

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

YU DA XUE YI NIAN JI XUE SHENG TAN SHU XUE

与大学一年级学生谈数学

数学是什么

SHU XUE SHI SHEN ME

王元明 著



东南大学出版社

SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

数学是什么？

——与大学一年级学生谈数学

王元明 著

东南大学出版社

内 容 提 要

本书是根据作者为数学系一年级学生讲授“学科概论”一课的讲稿整理而成。书中除了包含对分析学、代数学和几何学三个核心领域的基本内容和发展历程做概要介绍外,还包含广大青年数学爱好者十分关心的数学问题。本书力求将知识性、趣味性和历史性融为一体,是大学数学系的学生、中学高年级学生和广大数学爱好者了解数学、走进数学的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学是什么?——与大学一年级学生谈数学/
王元明著. —南京:东南大学出版社,2003.6

ISBN 7-81089-281-9

I. 数... II. 王... III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 042212 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼2号 邮编 210096)

出版人:宋增民

江苏省新华书店经销 扬中市印刷有限公司印刷
开本:880 mm × 1092 mm 1/32 印张:5.5 字数:73千字
2003年7月第1版 2003年9月第2次印刷
印数:10001—15000 定价:10.00元

(凡因印装质量问题,可直接向发行科调换。电话:025-3795801)

前 言

近十几年来,东南大学对本科生教学进行了一系列改革,并取得了一些成果。其中之一,就是对每个系一年级学生增设了一门名叫“学科概论”的课程,其目的是使新入学的大学生对所学专业的过去和现在有一个大概的了解。我非常支持这项改革,所以就承担了数学系这门课程的教学任务。

要讲好这门课是非常困难的:第一,所面对的学生只具有中学数学的水准,这就大大地限制了选材的范围;第二,数学学科就如同浩瀚的大海,已拥有 100 多个分支体系,要想在不到 20 个学时内把内容如此丰富的学科概貌讲清楚,几乎是不可能的,何况我的学术水平有限,知识面也很窄,更是

???

难以胜任。好在这门课在全国可能也是新设的,没有固定的教学内容和要求,这就给我提供了一个自由度较大的活动空间。我给这门课的定位是:力求融知识性、趣味性、历史性于一体。

1999年,我第一次讲授这门课,学生好评如潮,这大大出乎我的意料,也给了我极大的鼓舞。对一个教师来说,没有比学生的理解和支持更值得欣慰的事情了。因此,从2000年起,我虽然身患重病,但仍然坚持讲授这门课程。我是一个不太“安分”的人,从来不用完全相同的内容、同样的模式讲授同一门课程,总力求做到常讲常新,何况对这个没有统一要求的新课。我至今已讲了四次,每次的内容都不完全相同。正因为如此,所以当不少教师和学生希望我把讲课的材料印出来时,都被我婉言谢绝了。

回忆往事,我觉得我这一生特别是近

???

20年来基本上是在忙碌与拼争中度过的，现在已经到了确实该定下心来好好休息的时候了。在离开讲台之前，我总想再为学校做点什么。经过再三考虑，我觉得近几年来做的最有意义的一件事，就是讲授这门课程。为了让年轻人能把这门课接下去，并通过他们的努力使她逐步完善、充实，所以，我决定把手头的材料整理出来。尽管还很不成熟，但毕竟耗费了我不少心血，印出来后，或许能为广大的数学爱好者提供一个走出第一步的台阶。

书中涉及一些历史的事实，对于同一件事，不同的材料也有不完全相同的记载，我也没有精力去一一考证。另外，对有些学科，我也不太熟悉，有些提法未必准确。这些只有等待再版时逐个订正、修改了。我的出发点是抛砖引玉，期待广大的读者和同行们批评、指正。

数学系的领导和同事们在我患病期间

???

给予了许多真心实意的关心和鼓励,并提供了必要的写作时间,使我才能一边讲课一边整理和修改讲稿,在三年内撰写了(含与他人合作)三本著作。东南大学出版社的领导和吉雄飞编辑为本书的出版给予了热情的支持,并付出了辛勤的劳动。作者在此一并表示衷心的感谢。

王元明

2003年元旦

目 录

第一讲	数学科学与国际数学家大会	(1)
第二讲	数学是什么?	(13)
第三讲	数学的魅力	(27)
第四讲	无穷小量是不是零?	(53)
第五讲	距离 范数 拓扑	(65)
第六讲	从代数方程求根谈起	(81)
第七讲	过直线外一点能作几条平行线?	(95)
第八讲	关于费马大定理	(111)
第九讲	数学的特点与数学家的思维	(127)
第十讲	中国古代数学家的重要贡献	(139)
第十一讲	学学欧拉	(155)
后 记		(163)
参考文献		(168)

A stylized, high-contrast illustration of a landscape. In the upper left, a large, textured oval represents the sun or moon. To its right, a saguaro cactus with two arms is depicted in a similar textured style. The lower portion of the image shows a dark, textured foreground with two white, crescent-shaped cutouts that resemble mountain peaks or valleys. The overall aesthetic is minimalist and graphic.

第一讲

数学科学与国际数学家大会

被后人称为“数学王子”的德国大数学家高斯(Gauss, 1777—1855)曾说过:“数学是科学之王,数论是数学之王,它常常屈尊去为天文学和其他自然科学效劳,但在所有的关系中,它都堪称第一。”

随着科学技术的迅猛发展,数学的地位也日益提高,这是因为当今科学技术发展的一个重要特点是高度的、全面的定量化。定量化实际上就是数学化。因此,人们把数学看成是与自然科学、社会科学并列的一门科学,叫数学科学。

数学科学按其内容可分成五个大学科:纯粹(基础)数学(Pure mathematics)、应用数学(Applied mathematics)、计算数学(Computation mathematics)、运筹与控制(Operations research and control)和概率论与数理统计(Probability and mathematical statistics)。

数学发展的历史非常悠久,大约在一万多年前,人类从生产实践中就逐渐形成了“数”和“形”的概念,但真正形成数学理论还是从古希腊人开始的。公元前 300 多



年以前,希腊数学家欧几里得(Euclid,公元前330—前275)写了《几何原本》一书^①,这是自古以来所有科学著作中发行最广、沿用时间最长的巨著。两千多年来,数学的发展大体可以分为三个阶段:17世纪以前是数学发展的初级阶段,其内容主要是常量数学,如初等几何、初等代数;从文艺复兴时期开始,数学发展进入了第二个阶段,即变量数学阶段,产生了微积分、解析几何、高等代数;从19世纪开始,数学获得了巨大的发展,形成了近代数学阶段,产生了实变函数、泛函分析、非欧几何、拓扑学、近世代数、计算数学、数理逻辑等新的数学分支。

近半个多世纪以来,现代自然科学和技术的发展,正在改变着传统的学科分类与科学研究的方法。“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科

^① 《几何原本》共13卷,包括467个命题。第1~4卷是直线和圆,第5卷是比例论,第6卷是相似形,第7~9卷是数论,第10卷是不可约通量,第11~13卷是立体几何和穷竭法。

???

与日新月异的技术相结合,使用数值、解析和图形并举的方法,推出了横跨多种学科门类的新兴领域,在数学科学内也产生了新的研究领域和方法,如混沌(Chaos)、分形几何(Fractal geometry)、小波变换(Wavelet transform)等。可以这样说,数学发展至今,已经成为拥有 100 多个分支的科学体系,尽管如此,其核心领域还是:

代数学——研究数的理论;

几何学——研究形的理论;

分析学——沟通形与数且涉及极限运算的部分。

从第四讲到第七讲,我们将分别就这三个核心领域的基本内容及发展思路作简要的介绍。

下面我们来谈谈国际数学家大会及世界上重要的数学奖。

2002 年 8 月下旬在中国发生了一件让全世界数学界永远铭记的大事,即第 24 届国际数学家大会在北京举行,这是自 1897 年举行的第一届国际数学家大会至今 100

???

多年来首次在中国举行,也是第一次在发展中国家举行。那么什么是国际数学家大会呢?

1893 年为纪念哥伦布发现美洲大陆 400 周年,在芝加哥举办了“世界哥伦布博览会”,安排了一系列科学与哲学会议,数学家与天文学家的“国际大会”即在其列。哥廷根大学的克莱因(Felix Klein)^①给大会带来了许多欧洲数学家的论文,并作了题为“数学的现状”的演讲,他强调“具有极高才智的人物在过去开始的事业,我们今天必须通过团结一致的努力和合作以求其实现”。Klein 演讲之后,数学家与天文学家分组活动,数学组有 45 名数学家,其中来自美国以外的只有 3 人(含 Klein),这是数学史上第一次超越国界的数学家会议。但真正意义上的国际数学家大会是 1897 年在瑞士苏黎世召开的,后来被认定为“第一届国际数学家大会”。在这次会上通过的章程规

^① 克莱因(1849—1925)是 19 世纪后半期在德国起领导作用的数学家之一,是哥廷根大学数学学派的创立者。

定,两次大会之间可间隔 3 至 5 年,但从 1900 年第二届大会开始就形成了每 4 年举行一次的惯例。在国际数学家大会的历史上特别重要的一次会议就是 1900 年在巴黎举行的会议,因为在这次会上法国数学家希尔伯特(David Hilbert, 1862—1943)作了一个题为“未来的数学问题”的重要报告,他在报告中提出 23 个重大问题作为下一个世纪的研究目标(见附录),这大大地推动了数学的发展。

除了这次大会之外,值得特别提出的是 1924 年在加拿大多伦多举行的第七届国际数学家大会,这是第一次在欧洲以外的国家举行的会议。加拿大数学家、大会主席菲尔兹(J. C. Fields)为安排会议日程和筹集资金,奔波于大西洋两岸,行程达数千公里。在这次大会上 Fields 开始考虑设立一项国际数学奖,即后来的 Fields 奖。

由于第一次和第二次世界大战的影响,1916 年的大会以及从 1936 年在挪威奥斯陆第十届大会以后的 14 年中,有三届大

???

会都未如期召开,直到 1950 年才在美国坎布里奇举行了第十一届大会。

世界上的数学奖共有 50 余项,其中最受人关注的是菲尔兹奖、沃尔夫奖和奈望林纳奖。

菲尔兹奖是以已故加拿大数学家 John Charles Fields 命名的。菲尔兹对数学事业的远见卓识、组织才能和勤恳的工作推动了数学的发展,他强烈主张数学发展应该是国际性的。为了主持筹备国际数学家大会,他积劳成疾,当他得知这次大会的经费有结余时,就萌发了把它作为基金设立一个国际数学奖的念头。为此他积极奔走于欧美各国以谋求广泛支持,并打算于 1932 年在苏黎世召开的第九届大会上提出建议。但未等到大会开幕他不幸去世了。去世前他立下遗嘱,把自己的遗产和前述的剩余经费托人转交给第九届大会,大会接受了他的建议,并于 1936 年开始颁奖。这个奖只授予 40 岁以下的数学家,颁奖仪式都是在每届国际数学家大会开幕式上隆重

???

举行,先由执委会主席宣布名单,接着由主办国的重要人士或评委会主席授奖,最后由一些权威数学家简评获奖人的主要成就。

菲尔兹奖是一枚金质奖章和 1 500 美元,但它的地位却能与诺贝尔奖相提并论,这是因为:第一,它是由数学界的国际权威学术团体——国际数学联盟主持,从全世界的第一流数学家中评选出来的;第二,它是在每四年才召开一次的国际数学家大会上颁发,每次至多 4 名,获奖机会比诺贝尔奖还少;第三,获奖人的才干出色,在国际社会享有很高的声誉。

美籍华裔数学家丘成桐于 1983 年获得了此奖。

由于菲尔兹奖只授予年轻人,因此有两个局限:(1) 不足以代表一位数学家的全部成就;(2) 年岁较大的数学家没有获奖机会。从 1978 年起,以色列的沃尔夫(Wolf)基金会开始颁发国际沃尔夫数学奖,每次奖励 10 万美元,授予当代最有影响的数学