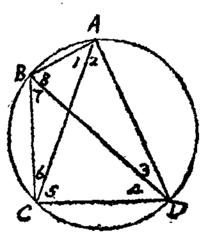
$\therefore MC=NC$.

关于圆周角的概念，这是很重要的一个概念，为了加深对它的理解，同学们可从图5—6直观地看看它们是不是圆周角，从而得出圆周角的基本特征有二点：（1）顶点在圆



5—6

周上，（2）角的两边都与圆相交。



5—7

此外，在证明圆周角定理时用到了圆心角定理，它们是怎样转化的？转化的条件是什么？辅助线是怎样添加的？为什么要分成三种情况来讨论？而这三种情况中又以那一种为最重要？这些问题同学们要多思考、并

亲手画一画，会有助于提高自己的分析问题和解决问题的能力的。

有一圆内接四边形ABCD，对角线AC，BD把它的四个角分成为八个角，如图5—7，同学们找出这八个角中四对相等的角。

练　习　题

1．求分圆周成3：5的弦所对的圆周角的度数。

$\begin{pmatrix}67.5^\circ\\112.5^\circ\end{pmatrix}$

2．一条弦分圆周成两部分，其中一部分是另一部分的4倍，求这弦所对的圆周角。(36°，144°)

3．圆上有四点A．B．C．D．分圆成四条弧，这四条弧的度数的比是$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}=2:3:5:6$，求下列相交直线所成的角。

(1) AB和CD (33°45′)

(2) BC和AD (33°45′)

(3) AC和BD (78°45′)

4．自圆上一点A引直径AB和弦AC，如果：

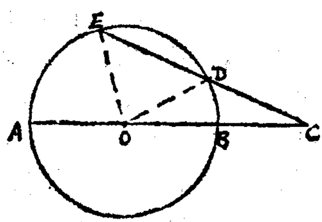
(1)弧的度数之比为$\overset{\frown}{AC}:\overset{\frown}{CB}=7:9$ (50°37′30″)

(2) $\overset{\frown}{AC}$的度数比$\overset{\frown}{CB}$的度数大36°18′求∠BAC

(35°55′30″)

5．圆内接四边形ABCD中，∠A：∠B：∠C＝2：3：6求这四边形各内角的度数。

6．AB是圆O的直径，在这直径过点B的延长线上取一点C，作割线CDE交圆于D、E两点，如果圆外部分CD等于圆的半径，求证：∠EOA＝3∠DOB，图5—8。



5—8

7. 两圆相交于A、B两点，过A任作一割线交两圆于C和C′，求证：不论此割线如何转动，从B视弦CC′的角为一常量.

二、直线和圆的位置关系

上节我们介绍了圆的一些性质，在这节里来研究直线与圆的相对运动出现的三种位置关系，即相离，相切，相交。而这三种关系中又以相切为主要关系，应用广泛，是这一节的重点。

在给出切线定义时应当特别指出：此定义不适用于其它曲线，只适合于直线与圆。从直线与圆相切的定义出发，立刻推出切线的判定与性质这两个定理。

切线的判定定理：如果一直线经过圆的半径的外端，且垂直于这条半径，那么这条直线就是圆的切线。

这个定理主要从三个方面来理解：

（1） 和圆有一个且只有一个公共点的直线是切线。

（2） 和圆心的距离等于半径的直线是切线。

（3） 过半径外端且和半径垂直的直线是切线。

其中(3)是作圆的切线的理论根据，也给出了过切点作圆的切线的具体方法，所以这个定理的本质和切线的定义是一样的，它有着广泛的应用，而且应用时比较方便。

切线的性质，常用的有：

（1） 切线和圆只有一个公共点。

（2） 切线和圆心的距离等于半径。

（3） 切线垂直于过切点的半径。

显然，三个性质定理是相应的三个判定定理的逆定理，

通过它们，还可以证明切线的另外两个性质：

（4） 经过圆心垂直于切线的直线必经过切点。

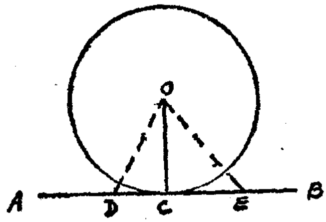
（5） 经过切点垂直于切线的直线必过圆心。

在这五条性质中，以第（3）条用途最广，最为重要。现证明如下：

已知：（图5—9）AB是⊙O的切线，C为切点。

求证：AB⊥OC。

分析：要证明AB⊥OC，只须要证OC是连接O和直线AB上任一点的线段中最短的一条就可以了。



5—9

证明：∵AB是切线、C是切点

∴在直线AB上除C点外其它各点D．E．……均在圆外，因此，根据点和圆的位置关系可知：OD．OE．……均大于OC，这即是说OC是连接O和直线AB上任意一点的线段中最短的一条。

∴AB⊥OC。

因为反证法是在平面几何中是一种重要证题方法，同学们又感到难以掌握，这里我们不妨用反证法再将上面定理予以证明。（见图5—9）

假如OC与AB不垂直，则过O点可作一直线与AB垂直，比如说OD（D点是垂线OD与AB的交点），∵OC是斜线，OD是垂线

∴OC>OD，但OC=R，∴OD<R，根据圆心到直线的距离小于半径，此直线AB是圆的割线，这与AB是⊙O