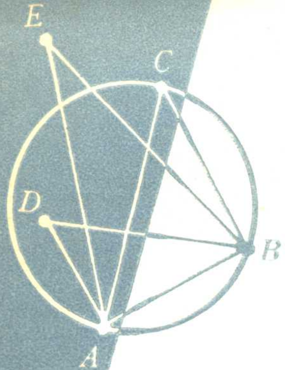

谈谈解答数学问题

赵 慈 庚

北 京 出 版 社

谈谈解答数学问题

赵 慈 庚

北 京 出 版 社

北京市中学生数学竞赛辅导报告汇集

1. 华罗庚：谈谈与蜂房结构有关的数学问题

2. 秦元勋：无限的数学

3. 赵慈庚：谈谈解答数学问题

谈谈解答数学问题

赵慈庚

*

北京出版社出版

北京市新华书店发行

北京印刷一厂印刷

*

787×1092 毫米 32 开本 1 印张 20,000 字

1979 年 1 月第 1 版 1979 年 1 月第 1 次印刷

印数 1—100,000

书号：7071·576 定价：0.10 元

目　　录

一、什么是数学问题……………………………………2

二、数学问题的结构……………………………………3

三、学会解数学问题——解题举例………………………5

§ 1．找出隐藏着的已知条件…………………………6

§ 2．不怕路途遥……………………………………8

§ 3．创造条件，突破难关……………………………11

§ 4．巧作安排，化繁为简……………………………14

§ 5．从特殊到一般……………………………………16

§ 6．检查答案，纠正错误……………………………20

§ 7．自问自答，由此及彼……………………………23

§ 8．知识丰富，得心应手……………………………25

§ 9．多方探索，少走弯路……………………………27

§ 10．逻辑推理作用大…………………………………29

时常有人问，怎样思考就可以顺利地把数学问题解答出来？我总是回答说："没有好办法．如果有的话，那就是多作题，多练习，熟能生巧．"我知道这个答复不能使对方满意，但是也无可奈何．事后自己反复地想，还是觉得没什么"诀窍"．然而对于解决数学问题，确实有人解得快，有人解得慢，还有人急得满头大汗，仍旧想不出来．这是怎么回事？于是我又有些模糊．

北京市中学生数学竞赛委员会要我给参加竞赛的同学讲一讲解答数学问题的方法．这对我来说却比解答数学问题还要难．但是一想到那几千名天天向上，如饥似渴地寻求知识的青年，又觉得不能推卸责任．我知道无法把这个问题讲得全面，只好尽我所知，在中学的学习范围内，就一般情况来讲一讲，作为我送给各位同学的一份薄礼．讲得片面就让它片面吧，只要对同学们能有一星半点的帮助就好．

打算讲的内容分两部分．第一部分先概括地谈一下什么是数学问题；第二部分借几个具体例题，谈一点分析和解决问题的方法．

一、什么是数学问题

恩格斯在《反杜林论》里说："纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系."明确地指出数学要研究的是形与数的关系．详细地说，其中有数与数的关系，形与形的关系，还有数与形的关系．这就概括了两个世纪以来数学这门科学里逐渐形成的三个分支——代数、几何、分析．因此我们可以粗略地说，数学问题自然也就可分为代数的、几何的和分析的问题了.如果大家是按分科学习数学的,就会清楚地知道这几种问题的区别．应当注意的是，人们虽然把数学分为这三个分支,可是这三个分支之间,还是互相渗透,互相促进的．所以，又不应该把它们绝对割裂开来，以致削弱了它们互相印证，互相启发的作用．教学上有见于此，便时常设置一些综合性的问题，要它们能照顾到两三个方面．

可能有人会认为，数学问题无非是计算性的和论证性的两种类型．的确，在中学学习期间所遇到的数学问题，大致都可以这样分类．然而解数学问题，主要的还是逻辑推理．加、减、乘、除是计算，可是加减乘除的方法与关系也是推理论证得来的，只不过人们用得熟了，也就不再去追溯它的理论根据了．讲到这里，我还得再一次提醒大家，数学是研究形与数的关系的．我们要注意这里的"关系"两字．这怎样讲呢？举例来说，$a:b=c:d$ 和 $ad=bc$ 都是数与数之间的关系，而这两个关系之间又有关系

$$a:b=c:d\Longleftrightarrow ad=bc;$$

a^2+b^2 和 $2ab$ 都是数与数之间的关系，而这两者之间又有关系

$$a^2+b^2\geqslant 2ab;$$

两三角形相似与它们的对应角相等都是形与形之间的关系，而这两者之间又有因果关系

$$\text{两三角形相似}\Rightarrow\text{它们的对应角相等};$$

两直线平行是形与形之间的关系，斜率相等是数与数之间的关系，这两个关系之间又有关系

$$\text{两直线平行}\Longleftrightarrow\text{它们的斜率相等}.$$

以上所举的这一切，都是形与数之间的关系．从一个关系到另一个关系都是根据逻辑推演的，就是说用推理论述的．数学的内容都是由一个关系到另一个关系的推演交织而成的．所以我说数学问题应该以推理为主，也就是说解决数学问题时，主要是推理论证．

二、数学问题的结构

数学问题有两种形式．一种是说明情况，让我们去找出某个结果（数或形）．这种问题往往只给出了所求目标的大概范围，而没有明细的结果．平常所谓计算题都属于这一类．另一种是告诉我们若干情况，又告诉我们在这些情况之下将要发生的结果，让我们说明结果的必然性．平常所谓证明题都属于这一类．两种情形虽然不同，但都必须给出产生结果的原因，这就是所谓“假设条件”，或“已知条件”，或“充分条件”．由假设条件到终极目标都要用逻辑推理．这样说来，

两种问题还是共同之处较多，它们的区别仅仅在于目标或者结论，有的结论半明半暗，有的明白肯定．总的来看，可以说数学问题是由“原因”（假设）与“结论”组成的，原因又简称“条件”．

问题中的假设条件最关重要．要想产生所期待的结果，给出的假设条件不许多也不许少．少了不能达到目的，自然不行；多了就是浪费，更坏一点也许会发生矛盾．这都是提出数学问题所不允许的．解数学问题时，必须时时刻刻注意假设条件，必须先想到每个条件可能产生什么结果，把它的效能都记得清清楚楚，等待使用．还得记住，个个条件都应能用得上．如果未将条件用完，就把问题解决了，那末若不是题目出得不恰当(这情形很少)，就一定是解答有错误．一个条件也未必仅用一次，不能说用它一次就可以把它放下．所以在问题没有解完以前，一刻也不能放松对于它们的注意．

大家知道，问题有难有易．难易之分，还在于问题的结构．数学问题都是由假设产生结论．从假设到结论有一段路程．路上障碍多，疑问多，问题就难；一路平坦，问题就容易．通常所谓难题，主要有三种情形（这是只就极普通的情形说的）：第一是假设条件不明显，我们不能一下子抓住它，让它起作用；第二是假设条件与结论相距很远，要进行许多步论证才能达到结论；第三是已知条件太多，难于记忆，而这些条件都能产生什么结果，又头绪纷繁，更不知道在什么关节上应该利用哪个条件，于是不免使我们感到眼花缭乱，甚至一时不知从何着手．这种情形最麻烦．大家知道几何题多半难解．几何题之所以难，大致可以说是因为几乎多

数几何题里都包含有这三种情形的原故.

三、学会解数学问题——解题举例

解数学问题，就是通过逻辑推理，把问题的假设与结论沟通起来. 仅有已知条件，一般不能立即达到结论，还要借助于庞大的数学知识. 假设条件专对本题起作用；数学知识则可供一切问题采用，它们是解一切数学问题的基础. 所以在一定的意义上说，解题能力是数学知识的表现. 解题能力的大小，主要取决于你所拥有的数学知识的厚薄（这里所谓"厚"包括熟练，不仅是"多"）. 正如运动健将的基本条件是健康的身体；李四光独见中国不贫油是因为他在地质科学上有高深的造诣并对中国的地质情况有充分的了解. 要想解出较难的数学问题，必须精通许多数学理论.

大家最关心的可能是解答问题的"灵活性". 怎样才能使自己的头脑灵活？这问题可不容易回答. 要知道，所谓"巧"往往不是大道，只是捷径. 捷径不能处处有，解题技巧又是各有千秋，说也说不完的，更无法用一套什么"大道理"把它们统统概括起来. 我至今还没看到谁写出了一本专讲解题捷径的"道理"的书呢. 其实，把基本的数学理论学通了，解题的捷径是不难找到的.

下面，略举几例（其中有的是过去的北京市中学生数学竞赛试题）作为示范，着重谈一谈分析问题的途径和解题时应当注意的问题，希望能对同学们有所帮助.

§ 1　找出隐藏着的已知条件

例 1. 已知正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 成等差数列，求证

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$

$$=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}. \tag{1}$$

（1962年竞赛，高二第一试试题）

问题的已知因素是 $a_1-a_2=a_2-a_3=\cdots=a_{n-1}-a_n$. 如果把这公差叫做 d, 那么 $a_n=a_1-(n-1)d$. 又知道这数列之和等于$\frac{1}{2}n(a_1+a_n)$, $\cdots$. 解这题未必都用到这些关系，但是必须意识到它们，准备使用. 假设条件又说 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正数，这又该在什么地方起作用呢？看到(1)里用的是这些数的平方根，就知道这条假设有一方面是为了让 $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, $\cdots$, $\sqrt{a_n}$都是实数.

证明等式，一般是把复杂的一端变为简单的一端. 现在不管怎样，一定要用上公差才能把式子化简. 但又一时看不清公差在哪里. 这样，我们就要设法抓住它，让它起作用.

实践是最可靠的途径，问题不得其解时，可以通过实践试探. 第一，$n=2$ 时，(1)的左端仅有一项$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}$, 而右端恰好也是它. 这一步没给我们什么启发. 第二，看 $n=3$ 怎样. 这时(1)的左端是

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}.$$

无理式加法，通常先要将分母有理化．现在就这样试一试：

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3}.$$

好！右端两个分母就是公差 d．如果把这两个分母都换作 d，不用通分就可以相加了，结果是$\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_3}}{d}$．化简的目的达到了，可是这结果还与(1)的右端不符，得要继续努力．对未知其真假的结果$\frac{3-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}}$，也使分母有理化，

$$\frac{2(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_3})}{a_1-a_3}=\frac{2(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_3})}{2d}=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_3}}{d}.$$

现在知道 $n=3$ 时，(1)式也对．

经过这段工作，便知道化简(1)式左端的难关(分母不同不能相加）可以借分母的有理化解除，同时也发现了公差的作用．于是我们得到：

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$
$$=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}}{d}.$$

至于把$\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}}{d}$变成$\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$，倒不一定要从有理化

$\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$的分母着手，在$\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}}{d}$里把 d 换成$\frac{a_1-a_n}{n-1}$更省事．

这问题给我们的启示有两点：第一，题目里假设了 a_1，a_2，…，a_n 是等差数列，就必须把它们的公差用上才能把问题解决．第二，学习数学要注意概念，例如要注意公差的意义，更重要的是要注意概念的实质．比如不说等差数列是

$$a,\ a+d,\ a+2d,\cdots,\ a+(n-1)d$$

而说它是

$$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\cdots$$

行不行？照样地行．等差数列的要点在于相邻两数之差相等，不在于用什么形式来表示它．表达形式只是在使用时，有便与不便的关系．只要说到等差数列，就应当马上意识到它的公差和公差对于数列的构造的作用．等差数列的概念较为简单，似乎不值一谈．然而在数学问题中所遇到的数学概念并不都如此简单，要养成这样的好习惯才能减少学习上的阻力．

§2　不怕路途遥

路途长了，中途的叉道就多．解这样的问题应该从两头凑．不但从假设条件往后看，还要从结论往回找．

例 2．已知

$$\sin\alpha+\sin\beta=p, \tag{1}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=q. \tag{2}$$

求 $\sin(\alpha+\beta)$ 和 $\cos(\alpha+\beta)$.

（1963 年竞赛，高二第一试试题）

我们知道，

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

但是已知条件里没有 $\sin\alpha\cos\beta$, $\cos\alpha\cos\beta$ 等. 这就得按照需要把假设条件开拓一下，创造条件.

要想“制造”$\cos\alpha\cos\beta$ 或 $\sin\alpha\sin\beta$，可以分别将(1)、(2)自乘，得

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta=p^2, \tag{3}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=q^2. \tag{4}$$

想要排除这里的 $\sin^2\alpha$, $\sin^2\beta$, $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, 自然要把两式相加，得到

$$2[1+\cos(\alpha-\beta)]=p^2+q^2. \tag{5}$$

可惜这结果里出现的是 $\cos(\alpha-\beta)$, 与我们的希望不合. 想要出现 $\cos(\alpha+\beta)$, 就该由(4) 减(3)：

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+2\cos(\alpha+\beta)=q^2-p^2. \tag{6}$$

又不巧，有了 $\cos(\alpha+\beta)$, 却带来了 $\cos 2\alpha+\cos 2\beta$.

暂且把这放下，再看看能否先求 $\sin(\alpha+\beta)$. (1)与(2)相乘，整理后得

$$2\sin(\alpha+\beta)+(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)=2pq, \tag{7}$$

或者

$$2\sin(\alpha+\beta)[1+\cos(\alpha-\beta)]=2pq. \tag{8}$$

仍没有求得 $\sin(\alpha+\beta)$, 可是发现了(5) 式的左端是(8) 式左端的因子. 用(5) 除(8)，就得到

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2pq}{p^2+q^2}.$$

这里要紧的一步是把 $\sin 2\alpha+\sin 2\beta$ 换作

$$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta),$$

不然的话，只有(7) 和(5)，发现不了求 $\sin(\alpha+\beta)$的线索。

有了 $\sin(\alpha+\beta)$再求 $\cos(\alpha+\beta)$，固然可以从勾股关系上解决，但是这样作可能产生增根，所以我们宁愿再看看别的方面有无路径．前边为了求 $\cos(\alpha+\beta)$得到了(6) 式，因为里边有 $\cos 2\alpha$，$\cos 2\beta$，把它放弃了．现在经过从(7) 到(8) 的启发，再把

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta=2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

代进去，得

$$2\cos(\alpha+\beta)\left[\cos(\alpha-\beta)+1\right]=q^2-p^2. \tag{9}$$

这时自然又想到(5)，可以和它合作，从而得出

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{q^2-p^2}{p^2+q^2}.$$

和差变积公式在这里起的作用不小．是它把(6)、(7)两式送上了有利于解题的途径，变成(8)、(9)，才可以用(5)化简．所以我们应该把公式记得很熟。公式不熟便好象睁眼瞎子，眼前的大路看不见．

作完一个题之后，应该再想想，有没有其它更好的路．现在这题得以解决，和差变积公式的功劳较大，既然如此，可否提前使用这公式呢？把(1)、(2) 改作

$$2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=p,$$

$$2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=q.$$

两式相乘，得

$$\sin(\alpha+\beta)\times 2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=pq.$$

再把 $2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$换成 $1+\cos(\alpha-\beta)$，便又得到(8) 式．和前边比较起来，仅是在计算上省事一点．

§ 3　创造条件，突破难关

从假设到结论的过程，若是没有曲折，就不是难题．稍难一点的题，总有若干曲折．遇到这种情形，需要我们创造条件，解除困难．几何问题的曲折一般较多，添设辅助线就是创造条件．

例 3. 试证：三角形两边的乘积，等于这两边夹角的平分线所分第三边的两段之积，再加该夹角平分线的平方．

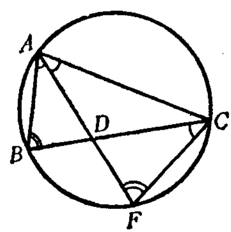

图 1

把问题具体地明确一下．如果AD平分 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$，交 BC 于 D(图 1)．要证明的是

$$AB\times AC=BD\times DC+AD^2. \tag{1}$$

先回忆一下，$\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的平分线 AD 有什么性质？第一，BC 被它分成的两段 BD 与 DC 之比，等于 AB 与 AC 之比；第二，把它延长，与$\triangle ABC$ 的外接圆再交于 F，F 一定是$\overset{\frown}{BC}$的中点．从这又联想到$\angle DCF=\angle BAD=\angle FAC$．另外还看到$\angle DBA=\angle CFA$，$\cdots$．

要证明的(1) 式是线段的二次齐次式．线段的乘积多半产生于比例，而比例线段又时常发生于相似三角形．那么我们先看看图 1 里有哪些相似三角形，同时注意比例线段．

$\triangle ABD\sim\triangle CFD$，由此$\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{BD}{DF}=\dfrac{AB}{CF}$，所以有

$$AD\times DF=BD\times DC \tag{2}$$

等等．这里出现了(1)式右端第一项 $BD\times DC$．又$\triangle ABD\sim\triangle AFC$，由此$\dfrac{AB}{AF}=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{BD}{FC}$，所以有

$$AB\times AC=AD\times AF \tag{3}$$

等等．这里出现了(1) 式左端的 $AB\times AC$。将(2)、(3)代入(1)，就可以把问题转化为求证

$$AD\times AF=AD\times DF+AD^2.$$

去掉两端的公因子 AD 之后，$AF=DF+AD$ 显然成立．

将以上的分析工作，略加整理与充实便是证明．这里从略。这问题的假设条件很明白，也能直接看出它起主要作用，只是不把 AD 延长到 F 便不能使它发挥作用．问题之难也就难在这一点．画外接圆，延长 AD，都是添辅助线，都是搭桥铺路，创造有利条件．使我们这样添辅助线的意图是要找相似三角形。未画外接圆与 DF 之前，图里没有相似三角形．为了制造相似三角形才想到这一套关系．

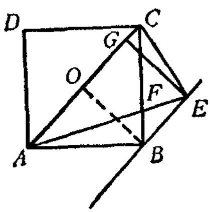

图 2

例 4．如图 2，BE 平行于正方形$ABCD$的对角线 AC。

$AE=AC$, AE 交 BC 于 F. 求证$CE=CF$.

显然 ACE是等腰三角形.当真 $CE=CF$ 的话,$\triangle CEF$便也是等腰三角形. 它们已经有一个公共角 $\angle AEC$, 那么应该有

$$\triangle ACE \sim \triangle CEF. \tag{4}$$

要想达到这目的，只要能证明这两个三角形另有一角相等就行了,于是希望知道$\angle CAE$ 多大.从图形看,好象 $\angle CAE$ 等于30°. 作$EG \perp AC$ 造成直角三角形 AEG 试试看. $\angle CAE$是它的一个锐角. 在这三角形里,

$$AE=AC=2\,OB=2\,EG. \tag{5}$$

所以 $\angle CAE$ 确实等于 30°. 然后知道 $\angle ACE=75°$，进而$\angle FCE=\angle ACE-\angle ACB=75°-45°=30°$. 所以(4) 式成立. 问题解决了.

打破本题难关的是辅助线 EG. 接着冲上去取得决定性成功的是 $AE=2\,EG$. 这是变相的 $AE=AC$. 如果把最初假设的 $AE=AC$ 换作 $AE=2\,OB$, 问题就容易得多. 所以发现 $AE=2\,EG$ 是关键, 也说明辅助线 EG 是成败攸关的. 这一步是观察到 $\angle EAC$ 好象等于 30°之后作的. 这说明作图正确对于证明几何问题有一定的好处.

假设的 $AE=AC$ 的作用很明显, 但是看不到 $AE=2\,EG$ 就不能发挥 $AE=AC$ 的作用. 这是几何问题曲折隐晦的典型.