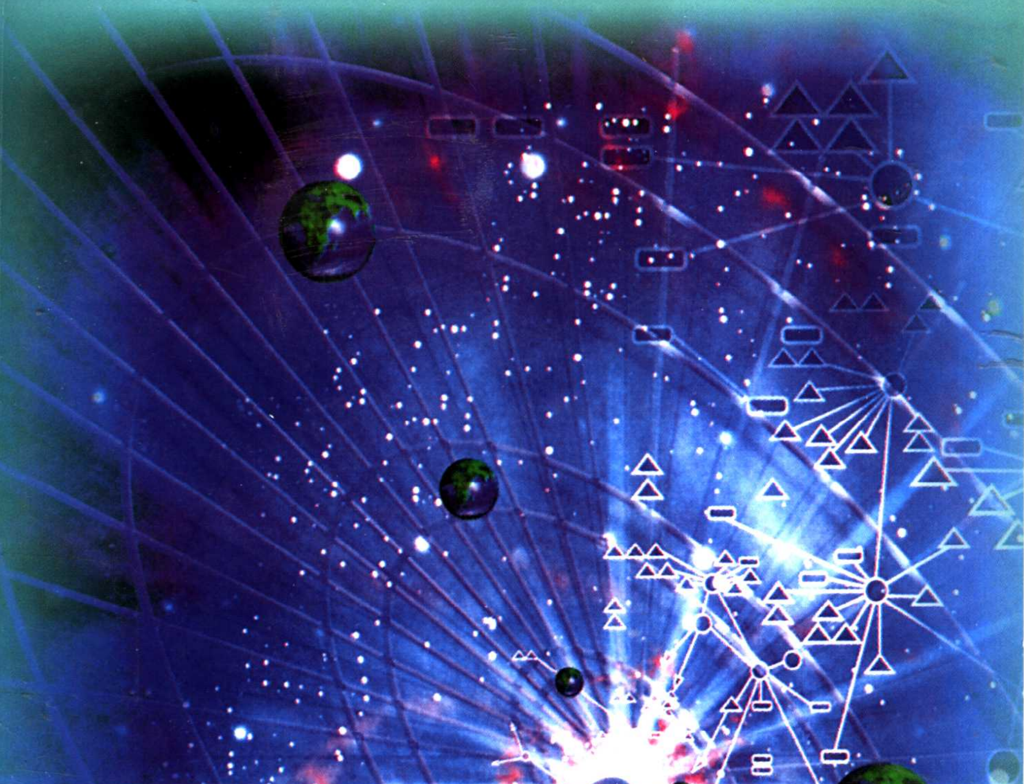
特殊函数

TESHU HANSHU

（第二版）

刘式适 刘式达 编著



气象出版社

特 殊 函 数

（第二版）

刘式适　刘式达　编著

气象出版社

内 容 简 介

本书共12章，系统地讨论了Legendre函数、Tschebyscheff函数、Hermite函数、Bessel函数、超比函数及合流超比函数、Laguerre函数、超球函数、椭圆函数和Mathieu函数等特殊函数，同时简述了与特殊函数密切相关的一些基本概念和理论. 各章配有例题和习题.

本书可供物理学、力学、应用数学、大气科学和海洋学科技工作者和高等院校师生参考.

图书在版编目(CIP)数据

特殊函数/刘式适，刘式达编著. —2版. —北京：气象出版社，2002.3

ISBN 7-5029-0106-X/O·0004

Ⅰ.特… Ⅱ.①刘… ②刘 Ⅲ.特殊函数-高等学校-教材 Ⅳ.O174.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第001643号

特 殊 函 数

(第二版)

刘式适 刘式达 编著

责任编辑：黄丽荣 终审：周诗健

封面设计：李 平 责任技编：刘祥玉 责任校对：李 军

气象出版社出版发行

(北京市海淀区中关村南大街46号 邮编：100081 电话：68406961)

北京市白河印刷厂印刷 全国各地新华书店经销

* * *

开本：850×1168 1/32 印张：23.625 字数：612千字

2002年3月第二版 2002年3月第一次印刷

印数：1～3000 **定价：42.00元**

ISBN 7-5029-0106-X/O·0004

第二版前言

北京大学给研究生讲授了20多年的"特殊函数"课程.研究生和自学者反映,这本教科书便于学习也较实用,内容丰富也便于查找,不少读者认为从这本书的学习中获得了广泛的特殊函数的知识,而且认为特殊函数不难学也有兴趣.

由于作者的疏忽和公式多,在第一版中出现了一些错误,而且现在市场上已买不到这本书,很多读者设法买旧书或复印.经作者与气象出版社第二编辑室黄丽荣主任商量,将第一版书中的错误更正,出版第二版.

随着我国经济的蓬勃发展和科技教育事业的飞跃进步,我们相信,这本书的再版必将满足读者的需要,也会激励作者所从事的教学科研工作.

在本书再版之际,作者再一次深深感谢北京大学的许多老师的教诲,特别是曾经从事过特殊函数教学的郭敦仁教授和高崇寿教授.作者在此也对气象出版社和黄丽荣女士的大力协助和支持表示由衷的谢意.

作者　刘式适　刘式达
于北京大学物理学院
2002年1月

前　言

多年的学习和工作使我们体会到：特殊函数不仅是理论物理学工作者所必须的，也是力学、应用数学、大气科学和海洋学以及工程技术工作者研究广泛的问题所不可缺少的.

本书的目的是让具有一般数学分析和微分方程知识的读者能比较容易地理解和掌握常用的特殊函数并对它发生兴趣.因而，我们采用了不同于一般特殊函数专著中的系统，主要是从常微分方程的级数解中引入特殊函数，从常微分方程的本征值问题的求解中选入常用的特殊函数，最后引入椭圆函数和 Mathieu 函数，并把 Jacobi 椭圆函数和非线性微分方程的解联系起来.

考虑到特殊函数的固有特性，本书从第四章起较系统地介绍各种特殊函数；又考虑到特殊函数来源于物理学，且在物理等学科中有广泛的应用，所以在部分章节中加进了一些特殊函数的应用实例.特别是，作者搜集到一些地球流体力学(包括动力气象学和动力海洋学)的应用例子，结合特殊函数学习也加了进去，这些对有关读者也有参考作用.

全书共分十二章.另外为了读者学习方便起见，我们简单地写了一段预备知识，作为学习本书的先行知识.

第一章介绍大部分特殊函数所遇到的常微分方程，并讨论级数解法，从而引进大部分特殊函数.在级数解法中，从级数系数的递推关系我们还可发现本征值.

第二章介绍三个正则奇点的 Fuchs 型方程的普遍特征，并引进 Riemann P 符号及其变换，从而化任意三个正则奇点的 Fuchs 型方程为超比方程求解.本章还引进超比方程的 24 个解式.

第三章介绍常微分方程的本征值问题，重点是在第一章的基础上选入常用的特殊函数，并讨论本征值问题的一些普遍规律.

第四章到第十章分别介绍 Legendre 函数(球函数，其中还阐

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

述旋转椭球波函数和 Hough 函数),Tschebyscheff 函数,Hermite 函数,Bessel 函数,超比函数和合流超比函数(其中包含 Whittaker 函数),Laguerre 函数(包括 Sonine 多项式,Laguerre 多项式和连带 Laguerre 多项式),超球函数(包括 Jacobi 多项式,超球多项式和 Gegenbauer 多项式).

第十一章从椭圆积分出发引进椭圆函数,其中重点论述 Jacobi 椭圆函数,并把它与非线性微分方程的解联系起来.

第十二章介绍 Mathieu 函数.

书后还列举了主要的参考书目,以供读者学习参考.其中,王竹溪教授(已故)和郭敦仁教授合著的《特殊函数概论》一书是迄今我国仅有的特殊函数专著,这对本书的编写有极大的帮助.

中国科学院大气物理研究所曾庆存研究员,兰州大学丑纪范教授在本书的编写过程中给予了热情的支持,在此表示衷心的感谢.

本书概括了我们多年从事该课程教学的内容.由于内容较多,编写时间较短,加之水平有限,难免有错误和不当之处,希望读者给以指正.

作者　刘式适　刘式达
于北京大学
1986 年 4 月

目　录

第二版前言

前言

预备知识 …………………………………………………… (1)

§1　幂级数(Maclaurin-Taylor 级数) ……………………… (1)

§2　级数的收敛性 ………………………………………… (3)

§3　二阶齐次线性常微分方程 …………………………… (5)

§4　Γ 函数(第二类 Euler 积分) ………………………… (8)

§5　B 函数(第一类 Euler 积分) ………………………… (10)

§6　Cauchy 积分公式 …………………………………… (11)

第一章　常微分方程的幂级数解法和特殊函数的引入 …… (12)

§1　方程的常点与奇点 …………………………………… (12)

§2　Frobenius-Fuchs 定理 ……………………………… (16)

§3　常点邻域内方程的幂级数解 ………………………… (21)

§4　正则奇点邻域内方程的正则解 ……………………… (50)

§5　非正则奇点邻域的正则形式解 ……………………… (94)

§6　特殊函数的分类 ……………………………………… (96)

习题 …………………………………………………… (97)

第二章　Fuchs 型方程和 Riemann P 符号及其变换 ……… (102)

§1　Fuchs 型方程 ……………………………………… (102)

§2　Riemann P 符号及其变换 ………………………… (113)

§3　超比方程的其他解用超比函数表示 ……………… (125)

§4　广义超比函数 ……………………………………… (132)

§5　两个自变量的超比函数——Appell 函数 ………… (134)

§6　级数求和变量的代换 ……………………………… (136)

习题 …………………………………………………… (138)

第三章　常微分方程的本征值问题 ………………………… (143)

§1 问题的提出与本征值问题的概念 …………………… (143)
§2 一般带参数λ的方程化为S-L型 …………………… (145)
§3 S-L型方程常用的几个条件 …………………… (157)
§4 S-L型方程本征值问题的基本定理 …………………… (159)
§5 S-L型方程本征值问题的自伴性 …………………… (167)
§6 S-L型方程本征值问题的求解 …………………… (170)
习题 …………………… (222)
第四章 Legendre函数(球函数) …………………… (224)
§1 Legendre多项式 …………………… (224)
§2 连带Legendre函数 …………………… (253)
§3 球谐函数 …………………… (272)
§4 旋转椭球波函数 …………………… (282)
§5 Hough函数 …………………… (287)
习题 …………………… (298)
第五章 Tschebyscheff函数 …………………… (304)
§1 Tschebyscheff多项式 …………………… (304)
§2 第二类Tschebyscheff函数 …………………… (320)
§3 第二类Tschebyscheff多项式 …………………… (332)
习题 …………………… (345)
第六章 Hermite函数 …………………… (348)
§1 Hermite多项式 …………………… (348)
§2 Weber-Hermite函数 …………………… (367)
§3 Weber函数(抛物线柱函数) …………………… (372)
习题 …………………… (382)
第七章 Bessel函数(柱函数) …………………… (386)
§1 Bessel函数 …………………… (386)
§2 变型Bessel函数 …………………… (427)
§3 球Bessel函数 …………………… (442)
§4 柱函数的应用 …………………… (461)

习题 …… (477)

第八章 超比函数和合流超比函数 …… (485)

§1 超比(超几何)函数(Gauss 函数) …… (485)

§2 合流超比(超几何)函数(Kummer 函数) …… (510)

§3 Whittaker 函数 …… (524)

§4 应用 …… (532)

习题 …… (535)

第九章 Laguerre 函数 …… (541)

§1 Sonine 多项式(广义 Laguerre 多项式) …… (541)

§2 Laguerre 多项式 …… (553)

§3 连带 Laguerre 多项式 …… (558)

习题 …… (567)

第十章 超球函数 …… (571)

§1 超比多项式和 Jacobi 多项式 …… (571)

§2 广义超球多项式和超球多项式 …… (587)

§3 Gegenbauer 多项式 …… (598)

习题 …… (615)

第十一章 椭圆函数 …… (620)

§1 椭圆积分 …… (620)

§2 Jacobi 椭圆函数 …… (651)

§3 Weierstrass 椭圆函数 …… (703)

习题 …… (706)

第十二章 Mathieu 函数 …… (716)

§1 Mathieu 方程 …… (716)

§2 基本解 …… (717)

§3 Floquet 解 …… (721)

§4 周期解——本征值问题 …… (724)

§5 Mathieu 函数 …… (727)

§6 $\lambda(q)$,$A(q)$和 $B(q)$的确定 …… (730)

§ 7 稳定解与不稳定解 …………………………………… (736)
§ 8 $\lambda \gg q > 0$ 时 Mathieu 方程的近似解 …………… (737)
§ 9 变型 Mathieu 方程 …………………………………… (739)
§ 10 Hill 方程 …………………………………………… (740)
习题 ………………………………………………………… (741)
参考书目 ……………………………………………………… (743)
附录 本书主要数学家、物理学家译名表 …………………… (744)

预 备 知 识

§1 幂级数(Maclaurin-Taylor 级数)

若函数 $f(x)$ 在以 a 为圆心的圆 C 内解析,则对于圆内任一点 x,$f(x)$ 的 Taylor 级数为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \tag{0.1}$$

其中

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-a)^{k+1}}\mathrm{d}t=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{0.2}$$

C 的正向为逆时针方向.若级数(0.1)式在圆 $|x-a|<R$ 内收敛,则 R 称为该级数的收敛半径.

特别,$a=0$,级数(0.1)式转化为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{0.3}$$

其中

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_C^{(0+)} \frac{f(t)}{t^{k+1}}\mathrm{d}t=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{0.4}$$

这里,符号(0+)表示 C 为正向绕 $t=0$ 一周的围道.(0.3)式就是 $f(x)$ 的 Maclaurin 级数.

常用的 Maclaurin 级数有

$$1.\ (1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\alpha]_k}{k!}x^k\quad (|x|<1) \tag{0.5}$$

其中

$$[\alpha]_k=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1),\ [\alpha]_0=1 \tag{0.6}$$

例如

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\cdots \tag{0.7}$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\cdots \tag{0.8}$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6-\cdots \tag{0.9}$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\cdots \tag{0.10}$$

2. $$(1-x)^{-\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!}x^k \quad (|x|<1) \tag{0.11}$$

其中

$$(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1),\ (\alpha)_0=1 \tag{0.12}$$

例如

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\cdots \tag{0.13}$$

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\cdots \tag{0.14}$$

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4-\frac{5}{16}x^6+\cdots \tag{0.15}$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\cdots \tag{0.16}$$

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots \tag{0.17}$$

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots \tag{0.18}$$

$$(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots \tag{0.19}$$

$$(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots \tag{0.20}$$

3. $$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k \quad (|x|<\infty) \tag{0.21}$$

$$e^{-x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}x^k \quad (|x|<\infty) \tag{0.22}$$

4. $$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1}x^{k+1}\quad(-1<x\leqslant 1)\tag{0.23}$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}x^{k+1}\quad(-1\leqslant x<1)\tag{0.24}$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}\quad(|x|<1)\tag{0.25}$$

5. $$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}\quad(|x|<\infty)\tag{0.26}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k}\quad(|x|<\infty)\tag{0.27}$$

6. $$\sinh x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}\quad(|x|<\infty)\tag{0.28}$$

$$\cosh x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}x^{2k}\quad(|x|<\infty)\tag{0.29}$$

§2 级数的收敛性

1. 定义

级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+\cdots\tag{0.30}$$

的部分和为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_n\tag{0.31}$$

若

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S\tag{0.32}$$

S 为一确定的数，则称级数(0.30)式收敛，其和为 S. 否则，级数(0.30)式发散.

2. 级数收敛的必要条件

若级数(0.30)式收敛，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{0.33}$$

因此，如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$，则级数(0.30)式发散.

3. 绝对收敛

若级数 $$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = |a_1| + |a_2| + \cdots \tag{0.34}$$

收敛，则级数(0.30)式称为绝对收敛.

若级数(0.34)式收敛，则必有级数(0.30)式收敛.

级数绝对收敛的判别法：

(1) 比较判别法

① 设 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 为正项收敛级数，若 $k>K$ 后恒有

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leqslant \frac{b_{k+1}}{b_k} \tag{0.35}$$

则级数(0.30)式绝对收敛；设 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ 为正项发散级数，若 $k>K$ 后恒有

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geqslant \frac{b_{k+1}}{b_k} \tag{0.36}$$

则级数(0.34)式发散.

② 设 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 为正项级数，若

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{b_k} = l,\ l \geqslant 0 \tag{0.37}$$

则如 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛，必有级数(0.30)式绝对收敛；如 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 发散，$l\neq 0$，必有级数(0.34)式发散.

(2) 比值判别法(D'Alembert 判别法)

① 若 $k>K$ 后恒有 $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\leqslant\rho<1$,则级数(0.30)式绝对收敛;若 $k>K$ 后恒有 $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\geqslant 1$,则级数(0.30)式发散.

② 若

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=l \tag{0.38}$$

则 $l<1$ 时,级数(0.30)式绝对收敛;$l>1$ 时,级数(0.30)式发散.

(3) 根式判别法(Cauchy 判别法)

① 若 $k>K$ 后恒有 $|a_k|^{\frac{1}{k}}\leqslant\rho<1$,则级数(0.30)式绝对收敛;若 $k>K$ 后恒有 $|a_k|^{\frac{1}{k}}\geqslant 1$,则级数(0.30)式发散.

② 若

$$\lim_{k\to\infty}|a_k|^{\frac{1}{k}}=l \tag{0.39}$$

则 $l<1$ 时,级数(0.30)式绝对收敛;$l>1$ 时,级数(0.30)式发散.

(4) Gauss 判别法

若

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=1-\frac{\alpha}{k}+O(k^{-\beta}),\ \beta>1 \tag{0.40}$$

则 $\alpha>1$ 时,级数(0.30)式绝对收敛;$\alpha\leqslant 1$ 时,级数(0.30)式发散.

4. 幂级数的收敛半径公式

若幂级数(0.1)式有

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=l\quad(l\text{ 可以为}\infty) \tag{0.41}$$

则收敛半径为

$$R=\frac{1}{l} \tag{0.42}$$

§3 二阶齐次线性常微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{0.43}$$

1. 通解结构

$$y=Ay_1+By_2 \tag{0.44}$$

A,B 为二任意常数;y_1,y_2 为方程(0.43)的两个线性无关的解,它们的 Wronski 行列式

$$\mathrm{W}(y_1,y_2)\equiv\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix}\neq 0 \tag{0.45}$$

2. y_1 与 y_2 的联系——Liouville 公式

若 y_1 是方程(0.43)的一个非零解,则与 y_1 线性无关的方程(0.43)的另一个解 y_2 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)=\frac{1}{y_1^2}\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{0.46}$$

上式对 x 积分一次得

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \tag{0.47}$$

这就是 Liouville 公式,其中 $\int p(x)\,\mathrm{d}x$ 表示 $p(x)$的一个原函数.

3. 消去一阶导数项

为了消去方程(0.43)中的一阶导数项,可作变换

$$y=w\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{0.48}$$

这样,方程(0.43)可化为

$$w''+\mathrm{R}(x)w=0 \tag{0.49}$$

其中

$$\mathrm{R}(x)=q(x)-\frac{1}{2}p'(x)-\frac{1}{4}[p(x)]^2 \tag{0.50}$$

4. 常系数方程

$$y''+py'+qy=0 \quad (p,q\text{ 为常数}) \tag{0.51}$$

其特征方程为

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{0.52}$$

特征根为 λ_1,λ_2，它分为三种情况：

(1) $p^2-4q>0,\lambda_1\neq\lambda_2$，方程(0.51)的通解为

$$y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{-\lambda_2 x} \tag{0.53}$$

［例］ $y''-k^2y=0$

$$y=Ae^{kx}+Be^{-kx}$$

(2) $p^2-4\,q=0,\lambda_1=\lambda_2$，方程(0.51)的通解为

$$y=(A+Bx)e^{\lambda_1 x} \tag{0.54}$$

［例］ $y''=0$

$$y=A+Bx$$

(3) $p^2-4\,q<0,\lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\alpha-i\beta$，方程(0.51)的通解为

$$y=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x) \tag{0.55}$$

［例］ $y''+k^2y=0$

$$y=A\cos kx+B\sin kx$$

5. Euler 方程

$$x^2y''+axy'+by=0 \quad (a,b\text{ 为常数}) \tag{0.56}$$

令 $x=e^t$ $(t=\ln x)$后化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(a-1)\frac{dy}{dt}+by=0 \tag{0.57}$$

这是常系数的方程，其特征方程为

$$\rho^2+(a-1)\rho+b=0 \tag{0.58}$$

［例 1］ $x^2y''+xy'=0$

$$y=A+Bt=A+B\ln x$$

［例 2］ $x^2y''+xy'-m^2y=0$

$$y=Ae^{mt}+Be^{-mt}=Ax^m+Bx^{-m}$$

［例 3］ $x^2y''+2xy'-l(l+1)y=0$

$$y=Ae^{lt}+B^{-(l+1)t}=Ax^l+B^{-(l+1)}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com