

教育資料叢刊

中學算術應用題解法

卡維林 著

067

教育資料叢刊
中學算術應用題解法

卡維林著

張德增譯

人民教育出版社出版

永年

教育資料 中學算術應用題解法

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ
В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

著 者： 卡 維 林

譯 者： 張 德 增

出版者： 人 民 教 育 出 版 社

(營業許可證出字第 二 號)

印刷者： (見 正 文 最 後 頁)

發行者： 新 華 書 店

書號：參0065

字數：37,890

50,001—110,000

定價1,700元

1953年4月原 版

1953年10月北京第二次印刷

本書是蘇聯‘先進教師經驗叢書’的一種，是作者從事算術教學多年的經驗總結。

書中關於教學方法的論述，是從馬克思列寧主義的認識論出發的，和過去市場上流行的專教學生死記公式的‘算術習題詳解’一類的書根本不同。

本書的第一篇敘述解答算術應用題的最主要的部分——審題方法，並着重指出分析法和綜合法的統一性。第二篇用實例來說明解答算術應用題的具體過程。

本書可供中小學算術教師和師範院校學生參考。



Н. В. КАВЕРИН
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ
(V—VI Классы)
УЧПЕДГИЗ * 1952

本書根據蘇維埃俄羅斯聯邦社會主義共和國教育部
教育書籍出版局一九五二年莫斯科俄文本譯出

中學算術應用題解法目次

引 言	1
-----	---

第一篇

一 分析與綜合是解應用題的基本方法	2
二 應用題條件的審查法	4
三 分析法	13
四 綜合法	23
五 分析—綜合法	28

第二篇

一 理解和有意識地掌握應用題的條件	34
二 審題和擬定解法計劃	39
三 解法和驗算	42
四 解完題後的補充作業	43

引 言

解算術應用題是數學教學中的重要問題之一。應用題具有很大的教養、教育和實用的意義。

在解題過程中，我們的學生能更深刻地意識到算術運算和概念的意義，學習分析複雜的整體成較簡單的部分，同樣將簡單的部分統一、聯系、組成較複雜的整體，學習使用合理的作業方法，養成克服困難的志向。在解題時能培養兒童的意志，發展兒童的邏輯思維、創造性、主動性、機敏性，發展兒童建設性的才能。此外，應用題是促使數學理論與實際結合的有效材料。解題的技能可保證進一步受教育的成功和幫助解決我們社會主義建設中各個部門所需要解決的實際重要問題。

人們對解題這個問題的注意，也說明了解題過程本身的複雜性。教會學生解算術應用題比教會學生掌握數學的理論還要困難。直到現在，學生缺乏解題的技巧，成為數學成績不及格和妨礙順利地繼續受中學教育、中等技術教育和高等教育的主要原因之一。

在本書中作者願再次提醒教師們對此重大問題的注意，並論述兩個問題：

1. 分析與綜合是解算術應用題的基本方法；
2. 應用題解法的各個步驟。

第一篇

一 分析與綜合是解應用題的基本方法

分析與綜合是認識的基本方法，恩格斯曾經說：‘……思維不僅在於把同類的因素綜合成統一體，而且更在於以同樣的程度把意識的對象分解成它們的因素，沒有分析，不會有綜合。’（恩格斯，‘反杜林論’，1960年版，第40頁）

分析是希臘字 (analysis)，它的意思是分解，分割，審查。

分析是分解物質實體或論理客體的成分的科學認識方法。分析在數學教學中也如在認識中一樣，具有重大的意義。

綜合（希臘字 synthesis —— 統一，結合，組成）是研究物體的整體性，統一體及其部分的相互聯繫的方法。綜合與分析在認識過程中相互聯系着。

在列寧和斯大林的天才著作中，卓越地闡明了認識的問題。物體的相互聯系，相互制約，正是它們存在的規律。

馬克思列寧主義的辯證法教導我們說，一切科學僅有當它正確地反映客觀的真實性，不反對實際並推動實際前進時，才能說明是科學的。

由於這些情形，我們應該認識到，分析與綜合在我們的教學方法和教學實踐中，不應看成是彼此分離的，而要看做是辯證的統一體。其實，學生不僅是解答難的複雜的應用題，即便在解答一次運算的簡單應用題時，同樣也要運用分析與綜合。如果學生在解題中，應用了所有的數，得到了正確的答案，那末他或者是由原題轉到主要的問題，或者是從主要的問題開始，構成解題計劃，並針對所提出的問題，挑選出必需的已知數——在這兩種情況中，他既使用了分析，又使用了綜合。甚至在簡單的應用題

中，如果學生由全文中選出分題，求出應得的數，並指出用什麼方法來解答這個問題，則實際上，他既運用了分析又運用了綜合。這樣的思維過程，不僅發生在解答應用題的時候，而且同樣也發生在由十以內的加法式題起到五六年級中整數和分數混合演算的最複雜的式題正的式題的解答中。

這裏舉一個簡單的證明：當給學生一個含有 6—7 步和更多步運算的式題時，這個學生就應把這個複雜的式題分成各個部分——運算，就是作了分析；但當作完這種分析，然後再進行運算時，學生也用了綜合：他統一，結合必要的數成爲一個運算，然後再作另一個，就是他又重新由部分組成了全體，也就是使用了綜合。

分析與綜合同樣在最初階段的教學和認識中廣泛地被使用着。還在一年級的識字教學中，就運用着分析—綜合法，同樣在選擇句子、作各種文藝的和應用的文章時，也應用這個方法。甚至兩歲到四歲的幼兒也運用分析和綜合來認識每個新的物體和玩具；他努力地分解物體、把玩具分成若干部分，然後再聯合這些部分，當他成功時，就非常高興，進行得不順利時，就非常不愉快。對這種實踐兒童是不感困難的。

很遺憾的是在個別的教学法中，對分析法的解釋常常認爲它是‘困難的’，‘難理解的’等等，大部分都採用綜合法，在中學裏僅有包含 2—3 個問題的應用題或是以前已用綜合法解答過的應用題，才用分析法分析。有個別的教師也抱着類似的見解。

對分析法與綜合法的這種解釋是不正確的，不科學的並且是與實際相抵觸的。優秀的教師在數學教學中得到了顯著的成績，是因爲廣泛地使用了分析法與綜合法的結果，他們一致地反駁了學生很難接受分析法的論調。在解題過程中，我們既使用分析，也使用綜合，所以認爲在我們解題時可以獨立地使用分析法或綜合法，這不是完全正確的。

關於分析和綜合的審查法，可以作為解題過程中的階段，認為在學校中主要應當採用綜合法，這是完全錯誤的結論。這是減低了分析的作用，並且也不符合於認識論以及在我們學校中教學解答應用題的實踐。

有些教師喜歡用綜合法，因為在解題時他可以較快地達到目的。但這只有在解內容非常明顯的應用題，和解可以兩兩順序計算的混合式題，或是已求出的數與下個數不用思考，不用分析就可以肯定算法和得出必要答案的混合式題時才是合適的。下面舉幾個這樣的應用題做例子。

第一題 斯達漢諾夫工人向建設管理局定造房屋，分五年付款。房屋總價 14,580,000 元*，第一 year 要付總價的 $\frac{1}{5}$ ，第二年付其餘的 $\frac{1}{5}$ ，第三年又付所餘的 $\frac{1}{5}$ ，第四年再付第三次餘數的 $\frac{1}{5}$ ，第五年付所有餘下的部分。問第五年付錢若干？

這裏數與數之間的關係非常簡單，主要是要求學生能解答一次運算的應用題，和精通計算的技術。

但也應廣泛地使用綜合法，特別是當解答比較複雜的應用題時，這些題內的已知數與未知數的關係不明顯，因此，會使學生處於非常困難的境地。下面就是這樣的一個應用題。

第二題 學校買電影票與戲票 280 張。一張戲票的價格與一張電影票的價格的比是 $3\frac{1}{4} : 1.3$ 。一張電影票比一張戲票賤 2400 元，戲票數是電影票數的 $27\frac{3}{4}\%$ 。問電影票與戲票共價若干？

當解答這種應用題時，只用綜合法及適合於這個方法的教學法，例如只問：‘先求什麼？然後再求什麼？’等等，是不能得到一個肯定的結果的。無疑的這裏必須應用分析與綜合兩種方法。

二 應用題條件的審查法

審查法可以區分如下：分析的、分析—綜合的及綜合的。在

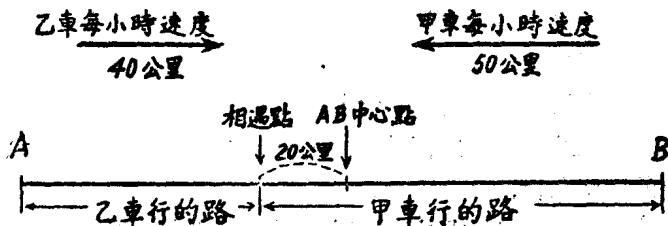
審查應用題時，如果由應用題中的主要問題開始到次要問題，這是分析法。如按相反的順序審查，即按已知條件，從次要問題到主要問題，這種方法是綜合法。

在實際應用時，常常是兩者兼用的。開始並不是把複雜的應用題分解成簡單的一次運算的應用題，而仍是化爲另外的複雜的應用題，但在內容上是比原來的應用題簡單了，然後接着又轉到綜合審查法並分別解答每一個分題。後面採用的這種審題法叫做分析—綜合法。

舉例說明應用題條件的審查法。

第三題 甲乙兩汽車從A、B兩點同時出發，相向而行。甲車由B點以每小時50公里的速度行進，乙車由A點以每小時40公里的速度行進。兩車在距中點20公里處相遇，求A、B兩點的距離？

第三題圖解



在圖形上標記行走方向，路程中點和相遇點應是根據條件分析的結果而確定的，即因兩車同時出發，也就是甲車每小時行50公里，乙車每小時行40公里，所以甲比乙行的路要多，因此按照條件的指示，相遇點應在乙車所行的這方面距中點20公里的地方。

關於這個應用題可以適當地做出下列的條件摘錄：

名 稱	路程(公里數)	每小時速度	時 間 (小 時 數)	求 解
甲 車 乙 車 甲車和乙車	相遇於距中點 20 公里處。總 的路程是AB。	50公里/小時 40公里/小時	同時出發	AB間的距離

作圖過程與摘錄條件本身已經表現一些條件的分析。假使在黑板上或是在筆記本上作這種摘錄，進一步的審查將如下例進行：

1. 查明本題已知的下列事實：

- (1) 汽車速度(50 公里和 40 公里)；
- (2) 行的時間(同時出發的)；
- (3) 相遇點(距中點 20 公里)。

2. 求解：AB間的距離。

我們回想一下，在題內包含的數與數之間的基本關係，就是距離、速度與時間之間的關係。要注意到，AB的全部路程是由甲車和乙車所走的兩段路程組成的。由此就得到一個結論，要求主要問題的答案，必須先知道兩個數：行走的時間和甲乙二車行走的速度之和。

速度之和很容易求，因為已知甲車速度是每小時50公里，乙車每小時40公里，所以要求的主要是行走的時間。

怎樣求時間呢？為此，我們要利用已知條件中的什麼東西，關於這個問題，我們知道了些什麼，在求出時間以前，我們要先知道一些什麼呢？

用這樣提問的方法和學生們一起求出答案如下：

已知二車相遇時距中點20公里，可以肯定相遇的位置是在中點的左方，順着甲車行走的方向，因為甲車較乙車走得快，而

它們是同時出發的，所以它們走的距離不同，也就是甲車走過距中點20公里，乙車還差20公里才到中點。因而可知到相遇時甲車較乙車多走了若干公里（這是由20公里加20公里算出來的，這一點在依照已知條件做的圖解中，也可以看出來）。

因此，我們求出甲車在全時間內較乙車多走了40公里。這就不難想到，如果在全時間內甲車較乙車多走40公里，那麼在知道了一小時兩車的速度差之後，就可以求出兩車行走的時間。顯然的，這個時間應等於兩車所行距離之差被它們速度之差所除得的商。

現在，很容易擬出解法全部計劃。

計劃中的問題要用與分析時相反的順序排列。

1. 如已知甲車每小時行50公里，乙車每小時行40公里，甲車較乙車每小時快若干公里？

2. 已知相遇處距全程中點20公里，到相遇處甲車較乙車一共多行了若干公里？

3. 如已知甲車在此時間內較乙車多走40公里，每一小時甲車較乙車多走10公里，兩車在路上走了若干時間？

4. 如已知甲車每小時行50公里，乙車每小時行40公里，兩車一小時共走若干公里？

5. 如已知兩車相遇時，它們各行了4小時，每小時兩車走90公里，A、B兩點間之距離為若干？

解 法

1. $50 - 40 = 10$ (公里)

2. $20 + 20 = 40$ (公里)

3. $40 \div 10 = 4$ (小時)

4. $50 + 40 = 90$ (公里)

5. $90 \times 4 = 360$ (公里)

答案: $AB=360$ 公里。

再舉一個例題。

第四題 第一個貨棧內有煤 185 噸, 第二個貨棧內有 220 噸。每日從每個貨棧內取出煤 15 噸, 問經若干日, 第二貨棧內存量是第一貨棧內存量的 2 倍?

這個題的解法基礎是減法的組成因素之間的關係及解差倍問題的技能; 這不只是五年級, 同樣在小學四年級的教學大綱上也是已經規定了的知識。

題中的條件告訴我們, 把煤取出之後, 第二貨棧的餘煤恰是第一貨棧餘煤的 2 倍, 也就是給了倍數的關係, 並且, 按實存的煤數可以知道它們的差的關係。提出以下問題對解答整個應用題是有益的:

1. 怎樣可以比較貨棧中現存的煤? (可以求第二貨棧存煤是第一貨棧的多少倍)

2. 要想用一次運算就能解答主要問題, 我們要先知道一些什麼? [要求從每個貨棧取出多少煤及每日取出多少煤(後一數字就是每日取出 15 噸)]。

常識與經驗應使學生們認識到, 兩個貨棧原有煤量之差與從兩個貨棧內取出等量煤後之差是不變的, 因為被減數同減數減去等量, 其差不變(在我們這個題內也有這種情形: 由 220 噸和 185 噸內分別取出 15 噸的同數倍, 原存煤之差 $220-185=35$ (噸)是不變的)。

因而可以作出如下結論:

兩貨棧間原存煤之差額與每次由第一、第二貨棧各取出 15 噸煤後餘數的差額始終等於 $220-185=35$ (噸)。由此:

1. 知道了差及倍數的比等於 2, 就可以求出貨棧內剩餘多少煤: 顯然的, 剩餘的一份為 35 噸, 二份為 $35 \times 2=70$ (噸)。

2. 然後按除數與被減數, 計算取出了多少煤, 因為我們知道

剩了多少煤，並且也知道原來有多少。

3. 知道了從每一個貨棧取出的煤的總量，及每天從貨棧中取出的噸數，可以解答主要問題，就是求出經若干日第二貨棧剩餘的煤是第一貨棧的 2 倍。

經過這種審查，很容易的就能作出解法計劃：

1. 求出原來第二貨棧與第一貨棧間存煤的差額。
2. 求出倍數差，設第一貨棧的剩餘為一份，第二貨棧的為二份，或是求出在第一貨棧剩餘的煤為若干。
3. 已知第一貨棧原存煤為 185 噸，剩下 35 噸，取出煤若干？
4. 如果共取出的是 150 噸，每日從每個貨棧取出的是 15 噸，要取若干日？

解 法

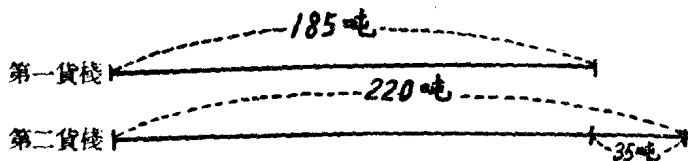
1. $220 - 185 = 35$ (噸)
2. $2 - 1 = 1$ (份) 即 35 噸
3. $185 - 35 = 150$ (噸)
4. $150 \div 15 = 10$ (日)

答案： 10 日。

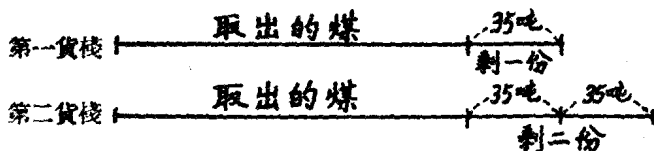
解答這個應用題使用圖解法是合適的，那樣，審查起來就非常容易，並且很快就能找出合適的解法。

作圖的本身就是分析法的一部分，在圖上可以看出原來的差與從每個貨棧取出同等數量的煤以後的差為 35 噸。已知第二貨棧的剩餘為第一貨棧的 2 倍，這樣很容易就能判定在第一貨棧剩的是一份，在第二貨棧剩的是二份，以及在第一貨棧剩的是 35 噸。因此，很容易就能作出在審查應用題時曾用過的解法計劃。

A. 原存煤



B. 取出若干個 15 吨之後剩餘的煤



解答這種類似的應用題之先，應解答一些較簡單的應用題做為準備工作。

應當口算一些較簡單的應用題，做為解答第四題的事先準備工作。

1. 第一貨棧有煤 40 吨，第二貨棧有煤 50 吨，第一天由每個貨棧取出 10 吨煤後，第一、第二貨棧中還剩煤若干？

2. 第二天又從每個貨棧中取煤 10 吨，各尚餘煤若干？

3. 第三天又從每個貨棧中取煤 10 吨，各仍餘煤若干？

4. 第二貨棧較第一貨棧多煤若干？

(1) 原來；

(2) 取出 10 吨之後；

(3) 第二次又各取 10 吨之後；

(4) 第三天又各取出 10 吨之後。

答案証實在這種情形之下，兩個煤棧存煤之差不變，所餘的為常數，因為被減數與減數在所有情形中，去掉的數都是相同的。

這些差數如下：

在第一天：

1. $50 - 40 = 10$ (噸)。
2. $(50 - 10) - (40 - 10) = 10$ (噸)。

在第二天：

$$(50 - 20) - (40 - 20) = 10 \text{ (噸)}。$$

在第三天：

$$(50 - 30) - (40 - 30) = 10 \text{ (噸)}。$$

提出下面一些問題也是很有益的：

1. 在這些情形中，第二貨棧所剩餘的煤是第一貨棧所剩餘煤的多少倍？
2. 第一貨棧與第二貨棧取出若干噸煤後，餘煤之差為若干，第一、第二貨棧原存煤之差為若干？
3. 第二貨棧餘煤是第一貨棧餘煤的若干倍，或它們倍數之比為若干(在第三題內)？

除此之外，還應教些從這些數的差倍關係來求未知數的其他準備性的應用題。例如：

1. 二數之差為 120，他們的商為 3，求此二數。
2. 第一數較第二數多 70，第一數是第二數的 6 倍。求此二數。

詳細地審查了以上的例題(第三、第四)，可以証明一點，即爲了要自覺地解答應用題，必須不僅採用分析法，同樣也要採用綜合法，或者更正確地說，也要採用分析—綜合法。

審查第三題和第四題，從主要問題開始，我們在各個情形下，不僅使用了分析，也使用了綜合。例如在審查第四題時，確定了主要問題——經過多少天，第二貨棧的存煤是第一貨棧存煤的 2 倍？——後，我們也注意了原來的已知數，在一個貨棧原存若干煤(185 噸)，在另一個貨棧原存若干煤(220 噸)。然後立刻按這些已知數求得新數，或是解析那些爲解主要問題我們所必需

回答的問題。這個題如果用‘純粹’分析來進行完全的分析審查法，對學生來說這是非常困難的，同時也顯然是不合適的。

當審查第三題時，我們也有過同樣情形。

確定了為解主要問題所必須知道的速度的和與時間的和以後，我們要進一步注意綜合的審查法，就是：注意甲車的速度及乙車的速度，並判清根據這些已知數可以並且也是應當知道的速度的和與差。審查了求甲、乙兩車到相遇時所行距離之差的可能性以後，我們放棄綜合法，重新又採用分析審查法。

在解答多數應用題時，也同樣發生這種情形；但是我們常叫其中的一種為分析審查法，而叫另一種為綜合審查法，這就要看審題時，我們要特別注意的是由原給的可以導出什麼，如何進行審查。或是由主要問題轉向次要問題，就是由未知數轉向已知數；或是相反地由已知數漸漸地進到主要問題。第一種審查條件的方法稱為分析法，第二種稱為綜合法。

應用題條件的審查是解題中的重要階段。在審查中分析題內數量間的主要關係，把複雜的應用題分解成它的簡單組成部分；審查也可以幫助聯合這些部分，也可以分解難題成幾個較容易的簡單的分題，解決了這些分題後，就可以得到應用題的主要問題的答案。

毫無疑問，審查的基本方法是分析法與綜合法。對各種不同的應用題，按他們難易的程度，按他們的結構，同時根據五六年級學生的基礎和發展的水平，教師在審查時必須具有很多的技巧和創造性的辦法。在實踐中有兩種審查形式：1. 預審和 2. 計劃完成後的完全審查。

必須使學生有運用思考力，表現自己的機敏性、主動性和創造性的機會。在審查時，要經常適當地提出下列問題：要求什麼？怎樣求？為什麼我們要求這個？怎樣可以簡化這個題？這個題與哪樣的題類似？