按教育部新大纲新教材同步编写

黄金搭配

主编 马超
分册主编 范永利
撰文 丁红
翟春风

一面讲一面练

初二几何

龍門書局
www.sciencep.com

黄金搭配

一面讲一面练

初二几何

主　　编：马　超
分册主编：范永利
撰　　文：丁　红
　　　　　翟春风

龍門書局
北　京

图书在版编目(CIP)数据

黄金搭配·一面讲一面练. 初二几何/马超主编；范永利分册主编；丁红，翟春风编著. —北京：龙门书局，2003.6

ISBN　7-80160-814-3

I. 黄…　II. ①马…②范…③丁…④翟…　III. 几何课-初中-习题　IV. G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第022110号

责任编辑：吴浩源　魏　华 / 封面设计：耕者设计工作室

龍門書局　出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http: //www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地书店经销

*

2003年6月第　一　版　　开本：787×1092　1/16

2003年7月第二次印刷　　印张：10 1/4

印数：30 001—40 000　　字数：240 000

定价：15.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)


黄金搭配
一面讲
一面练

前　言

亲爱的读者，欢迎你使用《黄金搭配·一面讲一面练》新型练习册！

《黄金搭配·一面讲一面练》初中版共19册，依照教学大纲和人教社初中各科课本编写。为了便于初三各科提前进入总复习，我们增编了初中语文、英语、数学、物理和化学的总复习。为使读者用好这套练习册，下面介绍它的特点。

书名解读

“黄金”是“好”、“最优”的代名词。这套练习册在“讲”与“练”的搭配，同步性与问题分类的搭配，知识点与重难点的搭配，基础题、中等题与难题的搭配，分课讲练与单元综合讲练的搭配，师生共用的搭配等方面的设计都争取最优化，故谓“黄金搭配”。

这套练习册按一面“讲”配一面“练”进行编排，“一面讲一面练”也有一边讲一边练或老师、学生面对面讲练的寓意。

丛书特色

在设计形式上，一面“讲”与一面“练”合成一页，每页均标有剪裁线，页页可撕，互不影响，不是活页胜似活页，学生使用方便，交作业方便，老师批阅方便，家长检查也方便。

在内容策划上，不是单纯的讲完一堂课布置一个练习，因为这种性质的练习在课本上都有课后练习题，我们不拟重复。而目前学生需要的是这样的练习册：在同步的前提下，把一章的知识体系归纳成几类完整的问题(一个完整的问题可能一堂课就能讲完，也可能两三堂课或更多堂课才能讲完)逐一进行讲解，然后根据分类的问题布置练习题。这种形式的练习册在讲解和布题的目的性和综合性、知识的完整性和应试性等方面就提高了一大步。学生使用后，在方法运用和综合能力方面也必然会迅速提高。《黄金搭配·一面讲一面练》就是根据学生的需求策划出来的，这种练习册的优越性是普通练习册所无法比拟的。

完美结合

形式是一面“讲”一面“练”，内容是在同步的前提下按问题分类讲练。所以，这套练习册把二者完美地结合在一起——“以题代讲”，“以讲带练”，“以练为主”。“以题代讲”，就是以“题”讲知识，以“题”讲方法，以“题”讲能力。“以讲带练”，就是以“题”检测知识，以“题”检测方法的运用，以“题”检测能力，通过讲解后练“题”，提高综合能力、创新意识和应试能力。“以练为主”，就是讲解后有同步练习(语文科有分课讲练)、单元综合练习、期中测试、期末测试等练习，可以满足不同程度学生的需求。布题的难度除注意基础题外，中等题和较难题是这套练习册的重点。

使用范围

这套练习册适合中等及中等以上学生使用。由于其同步性强、剪裁方便，可以在课堂教学中使用，也可供学生在课后复习中及家长辅导时使用。由于这套练习册是按问题分类同步编写的，所以也适合使用非人教版教材的地区使用。拥有这套练习册就是拥有一位良师伴读，与良师为伴，将会实现您六月的美好梦想。

圆六月梦，从这里开始；圆六月梦，从拥有《黄金搭配》开始！

编委会

2003年6月于北京

目录

学生使用指南

第一步：

上课前，先阅读本章“知识结构”与“问题分类”，做到对本章内容及结构了然于心。

第二步：

下课后，选择与课堂内容对应的问题，读懂“讲”，仔细体会老师是如何讲题、解题的。

第三步：

读懂“讲”后，可按老师的要求或自己选择与讲对应的“练”——“同步综合训练”，做题。

第四步：

做完“同步综合训练”，可交老师批改，或者自己对照本书的“解题思路与答案”，看看答案对了没有，看看解题过程是否规范。

第五步：

本章所有的问题“讲”、“练”部分都完成了，你就可以做“本章综合能力测试”，看看自己到底掌握了多少。

第六步：

本章所有的题做完后，你可以再翻到“知识结构”与“问题分类”，进行多方面的记忆与思考。

第七步：

每一章你都按第一步至第六步学完后，就可以做“期中”或“期末”试题，迎接考试与挑战。

教师使用指南

第一步：

本书内容与教材同步。可通读问题分类的“讲”与“练”，与自己的教学进度相匹配。

第二步：

可选择“讲”中的例题在课堂上讲解。

第三步：

在课堂中或上完1～2节课后，对应“问题分类”中讲完的问题布置“练”，并请学生按剪切线裁下“同步综合训练”交老师批改。(可要求学生裁下答案部分，交老师保存)

第四步：

按“思路提示与解答”进行批改。

第五步：

相应的“同步综合训练”完成后，可布置学生完成“本章综合能力测试”。

第3章　三角形

知识结构

- 三角形——基本作图
  - 三角形的概念
    - 三角形的边角关系
      - 三边间的不等关系
      - 三角形内角和定理
    - 三角形的主要线段
      - 角平分线
      - 中　　线
      - 高　　线
    - 三角形的分类
      - 按边分
      - 按角分
  - 三角形的性质
    - 一般三角形的性质
    - 特殊三角形的性质
      - 等腰三角形——等边三角形（轴对称）
      - 直角三角形——勾股定理及其逆定理
  - 全等三角形
    - 性质
    - 判定

三角形是最常见的几何图形之一，在工农业生产和日常生活中都有广泛的应用．三角形又是多边形的最简单的情况，在几何里，常常把多边形分割成若干个三角形，利用三角形的性质去研究多边形．所以三角形部分的知识是学习四边形、相似形等的基础．

全等三角形是本章的重要内容，利用证明全等三角形常常是证明线段相等或角相等的重要方法．学习本章的关键是要掌握证明全等三角形的方法．等腰三角形、等边三角形、直角三角形是学习较复杂图形的基础，因此也要认真学习它们的性质与判定．

问题分类

1 关于三角形的一些概念
2 三角形三条边的关系
3 三角形内角和定理的应用
4 三角形的分类
5 证明三角形全等(SAS、ASA、AAS、SSS)
6 证明直角三角形全等
7 角平分线的性质及应用
8 基本作图的方法
9 等腰三角形的性质应用
10 判定等腰三角形的方法
11 线段的垂直平分线的意义及性质
12 轴对称、轴对称图形的性质应用与作图
13 直角三角形的性质应用
14 有关利用勾股定理及其逆定理的证明与计算
15 综合问题的求解
16 开放性试题选

讲

1. 关于三角形的一些概念

例 1 下列每个图中各有多少个三角形？

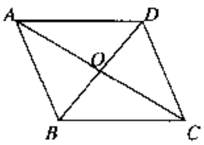


图 1

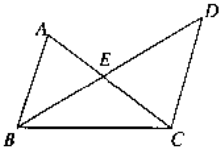


图 2

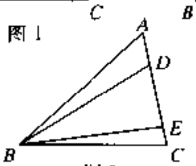
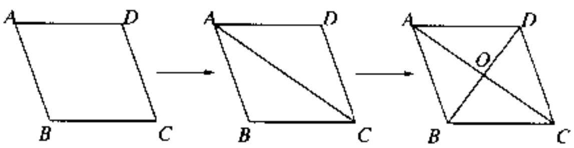


图 3

解析 数三角形的个数时，要不重复、不遗漏地找出所有的三角形，关键要按照一定的次序去数，否则容易多数或少数.

解 (1) 可按图形的形成过程去数，图 1 的形成过程可分解如下：



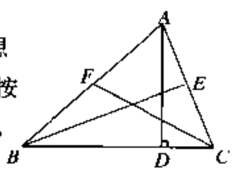
(形成 2 个)　(形成 6 个)

(2) 可按大小顺序数，如图 2，大△ABC、△BCD，小△ABE、△BCE、△CDE.

(3) 可从一条线段开始沿着顺时针(逆时针)方向去数；如图 3，从 BC 开始沿着逆时针方向数，有△BCE、△BCD、△BCA、△BED、△BEA、△BDA.

即图 1 中有 8 个三角形；图 2 中有 5 个三角形；图 3 中有 6 个三角形.

归纳 一个复杂图形要想确定含有三角形的个数，按着所给的三种方法去确定，基本上会做到不重不漏.



例 2 在图中，用式子把下列条件表示出来：(1) AD 是△ABC 的高；(2) BE 是△ABC 的角平分线；(3) CF 是△ABC 的中线.

三角形的高、角平分线、中线

解析 三角形的主要线段，可以根据具体情况用不同式子表示.

解 (1) AD 是△ABC 的高，可以表示为 $AD\perp BC$ 于 D，或$\angle ADB=90°$或$\angle ADC=90°$或$\angle ADB=\angle ADC=90°$；

(2) BE 是△ABC 的角平分线，可表示为$\angle ABE=\angle EBC$，或$\angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle EBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，或$\angle ABC=2\angle ABE$，$\angle ABC=2\angle EBC$；

(3) CF 是△ABC 的中线，可表示为 $AF=BF$，或 $AF=\frac{1}{2}AB$，$BF=\frac{1}{2}AB$，或 $AB=2AF$，$AB=2BF$.

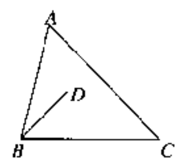
例 3 下列命题中，(1) 首尾相连的三条线段组成的图形是三角形；(2) 有三个角的平面图形是三角形；(3) 三角形的顶点到对边的距离是三角形的高；(4) 三角形的角平分线是射线；(5) 三角形的三条高所在直线交于一点，这点不在三角形内就在三角形外；(6) 任何一个三角形都有三条高、三条中线、三条角平分线. 正确的个数有（　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

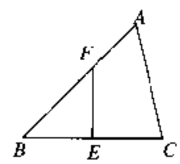
解析 本题要求准确掌握三角形的概念、三角形的角平分线、中线、高的概念. 注意三角形的高与一般意义的“高”及“距离”之间意义上的区别，注意钝角三角形、直角三角形高的特点.

解 只有(6)正确，故选 A.　是什么？

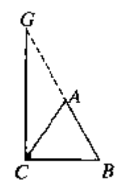
例 4 如图，△ABC 的三条主要线段画得对吗？为什么？



$\angle ABC$ 的平分线 BD



BC 边上的中线 EF



BC 边上的高 CG

解析 (1) 注意三角形的角平分线与一般角平分线的概念，前者是线段，后者是射线；(2) 注意三角形的中线与边的垂直平分线的区别；(3) 注意三角形的高与边的垂线的区别.

解 都错了.

$\angle ABC$ 的平分线 BD 应与对边 AC 相交，点 B 与交点间的才是$\angle ABC$ 的平分线；

BC 边上的中线应是 BC 边上的中点 E 与顶点 A 所连结的线段，不是 BC 边上的垂直平分线.

BC 边上的高应是 BC 边所对顶点 A 向 BC 作垂线，顶点 A 与垂足间的线段；而不是过 C 点作 BC 边的垂线.

班级______ 姓名______

1. 同步综合训练

1. 如图 1 中三角形的个数是（　）

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

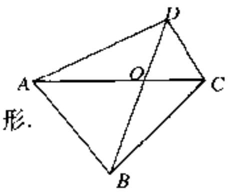


图 1

2. 如图 2，BD、CE 为 $\triangle ABC$ 的高线，交于 H，图中共有(　)个直角三角形.

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

3. 三角形的高是一条（　）

A. 直线　　B. 垂线　　C. 垂线段　　D. 射线

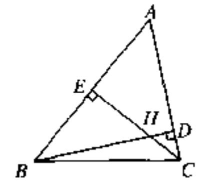


图 2

4. 三角形的三条高线的交点一定在（　）

A. 三角形的内部　　B. 三角形的外部

C. 三角形的内部或外部　　D. 以上答案都不对.

5. 下列线段中，能把一个三角形分成面积相等的两个三角形的线段是这个三角形的（　）

A. 角平分线　　B. 中线　　C. 高线　　D. 边的垂直平分线

6. 三角形三条中线的位置为（　）

A. 都在三角形内　　B. 都在三角形外

C. 或在三角形内，或在三角形外　　D. 或在三角形内，或在三角形外，也可能与边重合

7. 下列命题中正确的是（　）

A. 三角形的中线就是过顶点平分对边的直线

B. 三角形的高就是顶点到对边的距离

C. 三角形的角平分线就是三角形内角的平分线

D. 三角形的三条中线必相交于一点

8. 已知：如图 3，$BD = DC$，$\angle ABN = \frac{1}{2}ABC$，$CE \perp AB$ 于 E，F 为 AB 上任意一点，则 AD 是 $\triangle ABC$ 的一条____线，BN 是_____的角平分线，还平分_____的一个内角，CE 是_____的高.

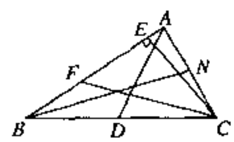


图 3

9. $\triangle ABC$ 中，$\angle CAB > 90°$，$DA \perp AB$，$EB \perp BC$，$CF \perp AB$，那么三角形的一条高线是（　）

A. AD　　B. BE　　C. CF　　D. DF

10. 用三角板在图 4 中画出钝角 $\triangle ABC$ 三边上的高，通过画图，可知：(1) $\triangle ABC$ 中，____是钝角；(2) 有_____条高在三角形的外部，其中钝角所对的边上的高在三角形的_____部；(3) 再把三条高延长，这三条高所在直线相交于____点.

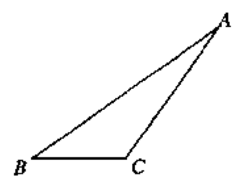


图 4

11. 画图探究：如图 5，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，在图中作 BC 边上的高线，$\angle A$ 的平分线和 BC 边上的中线，并观察这三条线段在位置上有什么特点.

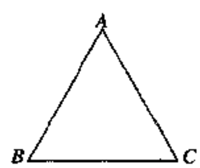


图5

12. 如图 6，BM 是 $\triangle ABC$ 的中线，已知 $AB = 5cm$，$BC = 3cm$，那么 $\triangle ABM$ 与 $\triangle BCM$ 的周长的差是______.

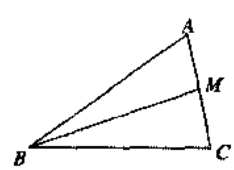


图 6

2. 三角形三条边的关系

例 1 要组成一个三角形，三条线段的长度可取（　）

A. 9，6，13　　B. 2，3，5

C. 18，9，8　　D. 3，5，9

解析 由于“三角形两边的和大于第三边”，只需验证两条较短线段之和是否大于第三边即可.

解 $\because\ 9+6>13, 2+3=5, 9+8<18, 3+5<9$,

$\therefore$ 只有第一组线段能组成三角形，选 A.

例 2 三角形的两边长分别为 3 与 6 且第三边 c 为偶数，则 $c=$______.

解析 由于“三角形两边的和大于第三边，两边的差小于第三边”，即“第三边小于两边的和，大于两边的差”.

解 $\because\ 6-3<c<6+3$，即 $3<c<9$.

$\because$ c 为偶数，$\therefore\ c=4$ 或 6 或 8.

例 3 等腰三角形的一边长为 3cm，另一边长为 7cm，则其周长为（　）　是腰吗?

A. 10cm　　B. 13cm

C. 17cm　　D. 13cm 或 17cm

解析 先考虑哪边为底，哪边为腰，进行分类讨论，再利用三角形三边关系定理进行判断.

解 (1) 当腰长为 7cm，底边长为 3cm 时，其周长为 $7\times2+3=17$cm;

(2) $\because\ 2\times3<7$，$\therefore$ 3 不能是腰；

所以此三角形的腰是 7，底是 3，周长为 17.

例 4 已知等腰三角形的周长为 8，边长为整数，则腰长是______.（2001 年福建省龙岩中考题）

解析 可利用方程思想，设腰为 x，则底为 $8-2x$. 再根据三角形三边关系定理，构造关于 x 的不等式组，从而确定 x 的取值范围.

解 设腰长为 x，则底边长为 $8-2x$.　第三边大于两边之差，小于两边之和

$\because\ x-x<8-2x<x+x$,

即 $0<8-2x<2x$,　$\begin{cases}8-2x<2x\\8-2x>0\end{cases}$

$\therefore\ 2<x<4$.

$\because$ x 为整数，$\therefore\ x=3$，即腰长是 3.

例 5 如图，等腰三角形 ABC 中，腰 AC 上的中线 BD 把三角形的周长分为 12 和 15 两部分，　中线有什么性质

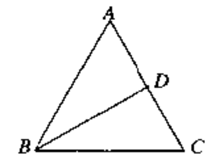
求这个三角形的各边长.　$AD=DC$

解析 首先明确腰 AC 上的中线 BD 把三角形的周长分为 $AB+AD$ 和 $BC+CD$ 两部分；其次这两部分的长分别为 12 和 15，因此应分类讨论. 由于此题出现了等量关系 $AD=DC$, $AB=AC$，应考虑列方程(组)求解.

解 设 $AD=DC=x$, $BC=y$，则 $AB=AC=2x$.

依题意，得 $\begin{cases}x+2x=15\\x+y=12\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+2x=12\\x+y=15\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=5\\y=7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4\\y=11\end{cases}$



所以这个三角形的三边长分别为 10，10，7 或 8，8，11.

例 6 若 a、b、c 是三角形三边的长，则代数式 $a^2-2ab-c^2+b^2$ 的值（　）

能分解因式吗?

A. 大于 0　　B. 等于 0

C. 小于 0　　D. 不能确定

解析 先用分组分解法将代数式因式分解，再利用三角形三边关系定理判断其值的大小.

解 $a^2-2ab-c^2+b^2=a^2-2ab+b^2-c^2$

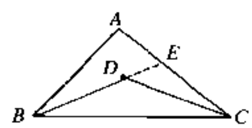
$(a-b)^2-c^2=(a-b+c)(a-b-c)$

$\because\ a+c>b,\ a<b+c$

$\therefore\ a+c-b>0,\ a-b-c<0$

$\therefore\ a^2-2ab-c^2+b^2$ 的值小于 0，选 C.

例 7 如图，已知 D 是 $\triangle ABC$ 内任意一点，连结 BD、DC. 求证：$AB+AC>DB+DC$.



解析 证与线段有关的不等关系时，往往是应用三角形三边关系定理，得出几个同向不等相加而成. 本题待证的 $AB+AC>DB+DC$ 中的线段没有构成三角形，需通过添加辅助线，延长 BD 交 AC 于 E，形成 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DEC$ 来证明(或延长 CD 交 AB 于 F).

证明 延长 BD 交 AC 于 E

在 $\triangle ABE$ 中，$AB+AE>BE$　①

在 $\triangle DEC$ 中，$DE+EC>DC$　②

① + ②得，$AB+AE+DE+EC>BE+DC$

即 $AB+AE+EC>BE-DE+DC$

$\therefore\ AB+AC>BD+DC$

班级______ 姓名______

2. 同步综合训练

1. 有下列长度的三条线段，能组成三角形的是（　）

A. 1cm、2cm、3cm　　B. 1cm、4cm、2cm

C. 2cm、3cm、4cm　　D. 6cm、2cm、3cm　　(2001 年江苏省南京中考题)

2. 三条线段的长度比是(1) 2 : 3 : 4；(2) 3 : 4 : 7；(3) 1 : 2 : 5；(4) 7: 10 : 2，其中可以组成三角形的是（　）

A. (1)　　B. (2)　　C. (3)　　D. (4)

3. 一个三角形两边分别为 4 和 5，则第三边 C 可以取的整数值为________.

4. 若 $AB=5$，$BC=7$，则$\triangle ABC$ 的周长 l 的取值范围是________.

5. 等腰三角形的一边长为 5cm，第一边长为 7cm，则其周长为(　)

A. 12cm　　B. 17cm　　C. 19cm　　D. 17cm 或 19cm

(2000 年北京市昌平中考题)

6. 三角形的周长是偶数，其中两边长分别为 2 和 7，那么第三边长为（　）

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

7. 已知线段 a、b、c，满足 $a>b>c$，若这三条线段能组成一个三角形，还需要满足的条件是（　）

A. $b+c=a$　　B. $a+c>b$　　C. $a-b<c$　　D. $b-c<a$

8. 已知等腰三角形的周长为 16cm，一边长为 6cm，则其他两边的长为____________.

9. 已知等腰三角形的一边长等于 12cm，腰长是底边长的 $\frac{3}{4}$，则它的周长为__________.

10. 已知等腰$\triangle ABC$ 的底边 $BC=8$cm，且$|AC-BC|=2$cm，则腰 AC 的长为(　)

A. 10cm 或 6cm　　B. 10cm　　C. 6cm　　D. 8cm 或 6cm

(2001 年山东省济南中考题)

11. 已知等腰三角形两边的和与差分别为 16cm 和 8cm，则此等腰三角形的周长为______.

12. 在$\triangle ABC$ 中，$AB=14$，$BC=4x$，$AC=3x$，则 x 的取值范围是（　）

A. $x>2$　　B. $x<14$　　C. $7<x<14$　　D. $2<x<14$

13. 若 $a=5$，$b=3$，线段 c 的长度是正整数，则以 a、b、c 为边的三角形有（　）

A. 1 个　　B. 5 个　　C. 无数个　　D. 有限个，但个数不确定

14. 若以 a、b、c 表示三角形的三条边，则代数式$(a+b+c)(a-b-c)(b-c-a)$的值一定是（　）

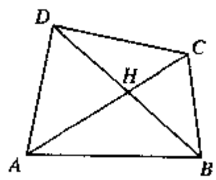
A. 正数　　B. 正整数　　C. 负数　　D. 非负数

15. 已知一个三角形中两条边的长分别为 a、b，且 $a>b$，那么这个三角形的周长 l 的取值范围是________.

(希望杯数学竞赛题)

16. 现有 8 根木棍，它们的长度分别是 1、2、3、4、5、6、7、8，若从 8 根木棍中抽取 3 根拼成三角形，要求三角形的最长边为 8，另两边之差大于 2 (以上单位均为 cm)，那么可以拼成的不同的三角形的种数为________种.

17. 探究：草原上的四口油井，位于四边形 $ABCD$ 的 4 个顶点(如图，现在要建立一个维修站 H，试问 H 建在何处，才能使它到四口油井的距离之和 $HA+HB+HC+HD$ 为最小，请说明理由.



讲

3. 三角形内角和定理的应用(1)

例 1 在△ABC 中，$\angle A+\angle B=100^\circ$，$\angle C=2\angle B$，求∠A、∠B、∠C 的度数.

它们之间有什么关系

解析 求△ABC 的三个内角，除给出的两个条件外，还隐含着“$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$”这个条件，利用解方程(组)的方法，可以得到惟一确定的解.

解法 1 设$\angle B=x$，则$\angle C=2\angle B=2x$，

$\because$ $\angle A+\angle B=100^\circ$，$\therefore$ $\angle A=100^\circ-\angle B=100^\circ-x$. $\therefore$ $100^\circ-x+x+2x=180^\circ$

$\therefore$ $x=40^\circ$，即$\angle B=40^\circ$，$\angle C=80^\circ$，$\angle A=60^\circ$

解法 2 依题意

$$\begin{cases}\angle A+\angle B=100^\circ & ①\\ \angle C=2\angle B & ②\\ \angle A+\angle B+\angle C=180^\circ & ③\end{cases}$$

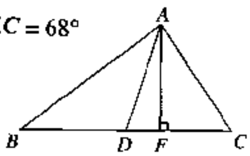
把①代入③得$\angle C=80^\circ$④，把④代入②得$\angle B=40^\circ$⑤，把⑤代入①得$\angle A=60^\circ$.

有什么性质

例 2 如图，AF、AD 分别是△ABC 的高和角平分线，且$\angle B=36^\circ$，$\angle C=76^\circ$，求∠DAF 的度数.

解析 要善于从图形中看出几何元素的多重身份. 如∠ADF 既是△ABD 的外角，又是△ADC 的内角；∠DAF 既是△ADF 的内角，又是∠DAC 与∠FAC 的差. 可按下列顺序求∠DAF 的度数：$\angle BAC\to\angle BAD\to\angle ADF\to\angle DAF$.

解 $\because$ $\angle B=36^\circ$，$\angle C=76^\circ$ 三角形内角和等于 180°



$\therefore$ $\angle BAC=180^\circ-\angle B-\angle C=68^\circ$

$\because$ AD 平分∠BAC

$\therefore$ $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=34^\circ$

$\therefore$ $\angle ADF=\angle B+\angle BAD=70^\circ$

$\because$ $AF\perp BC$，$\therefore$ $\angle AFD=90^\circ$

$\therefore$ $\angle DAF=90^\circ-\angle AFD=90^\circ-70^\circ=20^\circ$

直角三角形的两个锐角互余

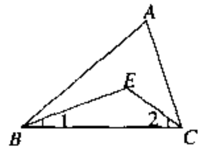
说明：同一题往往有多种解答途径，本题另一明显较好的方法是在△ABF 中求出∠BAF，再求出∠BAD 大小，再利用$\angle DAF=\angle BAF-\angle BAD$，你不妨试试看.

例 3 已知：如图，BE、CE 分别平分∠ABC 和∠ACB，若$\angle A=\alpha$，求∠BEC 的度数.

角平分线有什么性质呢？

解析 求∠BEC 的度数，只需求出$\angle 1+\angle 2$的度数，而由角平分线定义可得$\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ACB$，从而找到与∠A 的关系.

解 $\because$ BE、CE 分别平分∠ABC 和∠ACB



$\therefore$ $\angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，

$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ACB$

$\therefore$ $\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$

$\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180^\circ$

$=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=90^\circ-\frac{1}{2}\alpha$

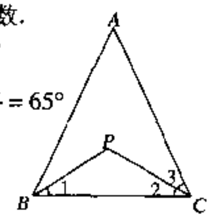
$\therefore$ $\angle BEC=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)$

$=180^\circ-(90^\circ-\frac{1}{2}\angle\alpha)=90^\circ+\frac{1}{2}\alpha$.

例 4 已知△ABC 中，$\angle ABC=\angle ACB$，$\angle A=50^\circ$，P 为△ABC 内一点，且$\angle PBC=\angle PCA$，求∠BPC 的度数.

解析 首先画图，由于∠BPC 在△BPC 中，所以只需求出$\angle 1+\angle 2$的度数即可，因为$\angle 1=\angle 3$，所以只需求出$\angle 2+\angle 3$即∠ACB 的度数.

解 $\because$ $\angle ABC=\angle ACB$，$\angle A=50^\circ$



$\therefore$ $\angle ABC=\angle ACB=\frac{180^\circ-\angle A}{2}=65^\circ$

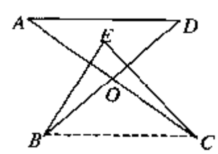
即$\angle 2+\angle 3=65^\circ$

$\angle ABC+\angle ACB+\angle A=180^\circ$

$\because$ $\angle 1=\angle 3$，$\therefore$ $\angle 1+\angle 2=65^\circ$

$\therefore$ $\angle BPC=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)=115^\circ$.

例 5 如图，求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$的度数.



解析 设法将这五个角放入三角形中，利用“三角形内角和定理”求解，所以可连结 BC，构造△EBC，将∠E、∠B、∠C 放入了三角形.

解 连结 BC，设 AC、BD 交于 O 点

在△EBC 中，$\angle E+\angle EBC+\angle ECB=180^\circ$

即$\angle E+\angle EBD+\angle DBC+\angle ECA+\angle ACB=180^\circ$

$\because$ $\angle AOD=\angle BOC$

$\therefore$ $180^\circ-\angle AOD=180^\circ-\angle BOC$

即$\angle A+\angle D=\angle DBC+\angle ACB$

$\therefore\angle E+\angle EBD+\angle ACE+\angle A+\angle D=180^\circ$，

即$\angle E+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180^\circ$.

班级______ 姓名______

3. 同步综合训练

1. 在△ABC 中，(1) 若∠A : ∠B : ∠C = 2 : 3 : 5，那么∠A = ______，∠B = ______，∠C = ______；

(2) 若∠A = 80°，∠B − ∠C = 40°，那么∠C = ______；

(3) 若∠A = 30°，∠B 与∠C 的度数比为 1 : 2，那么∠C = ______；

(4) 若∠C = 2(∠A + ∠B)，那么∠C = ______；

(5) 若∠B − ∠A − ∠C = 50°，那么∠B = ______.

2. 如图 1，AD 为△ABC 的角平分线，∠B = 30°，∠DAC = 35°，则∠C = ______.

3. 如图 2，已知：AD、BE、CF 是△ABC 的角平分线，则∠1 + ∠2 + ∠3 = ______.

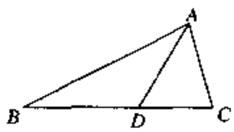


图 1

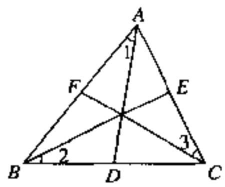


图 2

4. 如图 3，五角星形中，∠A + ∠B + ∠C + ∠D + ∠E = (　)

A. 150°　B. 180°　C. 270°　D. 360°

5. 如图 4，已知 AB∥CD，BE 平分∠ABD，DE 平分∠CDB，BE、DE 相交于 E，则∠E = ______.

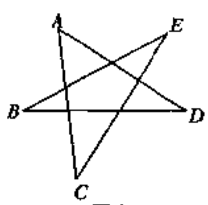


图 3

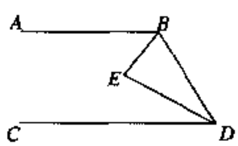


图 4

6. 如图 5，BD、CE 是△ABC 的高，交于 H，∠DBC = 30°，∠ECB = 40°，则∠EBH = ______，∠A = ______，∠DHC = ______，∠BHC = ______.

7. 如图 6，已知∠1 = 20°，∠2 = 25°，∠A = 35°，则∠BDC 的度数为______.

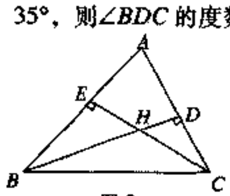


图 5

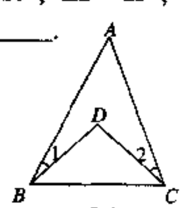


图 6

8. 如图 7，在△ABC 中，∠A = 51°，$\angle OBC = \frac{1}{3}\angle ABC$，$\angle OCB = \frac{1}{3}\angle ACB$，则∠BOC 的度数为______.

9. 如图 8，已知 $l_1 \parallel l_2$，则下列式子中等于 180°的是(　)

A. $\alpha+\beta+\gamma$　　B. $\alpha+\beta-\gamma$

C. $\beta+\gamma-\alpha$　　D. $\alpha-\beta+\gamma$

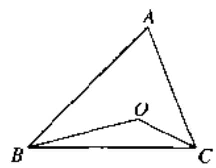


图 7

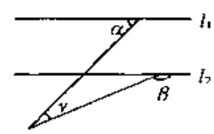


图 8

10. 如图 9，在△ABC 中，∠B = 50°，∠C = 32°，AD⊥BC 于 D，∠BAC 的平分线 AE 交 BC 于 E，DF⊥AC，垂足为 F，求∠ADF 的度数.

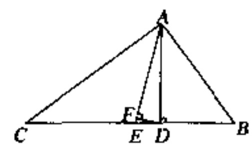


图 9

11. 如图 10，∠A + ∠B + ∠C + ∠D + ∠E = (　)

A. 180°

B. 120°

C. 135°

D. 无法确定

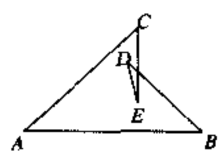


图 10

12. 探究：如图 11，已知 DB、DC 是△ABC 的内角平分线，PB、PC 是外角平分线，设∠A = α，则∠BDC + ∠BPC 的度数与α是否有关?

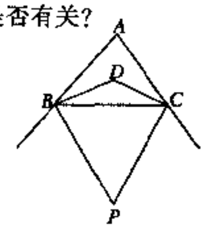


图 11

讲

4. 三角形内角和定理的应用(2)

例 1 如图 1，已知：AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$\angle B=\angle BAD$，$\angle ADC=100°$，求 $\triangle ABC$ 各内角的度数. 可以求出什么？

解析 由 $\angle ADC$ 是 $\triangle ABD$ 的一个外角，可利用“三角形的一个外角等于与之不相邻的两个内角的和”定理求出 $\angle B$ 和 $\angle BAD$，再由角平分线的定义求出 $\angle BAC$，最后求出 $\angle C$.

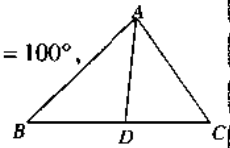


图 1

解 ∵ $\angle B=\angle BAD$，$\angle ADC=100°$，

$\angle ADC=\angle B+\angle BAD$

∴ $\angle B=\angle BAD=50°$

∵ AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线

∴ $\angle BAC=2\angle BAD=100°$

∴ $\angle C=180°-\angle B-\angle BAC$

$=180°-50°-100°=30°$.

例 2 如图 2，求证：$\angle BDC=\angle A+\angle B+\angle C$.

解析 当证一个角等于多个角时，应考虑将一个角分成多个角、或将多个角由三角形的外角性质将一个外角与两个与其不相邻的内角建立关系.

证法 1 连结 AD，并延长 AD 到 E，如图 2(1)

则 $\angle 1=\angle B+\angle 3$，$\angle 2=\angle C+\angle 4$ 将一个角分成两个角

∴ $\angle 1+\angle 2=\angle B+\angle C+\angle 3+\angle 4$

即 $\angle BDC=\angle B+\angle C+\angle BAC$.

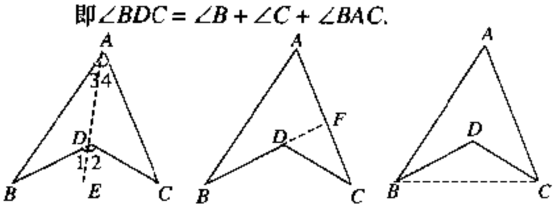


图 2(1)　　图 2(2)　　图 2(3)

还有如图 2(2)的证法 2：延长 BD 交 AC 于 F；

如图 2(3)的证法 3：连结 BC，请你完成.

例 3 如图 3，已知 $\angle BAD=\angle CBE=\angle ACF$，$\angle FDE=64°$，$\angle DEF=43°$，求 $\triangle ABC$ 各内角的度数.

解析 由于 $\angle FDE$ 是 $\triangle ABD$ 的外角，所以 $\angle FDE=\angle BAD+\angle ABD$，此时等量代换 $\angle FDE=\angle CBE+\angle ABD$，从而求出 $\angle ABC$ 的度数.

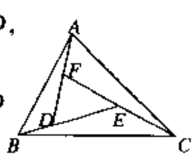


图 3

解 ∵ $\angle FDE=\angle BAD+\angle ABD$，

$\angle BAD=\angle CBE$

∴ $\angle FDE=\angle CBE+\angle ABD$

即 $\angle FDE=\angle ABC$

∵ $FDE=64°$，∴ $\angle ABC=64°$

同理：$\angle ACB=\angle DEF=43°$

$\angle BAC=180°-(\angle ABC+\angle ACB)$

$=180°-107°=73°$.

例 4 如图 4，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 的平分线与 $\angle C$ 的外角平分线相交于 D，$\angle D=40°$，求 $\angle A$ 的度数.

解析 因为 $\angle D$ 在 $\triangle BDC$ 中，$\angle A$ 在 $\triangle ABC$ 中，所以不能直接用与角相关的定理. 这时要考虑到 $\angle D$ 的形成与 BD、CD 是角平分线有关，因此要利用这两条角平分线的结论来沟通它们之间的关系.

解 ∵ $\angle 4$ 是 $\triangle BDC$ 的外角　∴ $\angle 4=\angle 2+\angle D$

∵ $\angle B$ 的平分线与 $\angle C$ 的外角平分线相交于 D.

∴ $\angle 4=\frac{1}{2}\angle ACE$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ABC$

又∵ $\angle D=40°$，

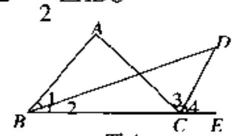


图 4

∴ $\frac{1}{2}\angle ACE=\frac{1}{2}\angle ABC+40°$，∴ $\angle ACE=\angle ABC+80°$，　又 ∵ $\angle ACE=\angle A+\angle ABC$

∴ $\angle A+\angle ABC=\angle ABC+80°$，　∴ $\angle A=80°$.

例 5 如图 5，已知 D 是 $\triangle ACB$ 外角的平分线与 BA 延长线的交点，求证：$\angle BAC>\angle B$.

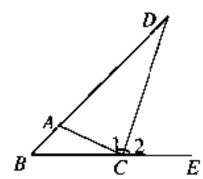


图 5

解析 证明角度的大小关系常用到三角形的外角性质，即三角形的任一外角都大于与它不相邻的任何一个内角.

证明 ∵ CD 平分 $\angle ACE$，∴ $\angle 1=\angle 2$

∵ $\angle BAC$ 是 $\triangle ACD$ 中与 $\angle 1$ 不相邻的外角，

∴ $\angle BAC>\angle 1$，∴ $\angle BAC>\angle 2$　等量代换

同理 $\angle 2>\angle B$，∴ $\angle BAC>\angle B$.

例 6 如图 6，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$，则 $\angle 7$ 是 $\angle 1$ 的______倍.

解析 由于 $\angle 7$ 是三角形的一个外角，所以可以利用三角形外角的性质，由 $\angle 1=\angle 2$，可设 $\angle 1=\angle 2=\alpha$，从而导出 $\angle 7$ 与 α 的关系.

解 设 $\angle 1=\angle 2=\alpha$，则 $\angle 3=\angle 1+\angle 2=2\alpha$

∴ $\angle 3=\angle 4=2\alpha$

∵ $\angle 5=\angle 1+\angle 4=\alpha+2\alpha=3\alpha$

∴ $\angle 6=\angle 5=3\alpha$

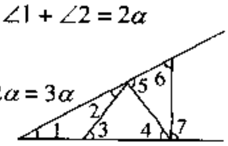


图 6

∵ $\angle 7=\angle 1+\angle 6=\alpha+3\alpha=4\alpha$

∴ $\angle 7=4\angle 1$，即 $\angle 7$ 是 $\angle 1$ 的 4 倍.

班级______ 姓名______

4. 同步综合训练

1. 在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$，BD平分$\angle ABC$，若$\angle BDC=120°$，则$\angle A$的度数为______.

2. 如图1，在$\triangle ABC$中，$\angle B=66°$，$\angle C=54°$，AD是$\angle A$的平分线，DE平分$\angle ADC$交AC于点E，则$\angle BDE=$______.

3. 如图2，$BC\perp ED$于O，$\angle A=57°$，$\angle D=20°$，则$\angle B=$______，$\angle ACB=$______.

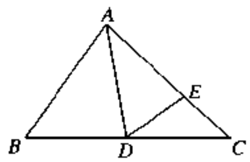


图1

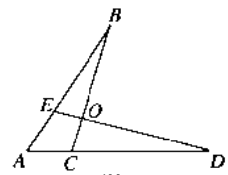


图2

4. 已知：如图3，AE、BD相交于点C，$BD/\!/EF$，且$\angle B=40°$，$\angle E=85°$，则$\angle A=$______.

5. 如图4，$\angle A=\angle ABD$，$\angle 1=\angle C=35°$，则$\angle ADE=$______.

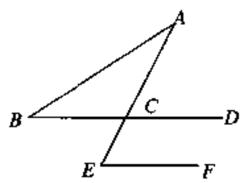


图3

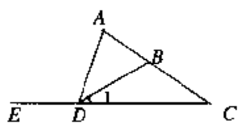


图4

6. 如图5，$\angle ABC=60°$，$\angle ADC=40°$，$\angle A$为x，$\angle BCD$为$3x$，则$\angle A$的度数为______.

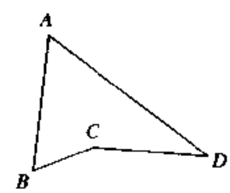


图5

7. 已知：如图6，在$\triangle ABC$中，P是AB上一点，D是CB延长线上一点，求证：$\angle APC>\angle BPD$.

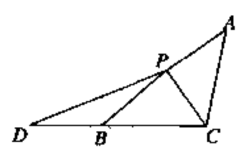


图6

8. 已知：如图7，P是$\triangle ABC$中一点，连结PA、PB，求证：$\angle APB>\angle C$.

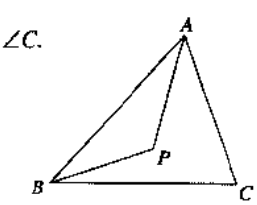


图7

9. 如图8，$\angle B=\angle C$，$\angle 1=\angle 3$，则$\angle 1$与$\angle 2$的关系为（　）.

A. $\angle 1=2\angle 2$　　B. $\angle 1+\angle 2=180°$

C. $\angle 1+3\angle 2=180°$　　D. $3\angle 1-\angle 2=180°$

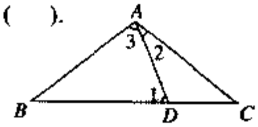


图8