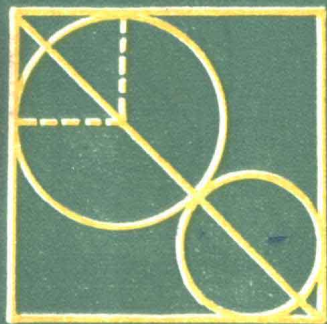
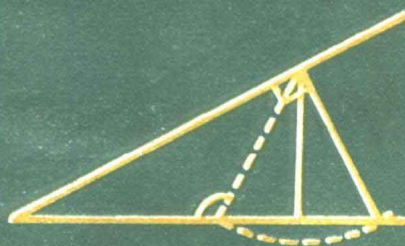
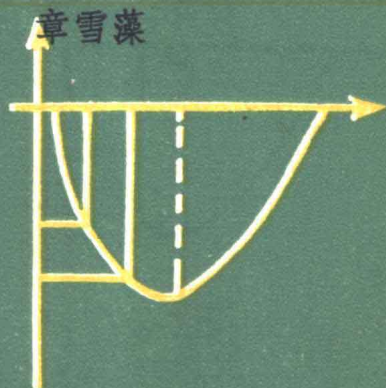
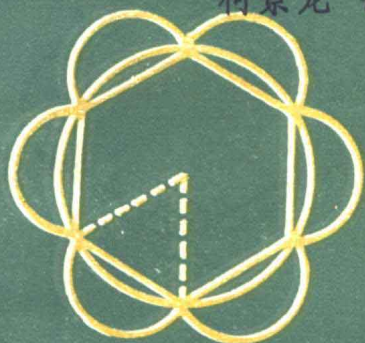


初等数学疑难问题讲解

C12/9

容易错的概念 容易错的方法

柯景龙 钱金荣 章雪藻



内蒙古人民出版社

RONGYI CUO DE GAINIAN RONGYI CUO DE FANGFA

初等数学疑难问题讲解

容易错的概念 容易错的方法

(初 中 部 份)

柯景龙 钱金荣 章雪藻

内蒙古人民出版社

一九八三·呼和浩特

容易错的概念

容易错的方法

柯景龙 钱金荣 章雪藻

•

内蒙古人民出版社出版

(呼和浩特市新城西街82号)

内蒙古新华书店发行 内蒙古新华印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 7.25 字数: 149千

1983年11月第一版 1983年12月第1次印刷

印数: 1—62,000册

统一书号: 7089·332 每册: 0.70元

出版说明

《初等数学疑难问题讲解》丛书，是为自学数学的广大社会青年讲解初等数学中的疑难问题而编辑出版的。它是就疑难问题较多的篇章中撰写为：《曲线的切线和切线方程》、《空间直线、平面、多面角》、《参数方程及其应用》、《复数与初等数学》、《三角函数式和差积商的周期》、《排列组合及其应用》、《解题思路与解题技巧》、《容易错的概念，容易错的方法》等书组成。

这套丛书各册的共同特点是：对有关基础知识和基本训练方面的疑难问题讲解得比较细致通俗，易读易懂；对所用例题都有分析，通过分析疏通了思路、抓住了解题的关键；对综合题采用了不同知识的多种解法；同时，适当地注意了知识的准确性和语言的趣味性。

这套丛书可供为广大社会青年自学数学的辅导用书，也可作为在校中学生的课外读物，对于中学数学教师也是较好的教学参考资料。

内蒙古人民出版社

一九八三年五月一日

前 言

数学是学好自然科学及生产技术的重要基础，学好初中数学——代数、几何、三角等这些基础知识及其基本方法，不仅为升入高中学习数学和物理、化学等其它学科打下重要的基础，也为进入社会参加工作、学习生产技术提供良好的条件。当前，初中学生和一些自学青年，在学习数学知识和解答数学题中，忽视基本概念，不认真理解和掌握基本方法，片面追求作难题和综合题，以致造成错误百出，问题成堆；还有的虽亦重视基本概念的学习，但苦于原有基础没有打好，缺乏必要的基本训练，未能熟练掌握基本技能和技巧，因此解题时，准确率低速度慢，不适应解综合题。为此，我们编写了《容易错的概念，容易错的方法》这本小册，汇集了初中学生在学习代数、几何、三角中具有代表性的常见错误，分析产生错误的原因，指出克服错误的方法，归纳解题的一般规律，并且列举了正确的解法，供对照比较，以期帮助初中学生、自学青年，澄清一些重要而容易错的概念、解决一些重要而容易错的方法，加深对基础知识、基本方法的理解和掌握，提高推理证明和计算方法方面的能力。

编 者

一九八二年十二月于北京人大附中

目 录

I 有关代数

§1 实数和绝对值与不等式中的问题	(1)
§2 乘法公式和因式分解 方面的问题	(21)
§3 二次根式方面的 问题	(38)
§4 方程和方程组 中的问题	(45)
§5 指数和对数中的问题	(59)
§6 函数方面的 问题	(71)

II 有关几何

§1 初学者中常见的几个 问题	(86)
§2 几何解题中的几个 典型问题	(124)
§3 讲评几道 几何综合题	(153)

III 有关三角

§1 概念上常出现的 问题	(182)
§2 方法上常出现的 问题	(190)
§3 讲评几道三角 综合题	(209)

I. 有关代数

§1. 实数和绝对值与不等式中的问题

1. 比较大小时，要作全面分析

例1. 若 a 是实数，比较下列每对数的大小：

(1) a 和 $-a$; (2) a^3 和 a^2 ;

(3) a 和 $\frac{1}{a}$; (4) $\sqrt{a}$ 和 a .

【错误解答】常见的错误解答如下：

(1) 因为 a 是一个正数， $-a$ 是一个负数，所以 $a > -a$.

(2) 自乘的次数越多，数越大。
所以 $a^3 > a^2$.

(3) a 比 1 大时， $a > \frac{1}{a}$,

a 比 1 小时， $a < \frac{1}{a}$.

(4) $\sqrt{a} < a$.

分析*上面的四个解答都是错误的。因为

* 本书的分析里，除了通常解题分析的内容外，由于本书的特点，还带有讲评对错，指出错在那里的内容，以下皆同，特此注明。

(1) 由于 a 是实数, 比较 a 和 $-a$ 的大小时, 要作全面的考虑. 例如: $a=3$ 时, $-a=-3$; $a=-\frac{4}{5}$ 时,

$-a=\frac{4}{5}$; $a=0$ 时, $-a=0$. 由此可见: $-a$ 可以是正数、零或负数, 并不总是负数.

(2) $a=-3$ 时, $a^3=-27$, $a^2=9$, 可见并不总是 $a^3>a^2$.

(3) 由于 $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-\frac{2}{3}}$, $\sqrt{-0.7}$ 在实数范围内没有意义, 所以在比较根式的值时, 要首先确定比较的范围.

(4) $a=0.25$ 时, $\sqrt{a}=\sqrt{0.25}=0.5$, 则 $\sqrt{a}>a$, 可见, 并不总是 $\sqrt{a}<a$.

比较 A 与 B 的大小, 一般方法是观察 $A-B$ 的值. 例如,

$$\because 5-3>0, \quad \therefore 5>3.$$

$$\because (-16)-(-7)<0, \quad \therefore (-16)<(-7).$$

$$\because \frac{3}{4}-\frac{3}{4}=0, \quad \therefore \frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$

【正确解答】如下:

(1) $a-(-a)=2a$, 因此:

当 $a>0$ 时, $a>-a$;

当 $a=0$ 时, $a=-a$;

当 $a<0$ 时, $a<-a$.

(2) $a^3-a^2=a^2(a-1)$, 因此:

当 $a>1$ 时, $a^3>a^2$;

当 $a=1$ 或 $a=0$ 时, $a^3=a^2$,

当 $a<1$ 且 $a\neq 0$ 时 $a^3<a^2$.

$$(3) \quad a - \frac{1}{a} = \frac{a^2-1}{a}, \text{ 因此,}$$

当 $a>1$ 或 $-1<a<0$ 时, $a>\frac{1}{a}$,

当 $a=1$ 或 $a=-1$ 时, $a=\frac{1}{a}$,

当 $a<-1$ 或 $0<a<1$ 时, $a<\frac{1}{a}$.

(4) $a\geq 0$ 时, $\sqrt{a}$ 与 a 才能比较, 此时:

$a - \sqrt{a} = \sqrt{a} (\sqrt{a} - 1)$, 因此:

当 $a\geq 1$ 时, $a\geq \sqrt{a}$;

当 $0\leq a<1$ 时, $a\leq \sqrt{a}$.

说明: 比较大小时, 不仅要考虑二数不等的情况, 也应考虑它们何时相等.

例 2. 若 $a<b$ 比较 a^2 和 b^2 的大小.

【错误解答】往往解答不完整. 如:

$$\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

$$\therefore \text{当 } a>0, b>0 \text{ 时, } a^2 < b^2;$$

$$\text{当 } a<0, b<0 \text{ 时, } a^2 > b^2.$$

分析 由于对 a 与 b 之间大小关系考虑不全面, 所以上述解答没能将 a 与 b 作全面的比较. 当 $a<b$ 时, 它们之间的关系有下述七种情况:

$$(1) a > 0, b > 0;$$

$$(2) a < 0, b < 0;$$

$$(3) a < 0, b = 0;$$

$$(4) a = 0, b > 0;$$

$$(5) a < 0, b > 0, \text{但 } |a| = |b|;$$

$$(6) a < 0, b > 0, \text{但 } |a| < |b|;$$

$$(7) a < 0, b > 0, \text{但 } |a| > |b|.$$

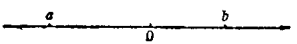
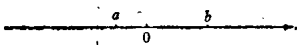
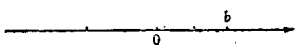
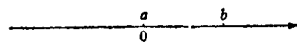
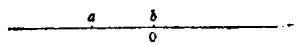
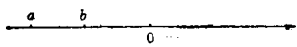
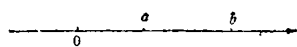


图1-1

也许有人会问，这七种情况是怎么想出来的？我们知道，在数轴上表示两个有理数，右边的数总比左边的数大。本题中 $a < b$ ，自然就会得出结论：数轴上表示 a 的点总在表示 b 的点的左边。这个左右关系具体在数轴上就体现为七种不同的左右位置。这里，我们可以进一步看到：使用数轴是一个直观的、方便的好方法。

【正确答案】 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ，因此：

$$\text{当 } a > 0, b > 0 \text{ 时,} \quad a^2 < b^2;$$

$$\text{当 } a < 0, b < 0 \text{ 时,} \quad a^2 > b^2;$$

$$\text{当 } a < 0, b = 0 \text{ 时,} \quad a^2 > b^2;$$

$$\text{当 } a = 0, b > 0 \text{ 时,} \quad a^2 < b^2;$$

$$\text{当 } a < 0, b > 0 \text{ 但 } |a| = |b| \text{ 时,} \quad a^2 = b^2;$$

$$\text{当 } a < 0, b > 0 \text{ 但 } |a| < |b| \text{ 时,} \quad a^2 < b^2;$$

$$\text{当 } a < 0, b > 0 \text{ 但 } |a| > |b| \text{ 时,} \quad a^2 > b^2.$$

概括地回答：

$$\text{当 } |a| < |b| \text{ 时, } a^2 < b^2;$$

$$\text{当 } |a| = |b| \text{ 时, } a^2 = b^2;$$

当 $|a| > |b|$ 时, $a^2 > b^2$.

2. 不掌握定义出现的错误

例3. 当 x 是哪些整数时, 分式 $\frac{6}{x^2 + 3x + 2}$ 的值是自然数.

【错误解答】请看如下所答错在那里? 如:

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } \frac{6}{x^2 + 3x + 2} = 3;$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } \frac{6}{x^2 + 3x + 2} = 1.$$

所以 x 取整数 0 与 1 时, 分式 $\frac{6}{x^2 + 3x + 2}$ 的值是自然数.

分析 我们知道: 负整数、零和正整数的全体定义为整数. 上述解答中没有考虑负整数, 所以是错误的.

【正确解答】要分式 $\frac{6}{x^2 + 3x + 2}$ 的值是整数, 分母的值必须是 ± 1 、 ± 2 、 ± 3 、 ± 6 , 由此用验证法解得

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } \frac{6}{x^2 + 3x + 2} = 3;$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } \frac{6}{x^2 + 3x + 2} = 1;$$

$$\text{当 } x=-3 \text{ 时, } \frac{6}{x^2 + 3x + 2} = 3;$$

$$\text{当 } x=-4 \text{ 时, } \frac{6}{x^2 + 3x + 2} = 1.$$

$\therefore x$ 取 -4 、 -3 、 0 、 1 时, 分式 $\frac{6}{x^2 + 3x + 2}$ 的值为自

然数。

3. 不能以“个别”代替“一般”

例4. 证明：任意四个连续自然数的积与1的和必为某一自然数的平方。

【错误解答】下面的证明是否对？如：

$$\begin{aligned}\because \quad & 1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 5^2, \\ & 2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 11^2, \\ & 3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 19^2, \\ & 4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 29^2.\end{aligned}$$

$\therefore$ 四个连续自然数的积与1的和必为某一自然数的平方。

分析 这里只对四种具体的情况证明四个连续自然数的积与1的和是某个自然数的平方，而没有对任意四个连续自然数证明这一结论，所以上述证明是犯了以“个别”代替“一般”的毛病。

任意四个连续自然数可以写成：

$$n, n+1, n+2, n+3.$$

题目要求证明的是：

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = (\text{某自然数})^2.$$

【正确解答】设任意四个连续自然数为 $n, n+1, n+2, n+3$ 。

$$\begin{aligned}\text{由于} \quad & n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 \\ &= n(n+3)(n+1)(n+2) + 1 \\ &= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 \\ &= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 \\ &= (n^2 + 3n + 1)^2.\end{aligned}$$

所以,任意四个连续自然数的积与1的和必为某一自然数的平方。

例5.证明所有型如 $abcabc$ 的数都能被13整除。

【错误解答】由于

$$136136 = 13 \times 10472,$$

$$702702 = 13 \times 54054,$$

它们都能被13整除,所以,型如 $abcabc$ 的数都能被13整除。

分析 显然这又是以“个别”代替“一般”了。但是怎样具体地表示型如 $abcabc$ 这样的数呢?

我们知道,两位数、三位数的表达式分别是:

$$89 = 8 \times 10 + 9,$$

$$352 = 3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 2,$$

$$\begin{aligned}\text{故 } abcabc &= a \times 10^5 + b \times 10^4 + c \times 10^3 + a \times 10^2 \\ &\quad + b \times 10 + c.\end{aligned}$$

我们应该就这一式子来证明题中所述的结论。

【正确解答】

$$\begin{aligned}\because abcabc &= a \times 10^5 + b \times 10^4 + c \times 10^3 + a \times 10^2 \\ &\quad + b \times 10 + c \\ &= 10^3(a \times 10^2 + b \times 10 + c) + (a \times 10^2 + \\ &\quad + b \times 10 + c) \\ &= (10^3 + 1)(a \times 10^2 + b \times 10 + c) \\ &= 1001 \times abc \\ &= 13 \times 77 \times abc.\end{aligned}$$

$\therefore$ 所有型如 $abcabc$ 的数都能被13整除。

说明:这两个例题并没有用到更多的数学知识,只须要

掌握几个连续自然数及多位正整数的表示方法即可。这就告诉我们，学会并熟练掌握用字母表示各种性质的数是很重要的。

显然，型如 $abcabc$ 的数也都能被 1001 整除，这是因为：

$$\begin{aligned} abcabc &= abc000 + abc \\ &= abc \times 1001. \end{aligned}$$

4. 当 n 是自然数时，有关 n 的奇、偶数问题

例 6. n 为自然数，求证：关于 x 的方程 $x(x-1) = n(2x-n-1)$ 的两个根一为奇数，一为偶数。

【错误解答】要注意遗根，如：将上述方程经整理，可得：

$$x^2 - (2n+1)x + (n^2+n) = 0.$$

由于 $\Delta = (2n+1)^2 - 4(n^2+n) = 1 > 0$ ，方程有二实数解，设为 α 与 β 。

由根与系数的关系可知：

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2n+1, \\ \alpha \cdot \beta = n^2 + n. \end{cases}$$

但是 $n + (n+1) = 2n+1$,

$$n(n+1) = n^2 + n.$$

所以 $\alpha = n$, $\beta = n+1$, n 是偶数, $n+1$ 是奇数。

所以方程的两个根一个为奇数，一个为偶数。

分析 上述解答中，用观察法求得方程组的根： $\alpha = n$, $\beta = n+1$ 。在这里这个方法要比一般的解方程组的方法简单，不失为一个好方法。但是说法“ n 是偶数， $n+1$ 是奇数”是片面的。实际上 n 也可以是奇数，这时 $n+1$ 是偶数。所以，用观察法丢了一个根： $\alpha = n+1$, $\beta = n$ 。

【正确解答】整理方程得：

$$x^2 - (2n+1)x + (n^2+n) = 0,$$

由于 $\Delta = (2n+1)^2 - 4(n^2+n) = 1 > 0$ ，方程有二实数根，设其为 α 与 β 。由根与系数的关系，可知：

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2n+1, \\ \alpha \cdot \beta = n^2+n. \end{cases}$$

用观察法解得：

$$\alpha = n, \quad \beta = n+1.$$

由于 n 与 $n+1$ 中必定一个为偶数，一个为奇数。所以，原方程的两个根一为奇数，一为偶数。

说明：如果将原题改为：“ n 为自然数，求证： $x(x-1) = n(2x-n-1)$ 的两个根为连续自然数”。虽然在实质上与原题没有什么区别，但是在用观察法求根时就不那么容易，因此这要求我们对“连续自然数”的一般表示：“ $n-1, n$ ”或“ $n, n+1$ ”要比较熟悉。

5. 掌握好绝对值的概念，会得到正确的解题思路

例 7. 解下列各题：

- (1) 求绝对值等于 2 的数；
- (2) 求绝对值小于 4 的所有整数；
- (3) 求绝对值不大于 5 的所有整数。

【错误解答】试看下列答案：

- (1) 绝对值等于 2 的数是 +2；
- (2) 绝对值小于 4 的整数是 3、2、1；
- (3) 绝对值不大于 5 的整数是 4、3、2、1。

分析 上述解答是错误的，其原因有二：

- (1) 不知道一对互为相反的数有相同的绝对值。用数

轴的方法观察距离或设未知数 x 、列方程，用绝对值的意义来求解，可以避免这一错误。

(2) 不知道“不大于”就意味着“等于”或“小于”两个关系。

【正确解答】如下：

(1) 设所求的数为 x ，
解方程 $|x| = 2$ ，得 $x = \pm 2$ 。

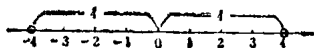


图1-2

(2) 作数轴
观察数轴，可知：绝对值小于4的所有整数是 ± 3 、 ± 2 、 ± 1 和 0。

(3) 作数轴
观察数轴，可知：绝对值不大于5的所有整数是 ± 5 、 ± 4 、 ± 3 、 ± 2 、 ± 1 、0。

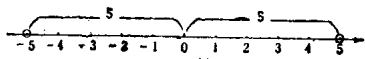


图1-3

例8. 化简 $\frac{|x|}{x}$ 。

【错误解答】请看这样解答对不对？如：

$$\because |x| = x,$$

$$\therefore \frac{|x|}{x} = 1.$$

分析 在式子 $\frac{|x|}{x}$ 中，显然 $x \neq 0$ ，这里 x 可以是正数，也可以是负数：

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时， } |x| = x.$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时， } |x| = -x;$$

上述解答中，没有对 x 的取值进行全面的考虑，故是错误的。

【正确解答】根据分析，有

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & (x > 0) \\ -1, & (x < 0) \end{cases}$$

例9. 若 $x < -2$ ，求 $|1 - |1 + x||$ 的值。

【错误解答】 $\because |1 + x| = 1 + x$ ，

$$\therefore 1 - |1 + x| = 1 - (1 + x) = -x.$$

$$\text{故 } |1 - |1 + x|| = |-x| = x.$$

分析 $|1 + x|$ 等于什么？这要看 $1 + x \geq 0$ 还是 $1 + x < 0$ ，我们不能凭主观猜测 $1 + x$ 得正值还是取负值，而是要根据题目本身的条件。

由于 $x < -2$ ，两边同时加1得： $x + 1 < -1$ 。

因此 $1 + x < 0$ ，于是： $|1 + x| = -(1 + x)$ 。

上述解答从第一步开始便错了，原因便是不注意分析绝对值符号里面的代数式的值是正数还是负数，从而不能依照绝对值的意义正确计算 $|1 + x|$ 。同样， $|-x| = x$ ，这样理解也是错的。

【正确解答】如下：

由于 $x < -2$ ，

$$1 + x < -1.$$

$$\therefore 1 + x < 0,$$

$$\therefore |1 - |1 + x|| = |1 + (1 + x)| = |2 + x|.$$

由于 $x < -2$ ， $2 + x < 0$ ，

$$\therefore |2 + x| = -(2 + x).$$

$$\text{故 } |1 - |1 + x|| = -(2 + x).$$

例10. x 取什么数时， $(1 - |x|)(1 + x)$ 是正数。

【错误解答】 $x < 1$ 时， $(1 - |x|)$ 与 $(1 + x)$ 都是正数，