概率论与随机过程

GAILÜLUN YU SUIJI GUOCHENG

王玉孝 编
孙洪祥 审

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

概率论与随机过程

王玉孝　编
孙洪祥　审

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书第一、二、三章论述了以测度论为基础的概率论的最基本的概念、方法和理论；第四章介绍了在概率论中起重要作用的随机变量特征函数的主要内容；第五章介绍了在概率论与随机过程中常用的随机变量序列的收敛概论和性质；第六、七章给出了随机过程的基本概念及随机分析的基础知识；第八章除了介绍弱平稳过程的基本概念之外，重点讲述了相关函数和平稳过程的谱分解；第九、十两章重点讲解了齐次马尔科夫链、可数齐次马尔科夫过程的基础内容。

本书适合对概率论与随机过程理论要求较高的工科研究生使用，也可作为一般专业的工科研究生或数学专业本科生作为“概率论与随机过程”课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与随机过程/王玉孝编. —北京:北京邮电大学出版社，2003

ISBN 7-5635-0758-2

Ⅰ. 概… Ⅱ. 王… Ⅲ. ①概率论②随机过程 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 053639 号

出 版 者：北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 10 号)
邮编：100876 发行部电话/传真：62282185/62283578
网址：http://www.buptpress.com

经 销：各地新华书店

印 刷：北京通州皇家印刷厂

印 数：5 000 册

开 本：787 mm×1 092 mm 1/16

印 张：14.25

字 数：369 千字

版 次：2003 年 8 月第 1 版 2003 年 8 月第 1 次印刷

书 号：ISBN 7-5635-0758-2/O・58

定 价：23.00 元

如有印装质量问题请与北京邮电大学出版社发行部联系

前　言

由于教学工作的需要，编者近十年来一直担任北京邮电大学硕士研究生的学位课“概率论与随机过程”的教学工作。本书就是在这近十年的教学过程中，对“概率论与随机过程”课程讲义进行多次修改而形成的。在研究生逐年扩招的形势下，对“概率论与随机过程”课程讲义的需求量逐年增加，急需一本适合研究生使用的正式出版物。

“概率论与随机过程”这门课对通信、信息、管理类专业的研究生是一门十分重要的基础课。通过本课程的深入学习，不仅可以获得相关的知识，更重要的是还可以培养学生处理“随机问题”的思想方法。

在工科“概率论与随机过程”的教材与以测度论为基础的近代概率论(包括随机过程)之间有一鸿沟，填平这一鸿沟或者至少在这一鸿沟上架一座桥梁，是提高工科研究生概率论与随机过程水平必不可少的工作。本书努力在这方面作一下尝试，这不仅是编者的意愿，也是北京邮电大学一些研究生导师的共同要求。编写本书的宗旨是使它既具有一定的理论深度，又不需要过多的数学基础，为学生深入学习相关的数学理论及这些理论在各自专业中的应用打下一定的基础。

本书第一、二、三章论述了以测度论为基础的概率论的最基本的概念、方法和理论；第四章介绍了在概率论中起重要作用的随机变量特征函数的主要内容；第五章介绍了在概率论与随机过程中常用的随机变量序列的收敛概论和性质；第六、七章给出了随机过程的基本概念及随机分析的基础知识；第八章除了介绍弱平稳过程的基本概念之外，重点讲述了相关函数和平稳过程的谱分解；第九、十两章重点讲解了齐次马尔科夫链、可数齐次马尔科夫过程的基础内容。

在编写过程中，考虑到本书的主要对象不是数学专业的学生，所以部分内容没有给出数学的严格推导，有些定理略去了证明，但指明了出处，便于读者深入学习。

本书适合对概率论与随机过程理论要求较高的工科研究生使用，也可作为一般专业的工科研究生或数学专业本科生作为“概率论与随机过程”课程的参考书。

许升汉老师在讲授硕士研究生“概率论与随机过程”课程时的讲义，是编写本书的起点，虽然以后多次作了大的修改，但至今仍保留了它的部分内容和习题，在此对许升汉老师表示诚挚的感谢。

在本书编写的过程中参考了一些文献，吸取了一些专著的特点，在此向这些文献和专著的作者表示深深的敬意。

孙洪祥教授在百忙之中审阅了全书，提出了很好的意见和建议，在此表示衷心的感谢。

北京邮电大学出版社对本书的出版给予了大力的支持，陈俊英同志极力促成本书的出版，谨向他们致谢。

北京邮电大学理学院的工作人员和数学部的老师、研究生院学位科的工作人员，对编者在研究生的教学工作中给予了很大的支持，借此机会向他们致谢。

由于编者水平所限，难免有错误和疏漏之处，请读者指正。

作　者

2003 年 6 月

目　　录

第一章 概率空间

为给出概率空间的概念,先简要地回顾一下初等概率论中关于事件概率的定义.

设 $\widetilde{E}$ 为一随机试验,样本空间记为 $\Omega=\{\omega\}$,ω 是 $\widetilde{E}$ 的样本点.如果对 $\widetilde{E}$ 的每一个事件 A,有一实数与之对应,记作 $P(A)$,且满足:

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) 若事件 $A_1,A_2,\cdots$两两互不相容,则有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k),$$

称 $P(A)$为事件 A 的概率.

我们知道,$\widetilde{E}$ 的一个事件 A 是样本点的集合,即 $A\subset\Omega$,但是不是任何一个样本点的集合都是一个事件?如果把映射 $A\to P(A)$看成是集合 A 的函数,那么像普通函数一样,应当考虑 A 在什么范围内时,$P(A)$有定义?这就要考虑以事件 A 为元素的集合,通常称为事件体,记作 $\mathscr{F}$.于是上面的描述可以概括为:设随机试验 $\widetilde{E}$ 的样本空间为 Ω,$\mathscr{F}$ 是由 $\widetilde{E}$ 的事件,即 Ω 的一些子集组成的事件体,$P(A)$是定义在 $\mathscr{F}$ 上的满足条件(1)、(2)、(3)的集合函数,称 $P(A)$为事件 A 的概率.

对以上概括还有一些问题需要讨论,例如,$\mathscr{F}$ 的构造有什么特点?在 $\mathscr{F}$ 上的概率又是如何构造的?这是本章讨论的主要问题.概率论中这部分内容的讨论,常常和测度论的有关内容有着密切的关系,本章也将结合测度论的相应内容来讨论这些问题.

第一节 集合代数和 σ-代数

一、集合代数和 σ-代数

定义 1.1.1 设 Ω 是任一非空集合,$\mathscr{A}$ 是由 Ω 的一些子集组成的非空集合类,如果 $\mathscr{A}$ 满足:

(1) $\Omega\in\mathscr{A}$;

(2) 若 $A\in\mathscr{A}$,有 $\overline{A}\in\mathscr{A}$;

(3) 若 $A,B\in\mathscr{A}$,有 $A\cup B\in\mathscr{A}$,

则称 $\mathscr{A}$ 是 Ω 上的一个集合代数,简称集代数.

定义 1.1.1 是说,Ω 上的一个集合代数是包含 Ω 且对余运算和有限并运算封闭的 Ω 的集合类.

容易证明集合代数对有限集合运算封闭,这就是下面的定理.

定理 1.1.1 设 $\mathscr{A}$ 是由 Ω 的一些子集组成的非空集合类,则

(1) $\mathscr{A}$ 是 Ω 上的集合代数的充要条件是 $\mathscr{A}$ 是包含 Ω 且对余运算和有限交运算封闭；

(2) $\mathscr{A}$ 是 Ω 上的集合代数的充要条件是 $\mathscr{A}$ 包含 Ω 且对差运算封闭.

证明从略.

在概率论及有关测度(度量)理论的讨论中，常常涉及集合的可列并或可列交运算，因而有必要将集代数对有限集运算的封闭性推广到可列集运算的情况，这就需要有下面的 σ-代数的概念.

定义 1.1.2 设 Ω 是任一非空集合，$\mathscr{A}$ 是由 Ω 的一些子集组成的非空集合类，如果 $\mathscr{A}$ 满足：

(1) $\Omega\in\mathscr{A}$；

(2) 若 $A\in\mathscr{A}$，有 $\overline{A}\in\mathscr{A}$；

(3) 若 $A_k\in\mathscr{A}(k=1,2,\cdots)$，有 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathscr{A}$，

则称 $\mathscr{A}$ 是 Ω 上的一个 σ-代数.

定义 1.1.2 是说，Ω 上的一个 σ-代数是包含 Ω 且对余运算和可列并运算封闭的 Ω 的集合类.

以后谈到集代数或 σ-代数，总是指某一集合 Ω 上的集代数或 σ-代数，如果不致引起混淆，则省去“Ω 上的”，简称集代数或 σ-代数.

容易证明下面的结论.

定理 1.1.2 设 $\mathscr{A}$ 是 σ-代数，则

(1) $\mathscr{A}$ 一定是集代数；

(2) 若 $A_k\in\mathscr{A}(k=1,2,\cdots)$，有 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathscr{A}$.

证明从略.

设 Ω 是一非空集合，$\mathscr{F}_\Omega$ 是由 Ω 的一切子集组成的集合类，则 $\mathscr{F}_\Omega$ 是 σ-代数；若 $A\subset\Omega$，且 $A\neq\varnothing$，$A\neq\Omega$，则集合类 $\{A,\overline{A},\varnothing,\Omega\}$ 是一 σ-代数. 不难看出 $\{\varnothing,\Omega\}$ 也是一 σ-代数.

容易证明：集代数的交仍是集代数；σ-代数的交仍是 σ-代数.

二、包含某一集合类的最小 σ-代数

在讨论概率或者测度的扩张问题时，常常用到“包含某一集合类的最小 σ-代数”的概念.

设 $\mathscr{G}$ 是由 Ω 的一些集合组成的非空集合类，那么至少存在一个 σ-代数包含 $\mathscr{G}$. 这是显然的，因为 $\mathscr{F}_\Omega$ 是一 σ-代数，且 $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}_\Omega$. 现在的问题是：是否存在一个 σ-代数 $\mathscr{F}_0$，使得 $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}_0$，而且对于包含 $\mathscr{G}$ 的任一 σ-代数 $\mathscr{A}$，都有 $\mathscr{F}_0\subset\mathscr{A}$？如果存在，是否惟一？

定理 1.1.3 设 Ω 是任一非空集合，$\mathscr{G}$ 是 Ω 的某一非空集合类，则存在惟一的 σ-代数 $\mathscr{F}_0$，使得满足：

(1) $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}_0$；

(2) 对包含 $\mathscr{G}$ 的任一 σ-代数 $\mathscr{A}$，有 $\mathscr{F}_0\subset\mathscr{A}$.

证 记 $\mathscr{F}^*=\bigcap\limits_{\mathscr{G}\subset\mathscr{A}}\mathscr{A}$ 表示所有包含 $\mathscr{G}$ 的 σ-代数作交. 由于 $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}_\Omega$，因而上述表示式是有意义的.

由于每一个 $\mathscr{A}$ 是 σ-代数，因而 $\mathscr{F}^*$ 是 σ-代数；由于每一个 $\mathscr{A}\supset\mathscr{G}$，因而 $\mathscr{G}\subset\bigcap\limits_{\mathscr{G}\subset\mathscr{A}}\mathscr{A}=\mathscr{F}^*$，所以 $\mathscr{F}^*$ 是包含 $\mathscr{G}$ 的 σ-代数.

由于 $\mathscr{F}^*$ 是所有包含 $\mathscr{G}$ 的 σ-代数的交，因而对任一包含 $\mathscr{G}$ 的 σ-代数 $\mathscr{A}$，有 $\mathscr{F}^*\subset\mathscr{A}$，即满足定理条件的 σ-代数存在且惟一，并且 $\mathscr{F}_0=\mathscr{F}^*$. ▮

定义 1.1.3　称定理 1.1.3 中的 $\mathscr{F}_0$ 是包含 $\mathscr{G}$ 的最小 σ-代数，或者是由 $\mathscr{G}$ 生成的 σ-代数，记为 $\sigma(\mathscr{G})$.

例如，设 $A\subset\Omega$，但 $A\neq\Omega,\varnothing$，则包含 $\{A\}$ 的最小 σ-代数是 $\{A,\overline{A},\varnothing,\Omega\}$.

三、Borel 域

在研究随机变量的分布时，一维实数空间 $\mathbf{R}^{(1)}$ 和 n 维实数空间 $\mathbf{R}^{(n)}$ 上的所谓 Borel 域起着重要的作用.

设 $\Omega=\mathbf{R}^{(1)}$，考虑由 $\mathbf{R}^{(1)}$ 的一些子集组成的集合类

$$\mathscr{G}=\{(-\infty,a]:a\in\mathbf{R}^{(1)}\},$$

称 $\sigma(\mathscr{G})$ 为 $\mathbf{R}^{(1)}$ 上的 Borel 域，记作 $\mathscr{B}^{(1)}$，并称 $\mathscr{B}^{(1)}$ 中的集为一维 Borel 集.

设 $\Omega=\mathbf{R}^{(n)}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\in\mathbf{R}^{(1)},i=1,2,\cdots,n\}$ 为 n 维实数空间. 考虑由 $\mathbf{R}^{(n)}$ 的一些子集组成的集合类

$$\mathscr{G}=\left\{\prod_{i=1}^{n}(-\infty,a_i]:a_i\in\mathbf{R}^{(1)},i=1,2,\cdots,n\right\},$$

称 $\sigma(\mathscr{G})$ 为 $\mathbf{R}^{(n)}$ 上的 Borel 域，记作 $\mathscr{B}^{(n)}$，并称 $\mathscr{B}^{(n)}$ 中的集为 n 维 Borel 集，其中

$$\prod_{i=1}^{n}(-\infty,a_i]=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):-\infty<x_i\leqslant a_i,i=1,2,\cdots,n\}.$$

Borel 域的概念可以推广到所谓广义实数空间 $\widetilde{\mathbf{R}}^{(1)}$ 和 $\widetilde{\mathbf{R}}^{(n)}$ 上，其中

$$\widetilde{\mathbf{R}}^{(1)}=[-\infty,+\infty],$$

$$\widetilde{\mathbf{R}}^{(n)}=\{(x_1,\cdots,x_n):x_i\in\widetilde{\mathbf{R}}^{(1)},i=1,\cdots,n\}.$$

记

$$\mathscr{G}=\{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]:\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\widetilde{\mathbf{R}}^{(n)}\},$$

其中 $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_n)$，$a_i,b_i\in\widetilde{\mathbf{R}}^{(1)}$，$i=1,\cdots,n$，$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\{(x_1,\cdots,x_n),a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,i=1,2,\cdots,n\}$，则称在 $\Omega=\widetilde{\mathbf{R}}^{(n)}$ 上的包含 $\mathscr{G}$ 的最小 σ-代数 $\sigma(\mathscr{G})$ 为 $\widetilde{\mathbf{R}}^{(n)}$ 上广义 Borel 域，记作 $\widetilde{\mathscr{B}}^{(n)}$.

四、单调类和 λ-系、π-系

在实际问题中或理论证明中，要检验一个集合类是一 σ-代数往往比较困难，把集代数与所谓单调类结合起来讨论，问题比较容易解决.

定义 1.1.4　设 $\mathscr{A}$ 是由 Ω 的一些子集组成的非空集合类，且满足：

(1) 如果 $A_n\in\mathscr{A}$，$n=1,2,\cdots$，$A_1\subset A_2\subset\cdots$（以后简单表示为 $A_n\uparrow$），则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}$；

(2) 如果 $A_n\in\mathscr{A}$，$n=1,2,\cdots$，$A_1\supset A_2\supset\cdots$（以后简单表示为 $A_n\downarrow$），则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}$，

称 $\mathscr{A}$ 是 Ω 上的一个单调类.

容易证明，单调类的交仍是单调类.

可以像证定理 1.1.3 那样证明下面的定理.

定理 1.1.4　设 Ω 是任一非空集合，$\mathscr{G}$ 是 Ω 的某一非空集合类，则存在惟一的 Ω 上的单调类 $\mathscr{M}_0$，使得满足：

(1) $\mathscr{G}\subset\mathscr{M}_0$;

(2) 对于包含 $\mathscr{G}$ 的任一单调类 $\mathscr{A}$，有 $\mathscr{M}_0\subset\mathscr{A}$.

称满足定理 1.1.4 的单调类 $\mathscr{M}_0$ 为包含 $\mathscr{G}$ 的最小单调类，记为 $\mathscr{M}(\mathscr{G})$.

重要的是下面两个定理.

定理 1.1.5　σ-代数是单调类；如果一集代数是单调类，那么它是 σ-代数.

证　定理的前一部分显然成立，只证后一部分.

因 $\mathscr{A}$ 是一集代数且是单调类，为证 $\mathscr{A}$ 是 σ-代数，只需证它对可列并是封闭的.

事实上，如果 $A_n\subset\mathscr{A}$，$n=1,2,\cdots$，若令 $B_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$，由于 $\mathscr{A}$ 是一集代数，故 $B_n\in\mathscr{A}$，$n=1,2,\cdots$，又显然有 $B_n\uparrow$，且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，而 $\mathscr{A}$ 又是一单调类，所以 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}$. ∎

定理 1.1.6　如果 $\mathscr{A}$ 是一集代数，则 $\sigma(\mathscr{A})=\mathscr{M}(\mathscr{A})$.

证　由 σ-代数一定是单调类知，$\sigma(\mathscr{A})$是一单调类. 由 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$的定义，有

$$\mathscr{M}(\mathscr{A})\subset\sigma(\mathscr{A}).$$

如果可以证明 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$是一 σ-代数，则证明即可完成.

由定理 1.1.5 知，为证 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$是一 σ-代数，只需证明 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$是一集代数. 由于 $\Omega\in\mathscr{A}\subset\mathscr{M}(\mathscr{A})$，故由定理 1.1.1 知，为证 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$是一集代数，只需证明对任意 $A,B\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$，有 $A\backslash B\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$.

对任意取定的 $A\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$，令

$$\mathscr{M}_A=\{B:B\in\mathscr{M}(\mathscr{A}),A\backslash B,B\backslash A\in\mathscr{M}(\mathscr{A})\},\tag{1.1.1}$$

若能证明对每一个 $A\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$，有 $\mathscr{M}_A=\mathscr{M}(\mathscr{A})$，则证明 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$对差运算封闭.

下面分三步证明这一事实：(Ⅰ)证 $\mathscr{M}_A$ 是单调类；(Ⅱ)证当 $A\in\mathscr{A}$ 时，$\mathscr{M}_A=\mathscr{M}(\mathscr{A})$；(Ⅲ)证当 $A\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$时，$\mathscr{M}_A=\mathscr{M}(\mathscr{A})$.

(Ⅰ) 设 A 取定. 如果$\{B_n\}\subset\mathscr{M}_A$，且 $B_n\uparrow$，则由(1.1.1)式有

$$B_n\in\mathscr{M}(\mathscr{A}),A\backslash B_n,B_n\backslash A\in\mathscr{M}(\mathscr{A}),\quad n=1,2,\cdots,$$

而且$(B_n\backslash A)\uparrow$，$(A\backslash B_n)\downarrow$. 由于 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$为单调类，又有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathscr{M}(\mathscr{A}),$$

$$A\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}(A\backslash B_n)\in\mathscr{M}(\mathscr{A}),$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\backslash A=\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n\backslash A)\in\mathscr{M}(\mathscr{A}),$$

可见

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathscr{M}_A.$$

类似可证，如果$\{B_n\}\subset\mathscr{M}_A$，且 $B_n\downarrow$，则$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathscr{M}_A$.

综上所述，证得 $\mathscr{M}_A$ 为单调类.

(Ⅱ) 若 $A\in\mathscr{A}$，则对任一 $B\in\mathscr{A}\subset\mathscr{M}(\mathscr{A})$，由 $\mathscr{A}$ 为集代数，有 $A\backslash B,B\backslash A\in\mathscr{A}\subset\mathscr{M}(\mathscr{A})$，可见 $B\in\mathscr{M}_A$，由 $B\in\mathscr{A}$ 任意，有 $\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_A$. 再由(Ⅰ)有 $\mathscr{M}(\mathscr{A})\subset\mathscr{M}_A$. 但由(1.1.1)式知 $\mathscr{M}_A\subset\mathscr{M}(\mathscr{A})$，于是完成(Ⅱ)的证明.

(Ⅲ) 对任一 $B\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$，先证 $\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_B$. 若 $A\in\mathscr{A}\subset\mathscr{M}(\mathscr{A})$，由(Ⅱ)知 $B\in\mathscr{M}_A$，因而 $B\backslash A,A\backslash B\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$，可见 $A\in\mathscr{M}_B$，即有 $\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_B$. 由(Ⅰ)知 $\mathscr{M}(\mathscr{A})\subset\mathscr{M}_B$，但由(1.1.1)式

$\mathscr{M}_B \subset \mathscr{M}(\mathscr{A})$，于是完成了（Ⅲ）的证明.▌

有时验证某集合类是包含某集代数的单调类比较困难，需要引入下面所谓的π-系、λ-系的概念.

定义 1.1.5 设$\mathscr{A}$是Ω的一个非空集合类，若$A,B\in\mathscr{A}$，有$A\cap B\in\mathscr{A}$，则称$\mathscr{A}$为π-系.

定义 1.1.6 设$\mathscr{A}$是Ω的一个非空集合类，满足：

(1) $\Omega\in\mathscr{A}$；

(2) 若$A,B\in\mathscr{A}$，$A\subset B$，有$B\backslash A\in\mathscr{A}$；

(3) 若$A_n\in\mathscr{A}$，$n=1,2,\cdots$，且$A_n\uparrow$，有$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}$，

则称$\mathscr{A}$为λ-系.

定理 1.1.7 如果$\mathscr{A}$是λ-系，则它是单调类；如果$\mathscr{A}$既是π-系又是λ-系，则它是σ-代数.

证 为证定理的第一部分，只需证明：若$A_n\in\mathscr{A}$，且$A_n\downarrow$，则$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}$. 如果$A_n\downarrow$，则由定义1.1.6中的(1)和(2)知，$\overline{A}_n\in\mathscr{A}$，$n=1,2,\cdots$，而$\overline{A}_n\uparrow$，由(3)有$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n\in\mathscr{A}$，再由(1)和(2)有$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n}\in\mathscr{A}$.

由定理的第一部分知，为证定理的第二部分，只需证明$\mathscr{A}$是一集代数. 由定义1.1.6中的(1)和(2)知，$\Omega\in\mathscr{A}$且$\mathscr{A}$对余运算封闭，又由$\mathscr{A}$是π-系知，它对有限交运算封闭，因而$\mathscr{A}$是一集代数.▌

类似定理1.1.3和定理1.1.4可以证明下面的定理.

定理 1.1.8 设$\mathscr{G}$为Ω的任一非空集合类，则存在惟一的Ω上的λ-系$\mathscr{A}_0$，使得满足：

(1) $\mathscr{G}\subset\mathscr{A}_0$；

(2) 对于包含$\mathscr{G}$的任一λ-系$\mathscr{A}$，有$\mathscr{A}_0\subset\mathscr{A}$.

称满足定理1.1.8的λ-系$\mathscr{A}_0$为包含$\mathscr{G}$的最小λ-系，记为$\lambda(\mathscr{G})$.

类似定理1.1.6，有下面的定理.

定理 1.1.9 如果$\mathscr{A}$是π-系，则$\lambda(\mathscr{A})=\sigma(\mathscr{A})$.

证 由于σ-代数一定是λ-系，因而有$\lambda(\mathscr{A})\subset\sigma(\mathscr{A})$，由定理1.1.7知，为证$\lambda(\mathscr{A})\supset\sigma(\mathscr{A})$，只需证明$\lambda(\mathscr{A})$是$\pi$-系. 为此对任意取定的$A\in\lambda(\mathscr{A})$，令

$$\lambda_A=\{B:B\in\lambda(\mathscr{A}),A\cap B\in\lambda(\mathscr{A})\},\tag{1.1.2}$$

像证定理1.1.6一样，只需证明对任意$A\in\lambda(\mathscr{A})$，有$\lambda_A=\lambda(\mathscr{A})$. 下面也分三步来证明这一事实.

（Ⅰ）证明对任意$A\in\lambda(\mathscr{A})$，λ_A是一λ-系. 由于$\Omega\in\lambda(\mathscr{A})$，且$A\cap\Omega=A\in\lambda(\mathscr{A})$，因而$\Omega\in\lambda_A$. 如果$B,C\in\lambda_A$，且$B\subset C$，由(1.1.2)式有$B,C\in\lambda(\mathscr{A})$，及$A\cap B,A\cap C\in\lambda(\mathscr{A})$，然而$A\cap B\subset A\cap C$，$\lambda(\mathscr{A})$是$\lambda$-系，有$A\cap(C\backslash B)=(A\cap C)\backslash(A\cap B)\in\lambda(\mathscr{A})$，因而$C\backslash B\in\lambda_A$. 如果$B_n\in\lambda_A$，$n=1,2,\cdots$，且$B_n\uparrow$，则$B_n\in\lambda(\mathscr{A})$，且$A\cap B_n\in\lambda(\mathscr{A})$，$n=1,2,\cdots$，而$(A\cap B_n)\uparrow$，再由$\lambda(\mathscr{A})$是$\lambda$-系，有$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\in\lambda(\mathscr{A})$，且$A\cap\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A\cap B_n)\in\lambda(\mathscr{A})$，可见$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\in\lambda_A$. 综上证得$\lambda_A$是$\lambda$-系.

（Ⅱ）证明如果$A\in\mathscr{A}$，有$\lambda_A=\lambda(\mathscr{A})$. 如果$B\in\mathscr{A}$，由于$\mathscr{A}$是$\pi$-系，有$A\cap B\in\mathscr{A}\subset\lambda(\mathscr{A})$，故有$\mathscr{A}\subset\lambda_A$，考虑到$\lambda_A$是$\lambda$-系，因而$\lambda(A)\subset\lambda_A$，再由(1.1.2)式知$\lambda(\mathscr{A})=\lambda_A$.

（Ⅲ）证明如果$A\in\lambda(\mathscr{A})$，有$\lambda(\mathscr{A})=\lambda_A$. 如果$B\in\mathscr{A}$，由（Ⅱ）知$A\in\lambda_B$，由对称性知，$B\in$

λ_A，有 $\mathscr{A}\subset\lambda_A$，再由(Ⅰ)知 $\lambda(\mathscr{A})\subset\lambda_A$，考虑到(1.1.2)式，便有 $\lambda(\mathscr{A})=\lambda_A$.∎

下面的定理有时称为集合形式的单调类定理，在验证一集合类是 σ-代数时用起来比较方便.

定理 1.1.10　设 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 是 Ω 的两个非空集合类，且 $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$.

(1) 如果 $\mathscr{A}$ 是 λ-系，$\mathscr{B}$ 是 π-系，则 $\sigma(\mathscr{B})\subset\mathscr{A}$；

(2) 如果 $\mathscr{A}$ 是单调类，$\mathscr{B}$ 是集代数，则 $\sigma(\mathscr{B})\subset\mathscr{A}$.

证　(1) 由于 $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 是 λ-系，有 $\lambda(\mathscr{B})\subset\mathscr{A}$，再由 $\mathscr{B}$ 是 π-系及定理 1.1.9，有 $\sigma(\mathscr{B})=\lambda(\mathscr{B})\subset\mathscr{A}$.

(2) 由于 $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 是单调类，有 $\mathscr{M}(\mathscr{B})\subset\mathscr{A}$，再由 $\mathscr{B}$ 是集代数及定理 1.1.6，有 $\sigma(\mathscr{B})=\mathscr{M}(\mathscr{B})\subset\mathscr{A}$.∎

在一些问题的证明中，下面所谓的"λ-系方法"是很有用的.

为证某集合类 $\mathscr{A}$ 具有某性质 λ_0，令

$$\mathscr{A}_0=\{A: A\text{ 具有性质 }\lambda_0\},$$

然后证明集合类 $\mathscr{B}_0\subset\mathscr{A}_0$，$\mathscr{A}_0$ 是 λ-系，$\mathscr{B}_0$ 是 π-系，且 $\mathscr{A}\subset\sigma(\mathscr{B}_0)\subset\mathscr{A}_0$，即证明了集合类 $\mathscr{A}$ 具有性质 λ_0.

五、乘积空间和乘积 σ-代数

1. 有限维乘积空间

本段引入另一类集合间的运算以及有关的概念.

设 Ω_1,Ω_2 为两个空间，用 ω_1,ω_2 分别表示 Ω_1,Ω_2 的元素，$A_1,B_1,\cdots$ 和 $A_2,B_2,\cdots$ 分别表示 Ω_1,Ω_2 的子集.

定义 1.1.7　设 A_1,A_2 分别是 Ω_1,Ω_2 的子集，称集合

$$\{(\omega_1,\omega_2):\omega_1\in A_1,\omega_2\in A_2\}$$

为 A_1,A_2 的乘积集，记为 $A_1\times A_2$；称 $\Omega_1\times\Omega_2$ 为乘积空间；称 $\Omega_1\times\Omega_2$ 的子集 $A_1\times A_2$ 为 $\Omega_1\times\Omega_2$ 中的矩形.

容易证明乘积集运算的下列性质.

定理 1.1.11　乘积集运算有下列性质：

(1) $A_1\times A_2=\varnothing\Leftrightarrow A_1=\varnothing$ 或 $A_2=\varnothing$；

(2) 如果 $A_1\times A_2=B_1\times B_2\Leftrightarrow A_1=B_1$ 且 $A_2=B_2$；

(3) $(A_1\times A_2)\cap(B_1\times B_2)=(A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2)$；

(4) $\overline{A_1\times A_2}=(\overline{A}_1\times A_2)\cup(A_1\times\overline{A}_2)\cup(\overline{A}_1\times\overline{A}_2)$，且右边各矩形互不相交.

证明从略.

定理 1.1.12　设 $\mathscr{A}_i$ 是 Ω_i 上的集代数，$i=1,2$，则

$$\mathscr{A}^{(2)}=\{\bigcup_{j=1}^{r}(A_1^{(j)}\times A_2^{(j)}):A_i^{(j)}\in\mathscr{A}_i,i=1,2;j=1,\cdots,r,\text{且 }A_1^{(j)}\times A_2^{(j)}\text{ 互不相交},r\geqslant 1\}$$

是 $\Omega_1\times\Omega_2$ 上的集代数.

证　由于 $\Omega_i\in\mathscr{A}_i$，$i=1,2$，所以 $\Omega_1\times\Omega_2\in\mathscr{A}^{(2)}$.

设 $\bigcup\limits_{j=1}^{r}(A_1^{(j)}\times A_2^{(j)})\in\mathscr{A}^{(2)}$，$\bigcup\limits_{k=1}^{s}(A_1^{(k)}\times A_2^{(k)})\in\mathscr{A}^{(2)}$，则由定理 1.1.11 的(3)知，有

$$\Big[\bigcup_{j=1}^{r}(A_1^{(j)}\times A_2^{(j)})\Big]\cap\Big[\bigcup_{k=1}^{s}(A_1^{(k)}\times A_2^{(k)})\Big]=\bigcup_{j=1}^{r}\bigcup_{k=1}^{s}(A_1^{(j)}\cap A_1^{(k)})\times(A_2^{(j)}\cap A_2^{(k)}),$$

又 $\mathscr{A}_i(i=1,2)$ 为集代数，上式右端的各项互不相交且 $A_i^{(j)}\cap A_i^{(k)}\in\mathscr{A}_i,i=1,2$，因而 $[\bigcup\limits_{j=1}^{r}(A_1^{(j)}\times A_2^{(j)})]\cap[\bigcup\limits_{k=1}^{s}(A_1^{(k)}\times A_2^{(k)})]\in\mathscr{A}^{(2)}$. 这就是说，$\mathscr{A}^{(2)}$ 对有限交运算封闭.

设 $\bigcup\limits_{j=1}^{r}(A_1^{(j)}\times A_2^{(j)})\in\mathscr{A}^{(2)}$，则由定理 1.1.11 的(4)，有

$$\overline{\{\bigcup_{j=1}^{r}(A_1^{(j)}\times A_2^{(j)})\}}=\bigcap_{j=1}^{r}\overline{(A_1^{(j)}\times A_2^{(j)})}$$
$$=\bigcap_{j=1}^{r}[(\overline{A}_1^{(j)}\times A_2^{(j)})\cup(A_1^{(j)}\times\overline{A}_2^{(j)})\cup(\overline{A}_1^{(j)}\times\overline{A}_2^{(j)})].$$

由于 $\mathscr{A}_i(i=1,2)$ 为集代数，上式右端交式中的各项均为 $\mathscr{A}^{(2)}$ 的元素，再由 $\mathscr{A}^{(2)}$ 对有限交运算封闭，可见 $\overline{\bigcup\limits_{j=1}^{r}(A_1^{(j)}\times A_2^{(j)})}\in\mathscr{A}^{(2)}$，即 $\mathscr{A}^{(2)}$ 对余运算封闭.

综上所述，证得 $\mathscr{A}^{(2)}$ 为集代数.▮

由于 σ-代数一定是集代数，下面的推论显然成立.

推论　设 $\mathscr{F}_i$ 是 Ω 上的 σ-代数，$i=1,2$，则

$$\mathscr{C}^{(2)}=\{\bigcup_{j=1}^{r}(A_1^{(j)}\times A_2^{(j)}):A_i^{(j)}\in\mathscr{F}_i,i=1,2;j=1,\cdots,r,\text{且 }A_1^{(j)}\times A_2^{(j)}\text{ 互不相交},r\geqslant1\}$$

是 $\Omega_1\times\Omega_2$ 上的集代数.

定义 1.1.8　设 $\mathscr{F}_i$ 是 Ω_i 上的 σ-代数，$i=1,2$，称 $\Omega_1\times\Omega_2$ 上的包含集合类

$$\mathscr{D}^{(2)}=\{A_1\times A_2:A_i\in\mathscr{F}_i,i=1,2\}$$

的最小 σ-代数 $\sigma(\mathscr{D}^{(2)})$ 为 $\mathscr{F}_1$ 与 $\mathscr{F}_2$ 的乘积 σ-代数，记为 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$.

由于 $\mathscr{D}^{(2)}\subset\mathscr{C}^{(2)}$，有 $\sigma(\mathscr{D}^{(2)})\subset\sigma(\mathscr{C}^{(2)})$；又由 $\sigma(\mathscr{D}^{(2)})\supset\mathscr{C}^{(2)}$，可见 $\sigma(\mathscr{D}^{(2)})\supset\sigma(\mathscr{C}^{(2)})$，所以有 $\sigma(\mathscr{C}^{(2)})=\sigma(\mathscr{D}^{(2)})=\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$.

例 1.1.1　如果 $\Omega_1=\Omega_2=\mathbf{R}^{(1)}$，$\mathscr{F}_1=\mathscr{F}_2=\mathscr{B}^{(1)}$，则二维实数空间 $\mathbf{R}^{(2)}=\mathbf{R}^{(1)}\times\mathbf{R}^{(1)}$，二维 Borel 域 $\mathscr{B}^{(2)}=\mathscr{B}^{(1)}\times\mathscr{B}^{(1)}$.

事实上，一方面由于

$\mathscr{G}=\{(-\infty,a_1]\times(-\infty,a_2]:a_i\in\mathbf{R}^{(1)},i=1,2\}\subset\mathscr{D}^{(2)}=\{A_1\times A_2:A_i\in\mathscr{B}^{(1)},i=1,2\}$，

因此 $\sigma(\mathscr{G})=\mathscr{B}^{(2)}\subset\mathscr{B}^{(1)}\times\mathscr{B}^{(1)}$.

另一方面，对任意取定的 $a_2\in\mathbf{R}^{(1)}$，令

$$\mathscr{A}_1=\{A_1:A_1\times(-\infty,a_2]\in\mathscr{B}^{(2)}\},$$

则对任意的 $a_1\in\mathbf{R}^{(1)}$，$(-\infty,a_1]\in\mathscr{A}_1$，而且，如果 $A_1^{(1)}\in\mathscr{A}_1,A_1^{(2)}\in\mathscr{A}_1,\cdots$，则有

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_1^{(n)}\right)\times(-\infty,a_2]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1^{(n)}\times(-\infty,a_2])\in\mathscr{B}^{(2)},$$

即有 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_1^{(n)}\in\mathscr{A}_1$，并由此可见 $\mathbf{R}^{(1)}\in\mathscr{A}_1$. 此外，如果 $A_1\in\mathscr{A}_1$，则

$$\overline{A}_1\times(-\infty,a_2]=(-\infty,+\infty)\times(-\infty,a_2]\backslash A_1\times(-\infty,a_2]\in\mathscr{B}^{(2)},$$

于是 $\mathscr{A}_1$ 是包含一切形如 $(-\infty,a_2]$ 集合的 σ-代数，因此 $\mathscr{B}^{(1)}\subset\mathscr{A}_1$，而且

$$\{A_1\times(-\infty,a_2]:A_1\in\mathscr{B}^{(1)},a_2\in\mathbf{R}^{(1)}\}\subset\mathscr{B}^{(2)}.$$

由上式，对任意取定的 $A_1\in\mathscr{B}^{(1)}$，令

$$\mathscr{A}_2=\{A_2:A_1\times A_2\in\mathscr{B}^{(2)},A_2\in\mathscr{B}^{(1)}\},$$

可以证明 $\mathscr{B}^{(1)}\subset\mathscr{A}_2$，从而证得 $\mathscr{B}^{(1)}\times\mathscr{B}^{(1)}\subset\mathscr{B}^{(2)}$.

综上所述，可得 $\mathscr{B}^{(1)}\times\mathscr{B}^{(1)}=\mathscr{B}^{(2)}$.▮

上面的叙述可以推广到任意有限维的情况. 设 $\Omega_i, i=1,\cdots,n$ 是 n 个空间, ω_i 是 $\Omega_i(i=1,\cdots,n)$的元素, A_i 是 $\Omega_i(i=1,\cdots,n)$的子集,称集合

$$\{(\omega_1,\cdots,\omega_n):\omega_i \in A_i, i=1,\cdots,n\}$$

为集合 $A_1,\cdots,A_n$ 的乘积集,记为 $A_1\times\cdots\times A_n$,或者 $\prod_{i=1}^n A_i$,也称 $\prod_{i=1}^n A_i$ 为 $\prod_{i=1}^n \Omega_i$ 中的矩形. 定理 1.1.12 及其推论很容易推广到 n 维的情况.

定理 1.1.13 设 $\mathscr{F}_i$ 是 Ω_i 上的 σ-代数, $i=1,\cdots,n$,则

$$\mathscr{C}^{(n)}=\left\{\bigcup_{j=1}^r\left[\prod_{i=1}^n A_i^{(j)}\right]:A_i^{(j)}\in\mathscr{A}_i, i=1,\cdots,n; j=1,\cdots,r,\text{且}\prod_{i=1}^n A_i^{(j)}\text{互不相交}, r\geqslant 1\right\}$$

是 $\prod_{i=1}^n \Omega_i$ 上的集代数.

类似有下面的定义.

定义 1.1.9 设 $\mathscr{F}_i$ 是 Ω_i 上的 σ-代数, $i=1,\cdots,n$,称 $\prod_{i=1}^n \Omega_i$ 上的包含集合类

$$\mathscr{D}^{(n)}=\left\{\prod_{i=1}^n A_i:A_i\in\mathscr{F}_i, i=1,\cdots,n\right\}$$

的最小 σ-代数 $\sigma(\mathscr{D}^{(n)})$ 为 $\mathscr{F}_1,\cdots,\mathscr{F}_n$ 的乘积 σ-代数,记为 $\mathscr{F}_1\times\cdots\times\mathscr{F}_n$,或者 $\prod_{i=1}^n \mathscr{F}_i$.

类似上例,可以得到 $\mathscr{B}^{(n)}=\underbrace{\mathscr{B}^{(1)}\times\cdots\times\mathscr{B}^{(1)}}_{n\text{个}}$,同样可有 $\widetilde{\mathscr{B}}^{(n)}=\underbrace{\widetilde{\mathscr{B}}^{(1)}\times\cdots\times\widetilde{\mathscr{B}}^{(1)}}_{n\text{个}}$.

2. 无穷维乘积空间

借助上面构造的有限维乘积 σ-代数,可以构造无穷维乘积 σ-代数.

设 T 为任意给定的包含无穷多个元素的参数集. 通常取 $T=\{1,2,\cdots\}$, $T=(a,b)$,或 $T=[a,b]$,其中 $a,b\in\mathbf{R}^{(1)}$或 $\widetilde{\mathbf{R}}^{(1)}$.

已给参数集 T,对每一 $t\in T$, Ω_t 是一非空集合, $\mathscr{A}_t$ 是 Ω_t 上的 σ-代数.

首先定义 $\Omega_t, t\in T$ 的乘积空间为

$$\prod_{t\in T}\Omega_t=\{\omega_T:\omega_T=(\omega(t),t\in T),\omega(t)\in\Omega_t,t\in T\},\tag{1.1.3}$$

其中 $\omega_T=(\omega(t),t\in T)$可以看成指标集为 T 的无穷维向量,当指标 $t\in T$ 时,相应的分量 $\omega(t)$ 在Ω_t中取值, ω_T 也可以看成定义域为 T 的抽象函数,当 $t\in T$ 时,函数值 $\omega(t)\in\Omega_t$.

利用有限维的结果,分下面三步来定义 $\mathscr{A}_t, t\in T$ 的乘积 σ-代数.

(1) 对任意取定的有限集 $T_n=\{t_1,\cdots,t_n\}\subset T$, $B^{T_n}\in\mathscr{A}_{t_1}\times\cdots\times\mathscr{A}_{t_n}$,称集合

$$C^{T_n}(B^{T_n})\triangleq\{\omega_T:(\omega(t_1),\cdots,\omega(t_n))\in B^{T_n}\}\tag{1.1.4}$$

为 $\prod_{t\in T}\Omega_t$ 中的以 B^{T_n}为底的柱集. $C^{T_n}(B^{T_n})$也可以表为

$$C^{T_n}(B^{T_n})=B^{T_n}\times\prod_{t\in T\setminus T_n}\Omega_t.$$

若 B^{T_n}在 $\prod_{j=1}^n\mathscr{A}_{t_j}$中任取时,得一集合类

$$\mathscr{C}^{T_n}=\left\{C^{T_n}(B^{T_n}):B^{T_n}\in\prod_{j=1}^n\mathscr{A}_{t_j}\right\},\tag{1.1.5}$$

可以证明 $\mathscr{C}^{T_n}$为 $\prod_{t\in T}\Omega_t$ 上的 σ-代数.

(2) 当 $n\geqslant 1$ 时，任取 $T_n\subset T$，任取 $B^{T_n}\in\prod_{j=1}^{n}\mathscr{A}_{t_j}$，可得一切柱集构成的集合类

$$\mathscr{C}^{(T)}=\left\{C^{T_n}(B^{T_n}):T_n\subset T,B^{T_n}\in\prod_{j=1}^{n}\mathscr{A}_{t_j},n\geqslant 1\right\},\tag{1.1.6}$$

可以证明 $\mathscr{C}^{(T)}$ 为 $\prod_{t\in T}\Omega_t$ 上的集代数.

(3) 称 $\prod_{t\in T}\Omega_t$ 上包含 $\mathscr{C}^{(T)}$ 的最小 σ-代数为 $\mathscr{A}_t,t\in T$ 的乘积 σ-代数，记为 $\prod_{t\in T}\mathscr{A}_t$，即

$$\prod_{t\in T}\mathscr{A}_t=\sigma(\mathscr{C}^{(T)}).$$

作为例子，构造无穷维 Borel 域.

设 T 为已给参数集，取 $\Omega_t=\mathbf{R}^{(1)}$，$\mathscr{A}_t=\mathscr{B}^{(1)}$，$t\in T$. 这里(1.1.3)式中的 $(\omega(t),t\in T)$ 化为定义域为 T，取值于 $\mathbf{R}^{(1)}$ 的实函数，记为 $x(t),t\in T$，并记 $\prod_{t\in T}\Omega_t$ 为 $\mathbf{R}^{(T)}$，于是(1.1.3)式化为

$$\mathbf{R}^{(T)}=\{x(t):t\in T,x(t)\in\mathbf{R}^{(1)}\}.$$

对任意的有限集 $T_n=\{t_1,\cdots,t_n\}\subset T$，$B^{T_n}=B^n\in\mathscr{B}^{(n)}$，(1.1.4)式化为

$$C^{T_n}(B^n)=\{x(t):(x(t_1),\cdots x(t_n))\in B^n\}$$

为 $\mathbf{R}^{(T)}$ 中以 B^n 为底的柱集，(1.1.5)式化为

$$\mathscr{C}^{T_n}=\{C^{T_n}(B^n):B^n\in\mathscr{B}^{(n)}\},\tag{1.1.7}$$

它是 $\mathbf{R}^{(T)}$ 上的 σ-代数. (1.1.6)式化为

$$\mathscr{C}^{(T)}=\{C^{T_n}(B^n):T_n\in T,B^n\in\mathscr{B}^{(n)},n\geqslant 1\},\tag{1.1.8}$$

它是 $\mathbf{R}^{(T)}$ 上的集代数，于是定义参数集为 T 的无穷维实数空间 $\mathbf{R}^{(T)}$ 上的 Borel 域为 $\sigma(\mathscr{C}^{(T)})$，记为 $\mathscr{B}^{(T)}$，即 $\mathbf{R}^{(T)}$ 上的 Borel 域为

$$\mathscr{B}^{(T)}=\sigma(\mathscr{C}^{(T)}).$$

这部分内容与后面的"无穷维 Borel 域上的测度"部分的内容，主要与随机过程的分布有关. 在证明随机过程的 Kolmagorov 存在定理时，还用到 $\mathbf{R}^{(T)}$ 上的另一集合类，这里顺便给出，以便查阅.

对任意的 $T_n=\{t_1,\cdots,t_n\}\subset T$，任意的 $\boldsymbol{a}^{(n)}=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^{(n)}$，记

$$W^{T_n}(\boldsymbol{a}^{(n)})=\{x(t):x(t_1)\leqslant a_1,\cdots,x(t_n)\leqslant a_n\}.$$

当某一 $a_j=+\infty$ 时，相应的不等式改为 $x(t_j)<a_j$. 当 $n\geqslant 1,T_n\subset T,\boldsymbol{a}^{(n)}\in\mathbf{R}^{(n)}$ 变动时，得到一族 $W^{T_n}(\boldsymbol{a}^{(n)})$，记它们构成的集合类为 $W^{(T)}$，即

$$W^{(T)}=\{W^{T_n}(\boldsymbol{a}^{(n)}):T_n\subset T,\boldsymbol{a}^{(n)}\in\mathbf{R}^{(n)},n\geqslant 1\}.$$

可以证明，在 $\mathbf{R}^{(T)}$ 上，$\sigma(W^{(T)})=\mathscr{B}^{(T)}$.

第二节　测度与概率

一、测度及其性质

为了介绍概率空间的概念，先介绍关于集函数、广义测度和测度的概念.

定义 1.2.1　设 $\mathscr{G}$ 是 Ω 上的非空集合类. 若对每一个 $A\in\mathscr{G}$，有一实数或者 $\pm\infty$ 之一与之对应(为确定起见，下面假定只取 $+\infty$)，记为 $\varphi(A)$，且至少有一 $A\in\mathscr{G}$，使 $\varphi(A)$ 取有限值，称 $\varphi(A)$ 为定义在 $\mathscr{G}$ 上的集函数，有时也记为 $\varphi(\cdot)$ 或 φ.

(1) 若对任意的正整数 n 及任意 $A_i\in\mathscr{G},i=1,2,\cdots,n,A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{G}$，有

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(A_i),$$

则称 φ 在 $\mathscr{G}$ 上具有有限可加性，也称 φ 为 $\mathscr{G}$ 上的有限可加集函数.

(2) 若对可列多个集 $A_i\in\mathscr{G},i=1,2,\cdots,A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{G}$，有

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(A_i),$$

则称 φ 在 $\mathscr{G}$ 上具有 σ-可加性或完全可加性，也称 φ 为 $\mathscr{G}$ 上的 σ-可加集函数或广义测度.

(3) 若对每一 $A\in\mathscr{G}$，$\varphi(A)$ 都取有限值，则称 φ 为 $\mathscr{G}$ 上的有限集函数. 如果对每一 $A\in\mathscr{G}$，存在一集合序列 $\{A_n\}\subset\mathscr{G}$，使

$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\ \varphi(A_n)<+\infty,n=1,2,\cdots$$

则称 φ 为 $\mathscr{G}$ 上的 σ-有限集函数.

(4) 若集函数为有限可加且只取非负值，则称为有限可加测度. 若集函数为 σ-可加，且只取非负值，则称为测度，用 μ 或 ν 表示. 具有性质 $\Omega\in\mathscr{G}$ 且 $\nu(\Omega)=1$ 的测度，称为概率测度或简称概率，一般用 P 表示.

通常取 $\mathscr{G}$ 为集代数或 σ-代数.

下面讨论集函数与测度的性质.

定理 1.2.1 设 φ 是 $\mathscr{G}$ 上的集函数.

(1) 若 φ 是有限可加或 σ-可加的，且 $\varnothing\in\mathscr{G}$，则 $\varphi(\varnothing)=0$；

(2) 若 φ 是 σ-可加的，且 $\varnothing\in\mathscr{G}$，则 φ 是有限可加的；

(3) 若 $\mathscr{G}$ 为集代数，φ 是有限可加的或 σ-可加的，$A\in\mathscr{G},B\in\mathscr{G}$，且 $A\subset B$，则

$$\varphi(B)=\varphi(A)+\varphi(B\backslash A);$$

若 $\varphi(A)<+\infty$，则

$$\varphi(B\backslash A)=\varphi(B)-\varphi(A)\text{(可减性)};$$

若 φ 是测度，则

$$\varphi(A)\leqslant\varphi(B)\text{(不降性)};$$

(4) 若 $\mathscr{G}$ 是集代数，φ 是有限可加测度，$A_i\in\mathscr{G},i=1,2,\cdots,n,A\in\mathscr{G},A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，则

$$\varphi(A)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\varphi(A_i);$$

(5) 若 $\mathscr{G}$ 是集代数，φ 是测度，$A_i\in\mathscr{G},i=1,2,\cdots,A\in\mathscr{A},A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{G}$，则

$$\varphi(A)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(A_i).$$

证 (1) 若 φ 是有限可加集函数，且 $\varnothing\in\mathscr{G}$，存在 $A\in\mathscr{G},\varphi(A)<+\infty$，于是有

$$\varphi(A)=\varphi(A\cup\varnothing)=\varphi(A)+\varphi(\varnothing),$$

所以 $\varphi(\varnothing)=0$.

若 φ 是 σ-可加集函数，且 $\varnothing\in\mathscr{G}$，由于存在 $A\in\mathscr{G},\varphi(A)<+\infty$，取 $A_1=A,A_n=\varnothing,n=2,3,\cdots$，于是有

$$\varphi(A)=\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\varphi(A)+\varphi(\varnothing)+\varphi(\varnothing)+\cdots,$$

所以 $\varphi(\varnothing)=0$.

(2) 设 $A_i\in\mathscr{G},i=1,2,\cdots,n,A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$,且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{G}$,取 $A_i=\varnothing,i=n+1,n+2,\cdots$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{G}$,且 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$,由 σ-可加性及(1),有

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(A_i)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(A_i).$$

(3) 由有限可加性得

$$\varphi(B)=\varphi(A)+\varphi(B\backslash A),$$

由 $\varphi(A)$有限得

$$\varphi(B\backslash A)=\varphi(B)-\varphi(A),$$

由 φ 是测度知 $\varphi(B\backslash A)\geqslant 0$,所以 $\varphi(A)\leqslant\varphi(B)$.

(4) 令 $A_i'=A_i\cap A\in\mathscr{G},i=1,\cdots,n$,则 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i'$. 再令 $A_1''=A_1',A_i''=A_i'\backslash\bigcup\limits_{j=1}^{i-1}A_j',i=2,\cdots,n$,则 $A_i''\in\mathscr{G},i=1,\cdots,n,A_i''$ 互不相交,且 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i'=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i''$,由(3)及 $A_i''\subset A_i'\subset A_i$,有

$$\varphi(A)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(A_i'')\leqslant\sum_{i=1}^{n}\varphi(A_i).$$

(5)的证明与(4)类似,故从略.∎

(4)和(5)称为半可加性或次可加性.

推论 设 ν 是集代数 $\mathscr{A}$ 上的测度,则定理 1.2.1 中(1)、(2)、(3)和(4)均成立.

定义 1.2.2 设 φ 是定义在集合类 $\mathscr{G}$ 上的集函数,若对 $\mathscr{G}$ 中任意满足条件 $A_n\uparrow$,且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A\in\mathscr{G}$ 的集序列$\{A_n\}$,都有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(A_n)=\varphi(A),$$

则称 φ 在 A 处下连续. 若 φ 在 $\mathscr{G}$ 中的每一 A 处下连续,则称 φ 在 $\mathscr{G}$ 上下连续. 若对 $\mathscr{G}$ 中任意满足条件 $A_n\downarrow$,$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A\in\mathscr{G}$,且至少有一 m 使 $\varphi(A_m)<+\infty$的集序列$\{A_n\}$,都有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(A_n)=\varphi(A),$$

则称 φ 在 A 处上连续. 若 φ 在 $\mathscr{G}$ 中的每一 A 处上连续,则称 φ 在 $\mathscr{G}$ 上上连续.

若 φ 在 A 处既下连续又上连续,则称 φ 在 A 处连续. 若 φ 在 $\mathscr{G}$ 中每一 A 处连续,则称 φ 在 $\mathscr{G}$ 上连续.

下面两个定理说明完全可加性与连续性的关系.

定理 1.2.2 设 φ 是集代数 $\mathscr{A}$ 上的 σ-可加集函数(或测度),则 φ 有限可加且连续.

证 由定理 1.2.1 知 φ 是有限可加的,下面证明 φ 是连续的.

(1) 设$\{A_n\}\subset\mathscr{A},A_n\uparrow$,且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}$. 若存在 m 使 $\varphi(A_m)=+\infty$,则由定理 1.2.1 知

$$\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=+\infty=\lim_{n\to\infty}\varphi(A_n).$$

若对一切 $n,\varphi(A_n)$有限,则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A_1\cup\left[\bigcup_{n=2}^{\infty}(A_n-A_{n-1})\right],$$