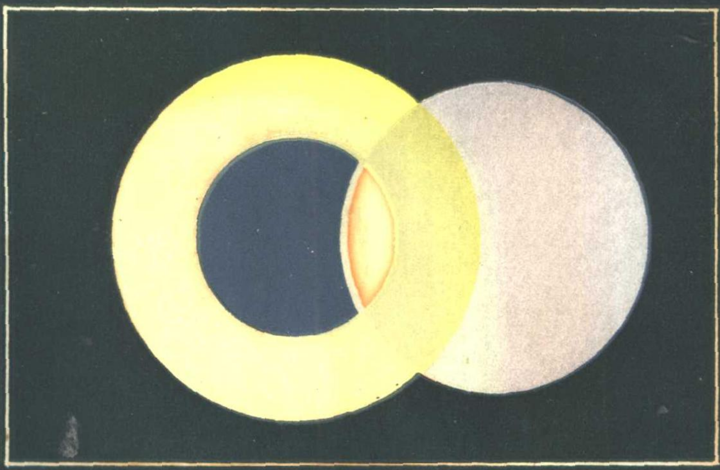
数理逻辑基础与应用

赵春高 编著



贵州人民出版社

数理逻辑基础与应用

赵 春 高 编著

贵 州 人 民 出 版 社

内 容 简 介

本书介绍数理逻辑的基础知识及其应用实例，所介绍的基础知识是数理逻辑各个分支（模型论，证明论，递归论，集合论）的共同基础，所讲述的推理规律及等值公式是各个学科（例如数学，哲学，语言学等）共同的推理工具，所列举的应用实例可供从事计算机科学，自动控制以及处理现实生活中一些复杂的逻辑关系的人员参考。

把数理逻辑的基础理论及其实际应用紧密联系起来，是本书的一个突出特点；对数理逻辑的基础理论及其应用的阐述深入浅出，在各章节后配有紧扣教材内容的练习题，是本书的另一突出特点（书后附有习题提示或解答）。

本书是赵春高副教授根据他在贵州大学数学系计算机专业及数学专业历届教数理逻辑课的讲义编写成的。考虑到各专业的特点，实例部分的讲授适当增减，每周四学时，一学期正好讲完。

本书可作大专院校数理逻辑（或逻辑代数）课的教材或教学参考书，也可作中学数学教师、数理逻辑爱好者及有关工程技术人员研究数理逻辑的自学读物。

数理逻辑基础与应用

赵 春 高 编著

贵州人民出版社出版

（贵阳市延安中路 5 号）

贵州新华印刷厂印刷　贵州省新华书店发行

787×1092毫米　16开本　13.75印张　323千字

1986年1月第1版　1986年1月第1次印刷

印数 1 —— 2,050

书号：13115·54　定价：2.85 元

目　录

第一章　命题演算及其应用

命题演算也称逻辑代数。它是数理逻辑最初的、不可缺少的部分。所谓命题是指一句有意义有真假可言的话，也可说是对某种事物或某种现象的一句判断语。例如："中国的首都是北京"，"数理逻辑是一门科学"，"二加三等于六"，"地球是方的"等等，都是命题。而前面两句话是真命题，后面两句话是假命题。在命题演算中，我们并不深入研究命题的具体内容，也不去研究命题包括主词及谓词等更细致的逻辑结构。我们只把命题看成具有"真""假"特性的基本元素，再由这些基本元素和一些联结词构成新的命题（称为复合命题），然后探讨新命题的真假性质及命题间的推理关系。

§1　基本逻辑联结词的引入

人类判断事物和现象的是非（即真假）所用的语言，虽然千差万别，但有一个共同的规律，就是用一些简单判断语（即命题）加上一些联结词，构成复杂的判断语（新命题），再由复杂的判断语加上一些联结词构成更复杂的判断语（更新命题）。

例如：

"中国在亚洲"是一个命题，加上联结词"非"（否定），就变成一个新的命题："中国不在亚洲"。

"中国在亚洲"，"印度在亚洲"是两个命题，加上联结词"与"，就变成一个新命题，"中国在亚洲与印度在亚洲"。"三角形三内角和等于两个直角"，"四边形四内角和等于四个直角"是两个命题，加上联结词"如果……则……"，就变成一个新命题："如果三角形三内角和等于两个直角则四边形四内角和等于四个直角"。凡此等等。

联结词的种类虽然是烦多的，但也有一些是基本的，其它联结词可以由这些基本联结词给出定义。数理逻辑中基本联结词是些什么呢？通常使用下面五种：

我们既然把命题看成基本元素，那么可以规定：用大写拉丁字母A、B、C、…、X、Y、Z、…表示命题。

1.否定词：

用符号"—"表示，加在命题头上，表示命题的否定。例如$\bar{X}$（读作"非X"）表示命题X的否定，意指当X是真命题时，$\bar{X}$就是假命题，当X是假命题时，$\bar{X}$就是真命题。

若把真命题的值记为"1"，把假命题的值记作"0"，（以下同）。那么否定词的定义可用表1来表示：

例 1：①设命题X为“$3\times2=6$”

X的否定$\bar{X}$为“$3\times2\neq6$”

显然，X为真，$\bar{X}$为假。

②设命题Y为：“7是最小的素数”

Y的否定$\bar{Y}$为：“7不是最小的素数”显然，Y为假，$\bar{Y}$为真。

X	$\bar{X}$
1	0
0	1

表 1　否定词的真值表

2.合取词：

用符号“∧”表示。两个命题X和Y的合取构成一个新命题记作$X\wedge Y$（读作“X与Y”，或“X逻辑乘Y”），$X\wedge Y$的真假定义如下：

只当命题X和Y都为真时，$X\wedge Y$才为真；否则$X\wedge Y$为假。这种真假关系可用表2表示。

例 2：①设命题X：“50是5的倍数”

命题Y：“50是7的倍数”。

则命题$X\wedge Y$为“50是5与7的倍数”，显然X是真命题，Y是假命题，所以$X\wedge Y$为假命题。

②设命题X为：“$2+3=5$”，命题Y为：“$2\times3=6$”则$X\wedge Y$为命题：“$2+3=5$与$2\times3=6$”，显然X和Y都为真，所以$X\wedge Y$亦真。但是，如果我们把X改为假或Y改为假或二者均改为假命题，则$X\wedge Y$也一定为假命题。

X	Y	$X\wedge Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

表 2　合取词∧的真值表

3.析取词：

用符号“∨”表示，两个命题X和Y的析取构成一个新命题，记作$X\vee Y$（读作“X或Y”，或者“X逻辑加Y”）。$X\vee Y$的真假定义如下：

只当X和Y都为假时，$X\vee Y$才为假，否则它为真。这种真假关系可用表3来表示。

X	Y	$X\vee Y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

表 3　析取词∨的真值表

例 3：设X：“$2+2=4$”

Y为：“$2+2=5$”

则　$X\vee Y$表示：“$2+2=4$或$2+2=5$”，因为X为真，Y为假，所以$X\vee Y$为真。从析取的定义可知，只有当两个命题均假时，析取才假；只要有一个命题为真，则析取就为真。

这里提醒注意“或”字的含义。在汉语中“或”字有两种含义：一种是互斥“或”，例如“某列火车从某车站10点钟开出或者12点钟开出”所用的“或“字就是互斥“或”；另一种是并存“或”，例如“某个数学题小张能解答或者小李能解答”并不排斥两人都能解答，又例如“命题X真或者Y真”并不排斥命题X，Y都真。在数理逻辑中所用到的“或”都是指并存“或”。即没有互斥的含义。

4.蕴涵词：

用符号“→”表示，读作“如果……则……”命题X蕴涵命题Y，构成一个新命题记作$X \to Y$（读作“如果X则Y”）。X叫前件，Y叫后件，$X \to Y$的真假定义如下：

只有当X真，Y假时，命题$X \to Y$才为假；其它情况命题$X \to Y$都是真。$X \to Y$的真假性可用表4来表示。

X	Y	$X \to Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

表4　蕴涵词“→”的真值表

由表4我们看出：只要X是一个假命题或者Y是一个真命题，那么命题$X \to Y$便是真命题。如下面三个命题是真命题：“如果2乘2等于4，则雪是白的”。（因后件真）

“如果2乘2等于5，则雪是白的”。（因前件假）

“如果2乘2等于5，则雪是黑的”。（因前件假）

只有X是真命题，Y是假命题时，命题$X \to Y$才是假命题。例如：“如果2乘2等于4，则雪是黑的”，因前件真而后件假，所以它是假命题。

由蕴涵词的定义和上面的例子可以看出(*)：蕴涵词的前件与后件之间不一定有什么因果关系。但与因果关系有一个共同点就是：在$X \to Y$成立的情况下，若前件X（相当前提）成立，则后件Y（相当于结论）必然成立，即由X真可以推出Y真。这个事实在数学的推理中是广泛用的。

另外一个事实是：在$X \to Y$成立的情况下，若前件X不成立，则后件Y可成立也可不成立，即由错误（假）的前提只能推出模棱两可的结论。

5.等价词：

用符号“↔”表示，命题X等价于命题Y记作$X \leftrightarrow Y$，是一新命题，它的真假性定义如下：

当且仅当X和Y有相同的真假时，$X \leftrightarrow Y$才为真命题，$X \leftrightarrow Y$的真假可用表5来表示。

X	Y	$X \leftrightarrow Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

表5　等价词“↔”的真值表

由等价词的定义可知，任意两个真命题之间以及任意两个假命题之间是等价的，例如下列命题是真的：

（2乘2等于4）↔（雪是白的）

（2＞3）↔（雪是黑的）。

上面我们给出了数理逻辑中常用的五种基本联结词的定义，由给出定义的过程中我们知道：一复合命题可由一些基本命题加上一些联结词构成，而复合命题的值只依赖于所联结的基本命题的取值，与基本命题的含意无关。为了便于查看，我们再重述一下前面的一个规定：即把真命题的值记为“1”而把假命题的值记为“0”，同时把五种基本联结的定义统一在表6中表示出来：

(*)注：这里定义的五种联结词，是现实生活中“与”、“或”、“非”、“如果……则……”、“等价”概念的抽象。在现实生活中这些概念所联结的，都是内容上有联系的命题。但这里定义的五种联结词，既能联结在内容上有联系的命题，又能联结在内容上毫无联系的命题。

X	Y	$\overline{X}$	$X\wedge Y$	$X\vee Y$	$X\rightarrow Y$	$X\leftrightarrow Y$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

表 6　五种基本联结词的真值表

由表 6 中我们看出：复合命题$\overline{X}$、$X\wedge Y$、$X\vee Y$、$X\rightarrow Y$、$X\leftrightarrow Y$都是X、Y的函数，$\overline{X}$是一元函数，其余都是二元函数。它们的定义域是{1，0}，函数的值域也是{1，0}。例如在第二行中：$X=1$、$Y=1$时，有$\overline{X}=0$（即$\overline{1}=0$）；$X\wedge Y=1$（即$1\wedge 1=1$）；$X\vee Y=1$（即$1\vee 1=1$）；$X\rightarrow Y=1$（即$1\rightarrow 1=1$）；$X\leftrightarrow Y=1$（即$1\leftrightarrow 1$）。在第四行中：$X=0$，$Y=1$时，有$\overline{X}=1$（即$\overline{0}=1$）；$X\wedge Y=0$（即$0\wedge 1=0$），$X\vee Y=1$（即$0\vee 1=1$）；$X\rightarrow Y=1$（即$0\rightarrow 1=1$）；$X\leftrightarrow Y=0$（即$0\leftrightarrow 1=0$）等等。

最后我们有一点说明：上面和今后用到的符号“=”和数学中的等号意思是一样的，表示两个命题或公式的值相等。另外还用到括号：无非是标明命题演算的先后次序。为了在公式中减少一些括号，我们规定在无括号的情况下，演算的先后次序为：①非“—”；②“$\wedge$”；③“$\vee$”；④“$\rightarrow$”和“$\leftrightarrow$”。有时将“$\wedge$”省写为“·”或不写。

练　习　1

1. 设P，Q，R，S为命题，已知$P=Q=1$，$R=S=0$，求下列各式的值：

（1）$(P\vee Q)\cdot R\rightarrow\overline{Q}\cdot P$

（2）$(\overline{P\vee Q\cdot R})\longleftrightarrow(P\vee Q)\cdot(P\vee R)$

（3）$P\vee Q\cdot R$

（4）$P\wedge(Q\wedge R)\vee(\overline{P\vee Q})\wedge(R\vee S)$

（5）$P\wedge\overline{P}\rightarrow Q$

（6）$P\wedge(P\rightarrow Q)\rightarrow Q$

（7）$P\vee(Q\rightarrow R\wedge\overline{P})\leftrightarrow Q\vee\overline{S}$

2. 构造下列命题的真值表

（1）$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$

（2）$\overline{P\wedge\overline{Q}}$

（3）$P\vee\overline{P}$

（4）$(P\rightarrow Q)\wedge(\overline{P}\rightarrow\overline{Q})$

§2　等值性、基本联结词的可省略性

通过多次地使用基本联结词可以从一些给定的命题而组成一些更复杂的复合命题，例如

由基本命题X、Y、Z可作出复合命题$((X\to Y)\wedge(Y\to Z))\wedge(X\vee Z)$，正如上节所讨论的一样，每一个这样的复合命题也是构成它的那些基本命题的函数。就前述的复合命题而论，它是X、Y、Z的函数。X、Y、Z的取值共有八种可能，即111；110；101；100；011；010；001；000。这些值的每一种通过复合命题（简称表达式，以下同）$((X\to Y)\wedge(Y\to Z))\wedge(X\vee Z)$而对应于一确定的值1或0，例如010所对应的值为0，事实上，我们可以依照基本联结词的定义而把$((0\to 1)\wedge(1\to 0))\wedge(0\vee 0)$换为$(1\wedge 0)\wedge 0$再得$0\wedge 0$，最后得0。若要求出表达式在八种可能情况下所对应的值，最好作出真值表，留给读者去作。

值得注意的是：由基本命题和基本联结词共同构成的复合命题中，有一些从表达式的形式上看是不同的，但每给定基本命题的一组值，由这些复合命题所确定的值却是相同的。例如：复合命题$X\vee\bar{X}\wedge Y$和$X\vee Y$从表达式的形式上看有区别，但每给定X、Y一组值，两个复合命题的值却是相同的，参看表7。

X	Y	$X\vee Y$	$X\vee\bar{X}\wedge Y$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

表 7

为了叙述和书写方便，今后我们用德文字母$\mathfrak{A}$（读阿），$\mathfrak{B}$（读白），$\mathfrak{C}$（读测）表示复合命题，由上一段的讨论我们有下面的定义：

定义1：两个复合命题$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$，若对它们所包含的全部基本命题的任何一组取值，对应的$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$的值都相等，则称$\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$是等值的。记作$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$，有时也简称$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$相等。

也就是说，如$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$，那么它们就应该有相同的真值表。反之，如果它们的真值表相同，那就说明对应的基本命题的任何一组取值，$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$的值都是一样的，因而它们是相等的。因此，我们要证明两个复合命题相等，只要把它们的真值表列出来，看看是否一样，如果真值表是一样的，那么它们就是相等的。

这里提醒读者注意：命题演算中的逻辑乘"$\wedge$"，逻辑加"$\vee$"和初等代数中的乘"×"和加"+"既有许多相同之处，又有很大的差别。在下列等式中有一些（如满足交换律、结合律、乘对加的分配律等）是和初等代数相同的。但有一些（如满足加对乘的分配律、重迭律等）则和初等代数的规律完全不同。

下面这些等式的正确性可以用真值表加以证明，这里不再一一加以验证。

1.关于命题和常量（命题的值1，0）的等式

公式1：$X\vee 0=X$　公式1′：$X\wedge 1=X$

公式2：$X\vee 1=1$　公式2′：$X\wedge 0=0$

公式3：$X\vee\bar{X}=1$　公式3′：$X\wedge\bar{X}=0$

2.满足交换律，结合律，分配律

公式4：$X\vee Y=Y\vee X$（交换律）

公式4′：$X\wedge Y=Y\wedge X$（交换律）

公式5：$(X\vee Y)\vee Z=X\vee(Y\vee Z)$（结合律）

公式5′：$(X\wedge Y)\wedge Z=X\wedge(Y\wedge Z)$（结合律）

公式6：$X\wedge(Y\vee Z)=X\wedge Y\vee X\wedge Z$（乘对加的分配律）

公式6′：$X\vee Y\wedge Z=(X\vee Y)\wedge(X\vee Z)$（加对乘的分配律）

3.命题演算的一些特殊规律

公式7：$X\vee X=X$　公式7′：$X\wedge X=X$（重迭律）

公式8：$\overline{X\vee Y}=\bar{X}\wedge\bar{Y}$　公式8′：$\overline{X\wedge Y}=\bar{X}\vee\bar{Y}$（反演律）

公式9：$\bar{\bar{X}}=X$（双重否定律）

上面这些等式很重要，它们是今后将复杂的表达式；化为简单的等值表达式的基础，希望读者理解它们，并且熟记它们。

例如，因为满足分配律（公式6和6′）所以在化简表达式时，可将公因子提出在括号之外或将公因子乘（或加）到括号里面。因为有重迭律（公式7和7′），所以在析取式或合取式中，如果其中有一项出现多次，则只须写一次便成。因为有公式1和2，所以在一析取式中有一项为永假（值恒为0），则此假项可删去。若有一项为永真（值恒为1），则此析取式永真（恒为1）。因为有公式1′和2′，所以在一个合取式中，有一项永真，则此永真项可以省去。若有一项永假则此合取式永假。因为有反演律（公式8和8′），所以可将一个表达式的否定记号取消而将它放在基本命题头上。因为有双重否定律（公式9），所以双重否定记号可以删去等等。

对于蕴涵式我们亦有如下的等式：

公式10：$1\rightarrow X=X$，$X\rightarrow 0=\bar{X}$

公式11：$0\rightarrow X=1$，$X\rightarrow 1=1$

公式10表明一个蕴涵式有真前件（假后件），则该式与它的后件（前件的否定）相等值。公式11表明一个蕴涵式有假前件（真后件）则永远表达一个真命题。由这两个公式可知：若$X\rightarrow Y$是一真命题，则不可能同时X真而Y假，用公式表出即：

公式12：$X\rightarrow Y=\overline{X\wedge\bar{Y}}$，

如果引用公式8′及9，则$\overline{X\wedge\bar{Y}}=\bar{X}\vee\bar{\bar{Y}}=\bar{X}\vee Y$即得：

公式13：$X\rightarrow Y=\bar{X}\vee Y$

由这两个公式可知，蕴涵词“$\rightarrow$”可用合取词“$\wedge$”和否定词“－”或者用析取词“$\vee$”和否定词“—”来代替。故蕴涵词“$\rightarrow$”是可省的。

最后对于等价式我们有如下等式：

公式14：$X\leftrightarrow 1=X$

公式15：$X\leftrightarrow 0=\bar{X}$

这两个公式告诉我们一命题与永真命题(永假命题)等价的充要条件是它是永真命题（永假命题）。因此若$X\leftrightarrow Y$是一真命题，那就不可能同时X真而Y假，也不可能同时Y真而X假。这两句话用公式表示即：

公式16：$X\leftrightarrow Y=(\overline{X\wedge\bar{Y}})\wedge(\overline{\bar{X}\wedge Y})$

若引用公式8′和9：$(\overline{X\wedge\bar{Y}})\wedge(\overline{\bar{X}\wedge Y})=(\bar{X}\vee Y)\wedge(X\vee\bar{Y})$因而有：

公式17：$X\leftrightarrow Y=(\bar{X}\vee Y)\cdot(X\vee\bar{Y})$。

由这两个公式可知：等价词“$\leftrightarrow$”可用合取词“$\wedge$”和否定词“$-$”或者用析取词“$\vee$”和否定词“$-$”来代替，故等价词“$\leftrightarrow$”是可省的。

关于基本联结词的可省与不可省的问题，搞科学基础（例如代数基础、几何基础、数理逻辑基础等）的人是关心的。但搞应用科学的人就不那样着重研究了。在数理逻辑的基础理论研究中常用两个：“$-$”“$\wedge$”或“$-$”“$\vee$”或“$-$”“$\rightarrow$”。我们今后主要用三个：“$-$”“$\wedge$”“$\vee$”。

练　习　2

求证下面的等式：

（1）$X\rightarrow Y=\bar{Y}\rightarrow\bar{X}$，（2）$X\leftrightarrow Y=(X\rightarrow Y)\wedge(Y\rightarrow X)$。

（3）$\overline{\bar{X}\wedge\bar{Y}}=X\vee Y$，（4）$\overline{\bar{X}\vee\bar{Y}}=X\wedge Y$。

（5）$X\leftrightarrow Y=X\wedge Y\vee\bar{X}\wedge\bar{Y}$.

§3　关于等值式的若干变形规则

1.上节等值式引出的规则

（1）关于记号“$\wedge$”与“$\vee$”在表达式变形时，可和初等代数中乘“$\cdot$”加“$+$”符号一样，使用结合律，交换律及分配律。注意这里多了加对乘的分配律。

（2）$\bar{\bar{X}}$可换为X。

（3）$\overline{X\wedge Y}$可换为$\bar{X}\vee\bar{Y}$，$\overline{X\vee Y}$可换为$\bar{X}\wedge\bar{Y}$。

（4）$X\rightarrow Y$可换为$\bar{X}\vee Y$，$X\leftrightarrow Y$可换为

$(\bar{X}\vee Y)\wedge(\bar{Y}\vee X)$。

这里指的都是相互可换性。

上述变形进程一般是这样的：首先利用规则（4），把每一个表达式都换为另一个与它等值的式子，其中不再含有记号“$\rightarrow$”与“$\leftrightarrow$”，因此所得的表达式便只含有三个记号“$\wedge$”、“$\vee$”、“$-$”，继续地运用规则（3），可以把否定记号“$-$”永远向内深入，结果否定记号只能放到基本命题的头上，最后运用规则（2）减少否定记号的重数，以及利用规则（1）化简。

例1. 把$(X\rightarrow Y)\leftrightarrow(\bar{Y}\rightarrow\bar{X})$等值变形，使其只含有记号“$\wedge$”、“$\vee$”、“$-$”且否定记号只在基本命题上。

解：$(X\rightarrow Y)\leftrightarrow(\bar{Y}\rightarrow\bar{X})\xlongequal{\text{规则(4)}}\bar{X}\vee Y\leftrightarrow\bar{\bar{Y}}\vee\bar{X}\xlongequal{\text{规则(2)}}\bar{X}\vee Y\leftrightarrow Y\vee\bar{X}\xlongequal{\text{规则(4)}}$

$(\overline{\bar{X}\vee Y}\vee(Y\vee\bar{X}))\wedge(\overline{Y\vee\bar{X}}\vee(\bar{X}\vee Y))\xlongequal{\text{规则(3)}}(\bar{\bar{X}}\wedge\bar{Y}\vee Y\vee\bar{X})\wedge$

$(\bar{Y}\wedge\bar{\bar{X}}\vee\bar{X}\vee Y)\xlongequal{\text{规则(2)}}(X\wedge\bar{Y}\vee Y\vee\bar{X})\wedge(\bar{Y}\wedge X\vee\bar{X}\vee Y)$即为所求。

例2. 把$\overline{(X\vee Y)\wedge\bar{Y}\vee Z\wedge Y}$等值变形，使否定记号只在基本命题头上。

解：$\overline{(\overline{X}\vee Y)\wedge\overline{Y}\vee\overline{Z\wedge Y}}\xrightarrow{\text{规则(3)}}\overline{(\overline{X}\vee Y)}\wedge\overline{\overline{Y}}\wedge\overline{\overline{Z\wedge Y}}\xrightarrow{\text{规则(3)}}$

$(\overline{\overline{X}\vee Y}\vee Y)\wedge(\overline{Z}\vee\overline{Y})\xrightarrow{\text{规则(2)(3)}}(\overline{X}\wedge\overline{Y}\vee Y)\wedge(\overline{Z}\vee\overline{Y})$

即为所求。

2.代入规则

任何一个含有基本命题X的等值式，如果将所出现X的位置，都代之以一个表达式$\mathfrak{A}$，则等值式仍然成立，这个规则称为代入规则。

所谓等值式意指两个表达式相等值，X既然在两表达式中出现，由它们的真值表可知：X取1，0值时，两表达式的相应值是相等的，现将X代之$\mathfrak{A}$，而$\mathfrak{A}$也无非取0，1两值，所以两表达式的等值性未被破坏，故代入规则是成立的。

代入规则在推导公式中有重要意义。上一节，已经给出了一些基本公式，下一节我们还将给出若干常用公式。有了这条规则，就可以将这些等值式中的命题变量用任意表达式（复合命题）来代替，从而扩大了等值式的数目。

例1. 已知等值式：$A\cdot(B\vee C)=A\cdot B\vee A\cdot C$将所有出现“$C$”的地方代之“$C\vee D$”。则等式仍然成立：

$A\cdot(B\vee(C\vee D))=A\cdot B\vee A\cdot(C\vee D)=A\cdot B\vee A\cdot C\vee A\cdot D$。

例2. 证明：若$\mathfrak{A}=A\cdot\overline{B}\vee C\cdot\overline{D}$，

则 $\overline{\mathfrak{A}}=(\overline{A}\vee B)\cdot(\overline{C}\vee D)$

证：$\overline{\mathfrak{A}}=\overline{A\cdot\overline{B}\vee C\cdot\overline{D}}$

$=\overline{A\cdot\overline{B}}\cdot\overline{C\cdot\overline{D}}$（将公式8中的$X$，$Y$分别代入以$A\overline{B}$和$C\overline{D}$）

$=(\overline{A}\vee\overline{\overline{B}})\cdot(\overline{C}\vee\overline{\overline{D}})$ （公式8′）

$=(\overline{A}\vee B)\cdot(\overline{C}\vee D)$。

3.反演规则（求反规则）

从上面例2中我们看到，如果将$\mathfrak{A}$中的“$\wedge$”换为“$\vee$”，“$\vee$”换为“$\wedge$”，将原变量（即基本命题以下同）换为反变量（如A换为$\overline{A}$），反变量（即基本命题的否定以下同）换为原变量（如$\overline{B}$换为B）。那么所得到的表达式就是$\overline{\mathfrak{A}}$。

将上述方法推广到一般，就是反演规则：设$\mathfrak{A}$为一个不包含“$\rightarrow$”与“$\leftrightarrow$”的表达式，如果将$\mathfrak{A}$中所有的“$\wedge$”换为“$\vee$”，“$\vee$”换为“$\wedge$”，常量“0”换为“1”，“1”换为“0”，将原变量换为反变量，反变量换为原变量，那么所得到的就是$\overline{\mathfrak{A}}$。

实际上，反演规则不过是反演律的推广罢了。

反演规则的实践意义在于：根据反演规则，可以比较容易地求出一个表达式的“反”来。

例1. $\mathfrak{A}=\overline{A}\cdot\overline{B}\vee C\cdot D$

$\overline{\mathfrak{A}}=(A\vee B)\cdot(\overline{C}\vee\overline{D})$

例2. $\mathfrak{A}=\overline{A\vee B\vee\overline{C}\vee D\vee\overline{E}}$

（1）运用反演规则时，除反变量$\overline{C}$，$\overline{E}$按规则应换为原变量C、E外，其它联系两个

或多个变量头上的否定号“－”应保持不动。即

$$\overline{\mathfrak{A}}=\overline{A}\cdot\overline{\overline{B}\cdot C\cdot\overline{\overline{D}}\cdot E}。$$

（2）也可以把“$B\vee\overline{C}\vee\overline{D\vee\overline{E}}$”看做是一个新变量$X$，则 $\mathfrak{A}=A\vee\overline{X}$，

$$\overline{\mathfrak{A}}=\overline{A}\cdot X=\overline{A}\cdot(B\vee\overline{C}\vee\overline{D\vee\overline{E}})。$$

4.对偶规则

对偶式：设$\mathfrak{A}$是一个不包含“→”与“↔”的表达式。如果将$\mathfrak{A}$中所有的“∨”换为“∧”，“∧”换为“∨”，“1”换为“0”，“0”换为“1”，那么就得到一个新的表达式，这个新的表达式就称为$\mathfrak{A}$的对偶式。记作$\mathfrak{A}'$。

例：$\mathfrak{A}=A\cdot(B\vee\overline{C})$， $\mathfrak{A}'=A\vee B\cdot\overline{C}$；

$\mathfrak{A}=A\vee B\cdot\overline{C}$， $\mathfrak{A}'=A\cdot(B\vee\overline{C})$；

$\mathfrak{A}=A\cdot\overline{B}\vee A\cdot(C\vee 0)$， $\mathfrak{A}'=(A\vee\overline{B})\cdot(A\vee C\cdot 1)$；

$\mathfrak{A}=(A\vee\overline{B})\cdot(A\vee C\cdot 1)$， $\mathfrak{A}'=A\cdot\overline{B}\vee A\cdot(C\vee 0)$；

$\mathfrak{A}=\overline{\overline{A}\vee B\vee\overline{C}}$ $\mathfrak{A}'=\overline{\overline{A}\,B\,\overline{C}}$；

$\mathfrak{A}=\overline{\overline{A}\,B\,\overline{C}}$， $\mathfrak{A}'=\overline{\overline{A}\vee B\vee\overline{C}}$。

由上例可以看出：如果$\mathfrak{A}$的对偶式是$\mathfrak{A}'$，那么$\mathfrak{A}'$的对偶式就是$\mathfrak{A}$，也就是说$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{A}'$是互为对偶式的。

有些表达式的对偶式就是它自身。例如：

$\mathfrak{A}=\overline{A}$， $\mathfrak{A}'=\overline{A}$；

$\mathfrak{A}=A$， $\mathfrak{A}'=A$。

$\mathfrak{A}$的对偶式$\mathfrak{A}'$和由反演规则所得到的$\overline{\mathfrak{A}}$不同。在得到$\mathfrak{A}'$时，不要求将原变量和反变量互换。因此，一般$\mathfrak{A}'\neq\overline{\mathfrak{A}}$，只有在特殊情况下$\mathfrak{A}'$和$\overline{\mathfrak{A}}$才相等。

例1. $\mathfrak{A}=A\cdot\overline{B}\vee C\cdot\overline{D}$，$\mathfrak{A}'=(A\vee\overline{B})\cdot(C\vee\overline{D})$

$\overline{\mathfrak{A}}=(\overline{A}\vee B)\cdot(\overline{C}\vee D)$，$\mathfrak{A}'\neq\overline{\mathfrak{A}}$。

例2. $\mathfrak{A}=A\cdot\overline{B}\vee\overline{A}\cdot B$，$\mathfrak{A}'=(A\vee\overline{B})\cdot(\overline{A}\vee B)$；

$\overline{\mathfrak{A}}=(\overline{A}\vee B)\cdot(A\vee\overline{B})$， $\mathfrak{A}'=\overline{\mathfrak{A}}$。

我们分析上节所给出的基本公式。对比公式1—8和公式1′—8′，不难看出，公式1′—8′中每个公式的等号两端的表达式，都是公式1—8中相应公式的等号两端表达式的对偶式。也就是说，如果两表达式相等，则它们的对偶式就相等。

对偶规则：如果两个表达式$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$相等，那么它们的对偶式$\mathfrak{A}'$和$\mathfrak{B}'$也相等。

因为$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$，根据反演规则，$\overline{\mathfrak{A}}$和$\overline{\mathfrak{B}}$可以从表达式$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$得到，即将$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$中的“∧”换为“∨”，将“∨”换为“∧”，将“0”换为“1”、将“1”换为“0”，将原变量换为反变量，将反变量换为原变量。如果我们再把$\overline{\mathfrak{A}}$和$\overline{\mathfrak{B}}$中所有变量都代之以它们的“反”，那么就得到$\mathfrak{A}'$和$\mathfrak{B}'$，根据代入规则，由于$\overline{\mathfrak{A}}=\overline{\mathfrak{B}}$，所以$\mathfrak{A}'=\mathfrak{B}'$。

例：已知：$A\cdot(B\vee C\vee D)=A\cdot B\vee A\cdot C\vee A\cdot D$，则等式两端表达式的对偶式也相等，即

$$A\vee B\cdot C\cdot D=(A\vee B)\cdot(A\vee C)\cdot(A\vee D)。$$

有了对偶规则，使所要证明的等值式（或简称等式）减少了一半。当证明了某两个表达式相等时，根据对偶规则，它们的对偶式也相等，因此，我们在下面介绍关于两表达式的等式时，就不再给出关于它们的对偶式的等式。

练　习　3

1.把下列语句表为符号的形式：

（1）“不能同时是X又是Y”。

（2）“不是X也不是Y”。

（3）“不是X或不是Y”。

2.取消复合命题头上的否定号：

（1）$\overline{\overline{X\wedge Y}\vee(\bar{Z}\wedge R)}$

（2）$\overline{((X\vee\bar{Y})\wedge Z)\vee R}$

3.证明$X\to(Y\to Z)$等于$Y\to(X\to Z)$等于$X\wedge Y\to Z$。

4.取消下列四题的蕴涵号及等价号并使结果再化为否定号只在基本命题头上的表达式。

（1）$(X\to Y)\to Z$　　（2）$(X\to Y)\to(X\wedge Z\to Y)$

（3）$X\leftrightarrow(Y\to Z)$　　（4）$X\to(Y\leftrightarrow Z)$。

5.不用否定号表示$\bar{X}\vee Y\vee\bar{Z}$。

6.用反演规则求下列表达式的“反”：

（1）$\mathfrak{A}=(A\vee C)\cdot(B\vee\bar{C})$

（2）$\mathfrak{A}=A(\bar{B}\vee(C\cdot\bar{D}\vee\bar{E}\cdot F)\cdot G)$

（3）$\mathfrak{A}=A\cdot\bar{B}\vee B\bar{C}\vee C(\bar{A}\vee D)$。

7.写出下列表达式的对偶式：

（1）$\mathfrak{A}=A\cdot E\vee(A\vee B)\cdot C\vee\bar{A}\cdot D\vee(\bar{A}\vee E)\cdot B$，

（2）$\mathfrak{A}=(A\vee B)\cdot(\bar{A}\vee C)\cdot(C\vee D\cdot E)\vee F$，

（3）$\mathfrak{A}=\bar{A}\cdot\bar{B}(C\vee D)\vee\bar{X}\cdot\bar{Y}\cdot C\vee\bar{X}\cdot\bar{Y}\cdot D\cdot E\vee F$，

（4）$\mathfrak{A}=\overline{\overline{A\cdot\overline{\bar{A}\cdot B}}\cdot\overline{\overline{A\cdot B}\cdot B}}$

（5）$\mathfrak{A}=\overline{\overline{A\cdot\bar{B}}\cdot\overline{C\cdot\bar{D}}\cdot\overline{D\cdot\overline{A\cdot B}}}$

（6）$\mathfrak{A}=\overline{\overline{A\vee\bar{C}}\vee\overline{B\vee C}\vee\overline{\bar{A}\vee B\vee B\vee C}}$。

8.用基本公式和基本规则证明下列等式：

（1）$A\cdot B\vee\bar{A}\cdot C\vee\bar{\bar{B}}\cdot C=A\cdot B\vee C$

（2）$A\cdot B\vee C\vee A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}=A\vee C$

（3）$A\cdot\bar{B}\vee B\cdot D\vee\bar{A}\cdot D\vee D\cdot C=A\cdot\bar{B}\vee D$

（4）$B\cdot C\vee D\vee\bar{D}\cdot(\bar{B}\vee\bar{C})\cdot(D\cdot A\vee B)=B\vee D$

（5）$\overline{(A\vee C)\cdot(B\vee\bar{C})}\vee\overline{A\vee B}=\bar{A}\cdot\bar{C}\vee\bar{B}\cdot C$。

§4 若干常用公式及公式化简法

运用基本公式和上节基本规则，我们可以得到更多的公式。下列公式在将表达式变形或简化时是经常用到的。

公式18：$X\cdot Y\vee X\cdot\overline{Y}=X$

证明：　$X\cdot Y\vee X\cdot\overline{Y}=X\cdot(Y\vee\overline{Y})=X\cdot 1=X$。

利用公式18可以将两项合并，并且在合并项时能消去一个变量。

公式19：$X\vee X\cdot Y=X$

证明：　$X\vee X\cdot Y=X\cdot(1\vee Y)=X\cdot 1=X$。

公式19说明，在一个"与—或"表达式中，如果一乘积项是另外一乘积项的一个因子，则包含这个因子的乘积项是多余的。

例：$X\cdot Y\vee X\cdot Y\cdot\overline{X\vee Y\vee Z}=X\cdot Y$，

公式20：$X\cdot Y\vee\overline{X}\cdot C\vee Y\cdot C=X\cdot Y\vee\overline{X}\cdot C$

证明：　$X\cdot Y\vee\overline{X}\cdot C\vee Y\cdot C$

$=X\cdot Y\vee\overline{X}\cdot C\vee(X\vee\overline{X})\cdot Y\cdot C$

$=X\cdot Y\vee\overline{X}\cdot C\vee X\cdot Y\cdot C\vee\overline{X}\cdot Y\cdot C$

$=(X\cdot Y\vee X\cdot Y\cdot C)\vee(\overline{X}\cdot C\vee\overline{X}\cdot Y\cdot C)$

$=X\cdot Y\vee\overline{X}\cdot C$

推论：$X\cdot Y\vee\overline{X}\cdot C\vee Y\cdot C\cdot D=X\cdot Y\vee\overline{X}\cdot C$

证明：$X\cdot Y\vee\overline{X}\cdot C\vee Y\cdot C\cdot D$

$=(X\cdot Y\vee\overline{X}\cdot C\vee Y\cdot C)\vee Y\cdot C\cdot D$（公式20）

$=X\cdot Y\vee\overline{X}\cdot C\vee(Y\cdot C\vee Y\cdot C\cdot D)$

$=X\cdot Y\vee\overline{X}\cdot C\vee YC$　（公式19）

$=X\cdot Y\vee\overline{X}C$　　　（公式20）

公式20及其推论说明：在一个"与—或"表达式中，如果有两个乘积项，其中一项包含了原变量X，另一项包含了反变量$\overline{X}$，而这两项的其余因子都是第三个乘积项的因子，则第三个乘积项是多余的。

例1. $A\cdot\overline{B}\vee\overline{A}\cdot\overline{C}\vee\overline{B}\cdot\overline{C}$

$=A\cdot\overline{B}\vee\overline{A}\cdot\overline{C}$（将公式20中的$Y$和$C$代之以$\overline{B}$和$\overline{C}$）。

例2. $A\cdot B\vee\overline{A}\cdot C\cdot D\vee B\cdot C\cdot D\cdot E=A\cdot B\vee\overline{A}\cdot C\cdot D$（因为$A\cdot B$中含有$A$，$\overline{A}\cdot C\cdot D$中含有$\overline{A}$，而在$B\cdot C\cdot D\cdot E$中包含了$AB$和$\overline{A}\cdot C\cdot D$的所有其余因式，即$B$和$C\cdot D$，所以$B\cdot C\cdot D\cdot E$是多余的）。

公式21：$X\vee\overline{X}\cdot Y=X\vee Y$

证明：$X\vee\overline{X}\cdot Y=(X\vee\overline{X})\cdot(X\vee Y)=1\cdot(X\vee Y)=X\vee Y$。

公式21说明，在一个"与—或"表达式中，如果一个乘积项的"反"为另一个乘积项的因子，则这个因子是多余的。