

# 地球物理大地测量学

## —— 地球的慢形变

[澳] 库尔特·拉姆贝克 著 黄立人 沈建华 张中伏 肖建业 译

测绘出版社

# 地球物理大地测量学

——地球的慢形变

[澳] 库尔特·拉姆贝克 著

黄立人 沈建华 译  
张中伏 肖建业

测绘出版社

(京)新登字 065 号

## 内 容 简 介

本书从地球物理学的角度来讨论大地测量学,从大地测量观测对象——地球的物理背景出发,讨论了地球的运动和变形,进而论证了现代大地测量学在研究地形变及产生这种变形机制方面所采用的主要技术手段和方法,已经取得的主要成果,以及在推动地球物理学进一步发展方面,大地测量学所能起的作用和主要研究方向。全书论述深入浅出,很有特色,对于大地测量和地球物理工作者及广大地学科技人员都是一本很好的参考书,尤其对促进地学各学科的渗透发展很有意义。

本书可供大地测量、地球物理工作者及广大地学科技人员、大学有关专业师生学习参考。

### 地球物理大地测量学

[澳] 库尔特·拉姆贝克 著

黄立人、沈建华、张中伏、肖建业 译

\*

测绘出版社出版·发行

河北地质六队美术胶印厂印刷

新华书店总店科技发行所经销

\*

开本 787×1092 1/16·印张 32.5·字数 750 千字

1995 年 1 月第一版·1995 年 1 月第一次印刷

印数: 001—700 册·定价: 38.00 元

ISBN 7-5030-0665-X/P·255

## 译者的话

K·拉姆贝克是著名的地球科学家。为了表彰他在地球与行星形成和动力学的研究中作出的卓越贡献，1992年5月在美国巴尔的摩举行的AGU大会上，授予他查里斯·A·惠顿奖章。颁奖公告中称“K·拉姆贝克是继A·E勒夫和H·杰弗里斯之后最全面的地球动力学家。在近几十年中，没有一个人象他那样分析了如此之多的与固体地球随时间的变化及其与液态球的相互作用有关的各种现象，…他在固体地球物理的广大领域中所表现出来的博学与聪明才智是毫无疑问的，现在，我们对地球自转的表观形态、潮汐耗散、冰后回弹、岩石圈演化及其它方面的许多认识都强烈地受到K·拉姆贝克的影响。”

“地球物理大地测量学——地球的慢形变”是K·拉姆贝克的一本代表性著作。译者在1988年第一次见到这本书时，就被书中对大地测量学的独特视角、大地测量学对地球物理学的贡献、作用和未来发展的精辟论述所吸引，意识到对于从事地球动力学研究的大地测量学家和地球物理学家来说都是一本极好的参考书，从而产生了要将它翻译出来供更多的同行们参考的强烈愿望。

承蒙K·拉姆贝克教授的慷慨应允，同意我们将此书全文翻译出版。也承蒙国家地震局地震科学联合基金会和科技监测司在出版经费上的资助和测绘出版社文湘北同志的大力支持，终于使本书得以翻译出版，了却了译者多年来的心愿。

由于本书涉及的内容十分广泛，更有许多是当今地球动力学前沿课题，为了弥补译者在学识上的不足，书中的有些章节约请了有关专业专家审校，他们是：中国科学院上海天文台的朱文耀研究员，国家海洋局海洋科学情报研究所的王骥研究员，于庆武高级工程师，天津市地震局的王俊国高级工程师。译者愿意借此机会对这些专家的支持和帮助表示深切的谢意。译者还要对马青同志为本书的出版，在大量的图件和文字处理、编排工作中付出的辛勤劳动表示感谢。

本书由黄立人进行了统一的译校和定稿。

译者

1994.10 于天津

# 前 言

大地测量学研究的是地球的形状和重力场。研究的方法包括地面三角测量、水准测量、重力测量和基于诸如人造卫星和月球跟踪这样一些为空间研究而发展起来的技术基础上的一些方法。这些观测结果已经揭示出这颗行星的形状和重力场在从几小时到几十年的相对较短的时间内都是在变化着的。地球物理学和地质学的证据表明，地球既经受着地震学所揭示的不到一小时的很短周期的明显变形也经受着 10 年或更长期的长周期的变形。处于这两个极端之间的大地测量观测形成了地球动力学特性研究的一个不可缺少的部分。我在这里用了“地球物理大地测量学”这样一个术语来描述那些与地质学和地球物理学证据一起对地球的慢形变研究有贡献的大地测量学方法。这种慢形变包括地壳运动研究、重力场的空间和时间变化，行星自转和潮汐变形。

在本书中，我试图为过去一直在进行着的和现在有可能进行的大地测量学实验提供一种地球物理学和地质学的理论基础。我也想使对于大地测量这一学科的错综复杂性不熟悉的地球科学家对大地测量学的潜力、原理和方法有较深入的了解。因此它既不是一本大地测量学教科书，也不是一本地球物理学教科书，它也不指望对这门学科作完整的讨论。我假定读者对这两门学科已有所了解，例如阅读过诸如奥非塞（1974）、斯坦西（1977a）、考拉（1966a, 1968）、海斯凯能和莫里茨（1967）和庞福特（1971）写的书。必要的地方我也给出了一些参考文献，使读者可以找到背景资料。本书是为大地测量学和地球物理学的研究生写的，但那些正在读最后一年课程或取得第一个学位的大学生也会发现本书是有用的。本书也是直接为那些从事两个学科交叉点上工作的科学家，即为那些希望了解测量结果的地球物理学含义的大地测量学家和想知道大地测量已经取得了什么样的成果的地球物理学家而写的。

第一章是大地测量观测结果在地球动力学研究中的作用的简单综述。本书的第二~四章以提要的形式给出了以后的章节所需要的大地测量和地球物理的背景资料。第二章回顾了研究参考框架的某些大地测量的基本概念和外部重力场的数学性质。第三章简要介绍了与理解大地测量观测结果有关的地球物理问题和现象。许多大地测量的观测结果受到海洋和大气中质量迁移的影响，因此第四章中回顾了水圈随时间变化的特性。接下去的 4 章讨论了包括地面和空间测量方法的大地测量的过程。第五章中讨论的经典地面测量结果提供了变形和运动的部分记录。这些记录可以追溯到 19 世纪，虽然测量结果精度相对较低，但这些观测结果仍然是很重要的。第六章研究应用人造卫星的大地测量方法，这里人造卫星可以作为地球重力场的传感器，也可以作为测量地球自转和变形的手段。这些方法是随着 1957 年发射第一颗人造卫星而诞生的，它已对测定全球重力作出了重要贡献。最新的贡献则是在地壳运动的动力学研究方面，而（卫）星载测高仪的引入又使它在海洋表面动力学研究方面也有重要贡献。第七章讨论月球激光跟踪对于地-月系统动力学研究的应用。第八章讨论射电源的长基线干涉测量对行星自转和变形测量的应用。后面的 3 章讨论这些观测结果与其它的地质学和地球物理学证据综合起来解释地球的变形。这些章中包括重力测量（第九章）、构造运动和地壳变形（第十章）、行星的自转和潮汐（第十一章）的

讨论。虽然章节的这样细分多少有些随意性，但都比较方便。例如重力测量和地壳运动观测通常对同样一些构造问题例如构造板块的扩张边缘和会聚边缘的研究有贡献。也可以有别的分法来讨论这些问题。例如可按地球的粘滞性为主线分成这样几章：自转和潮汐观测提供了全球耗散函数  $Q$  的估计；重力观测主要对地壳和岩石圈的粘滞性也对地幔提供了约束，而地壳变形和相对海面变化的观测为地幔的粘滞性提供进一步的估计。第二种分法是以地壳和岩石圈结构和动力学为题，重力测量和地壳变形观测对此都有许多贡献。第三种是以核幔相互作用为题：自转和潮汐观测可深入了解核幔耦合过程，而重力观测则可了解核幔介面的几何形状。但这种分法会忽略掉许多其它的地球物理应用，因而本书中还是保留了较传统的分目方法。

在大地测量观测结果对于地球物理和地质问题应用实例的选择方面，个人的兴趣肯定会导致某些偏差，但我还是尽力选择一些能说明各个方面的应用，并可能成为研究前沿的例子。不过，我肯定不可能涉及对于当前和将来必定是有益的所有课题。

K·拉姆贝克

1987年10月于堪培拉

# 目 录

第一章	综述 .....	1
第二章	大地测量的若干概念 .....	4
§ 2.1	重力与重力位 .....	5
§ 2.2	位理论要点 .....	6
§ 2.3	坐标参考框架 .....	20
§ 2.4	岁差与章动 .....	28
§ 2.5	一个可变形体的旋转运动: 一般公式 .....	37
第三章	地球物理背景 .....	41
§ 3.1	地球径向结构 .....	41
§ 3.2	横向变化 .....	53
§ 3.3	板块构造假说 .....	57
§ 3.4	某些特殊的荷载问题 .....	63
第四章	水圈与大气圈 .....	77
§ 4.1	海平面 .....	77
§ 4.2	晚更新世和全新世海平面 .....	83
§ 4.3	海洋潮汐 .....	93
§ 4.4	大气 .....	107
§ 4.5	运动的大气 .....	111
§ 4.6	地表水和水平衡 .....	118
第五章	地面大地测量方法 .....	120
§ 5.1	控制测量 .....	121
§ 5.2	应变分析 .....	135
§ 5.3	重力测量 .....	142
§ 5.4	天文纬度、经度和时间 .....	150
§ 5.5	倾斜和应变 .....	155
第六章	卫星测量方法 .....	159
§ 6.1	轨道力学 .....	159
§ 6.2	观测地球卫星 .....	185
§ 6.3	大地测量参数估算 .....	201

§ 6.4	海洋学参数估算 .....	225
<b>第七章</b>	<b>测月方法 .....</b>	<b>228</b>
§ 7.1	月球的运动 .....	228
§ 7.2	月球潮汐 .....	250
§ 7.3	月球激光测距 .....	252
§ 7.4	月面测量和大地测量常数的估算 .....	259
<b>第八章</b>	<b>射电干涉测量方法 .....</b>	<b>267</b>
§ 8.1	长基线干涉测量原理 .....	268
§ 8.2	估算大地测量和地球物理参数 .....	279
§ 8.3	卫星射电干涉测量 .....	286
<b>第九章</b>	<b>地球重力场 .....</b>	<b>287</b>
§ 9.1	解释: 一般的考虑 .....	290
§ 9.2	重力和大地构造: 某些例子 .....	309
§ 9.3	核幔边界 .....	323
<b>第十章</b>	<b>地壳运动 .....</b>	<b>327</b>
§ 10.1	地壳和岩石圈应力 .....	328
§ 10.2	瞬时全球构造运动 .....	335
§ 10.3	地质时间尺度上的垂直运动 .....	344
§ 10.4	板块边界变形: 某些实例 .....	358
§ 10.5	冰后回弹 .....	371
<b>第十一章</b>	<b>地球潮汐与自转 .....</b>	<b>380</b>
§ 11.1	地球的自由转动方式 .....	381
§ 11.2	地球的受迫章动 .....	398
§ 11.3	勒夫数的潮汐估值 .....	402
§ 11.4	潮汐加速度、转矩和耗散 .....	415
§ 11.5	自转的某些激发机制 .....	429
<b>第十二章</b>	<b>结语 .....</b>	<b>448</b>
§ 12.1	符号说明 .....	451
§ 12.2	基本常数 .....	457
	参考文献 .....	460



# 第一章 综 述

地球物理观测是提供有关地球内部结构信息的主要来源。它们包括地震波的走时、振幅和频率、通过地表的热流量和磁场参数。行星的形状和外部重力场的大地测量观测则提供进一步的约束。这些观测结果与物理和化学参数一起成为估测地球内部的性质并构成描述这颗行星和其它类地行星演化模型（主要是用外推的方法）的基础。地质学，包括地貌学和地球化学的观测结果，是了解地壳演化史、变形事件史、变质作用史、岩浆活动史以及水平和垂直运动史的关键。古地磁学提供了大尺度的水平位移和变形的主要的定量证据，这种位移和变形在  $10^6$  年中平均为每年几个厘米。地震活动性研究在短得多的时间尺度上提供了地壳的局部和区域变形的信息。中心的问题是确定导致这种变化的物理过程。作用在地壳上的已经发展成当前这种状态的力的性质如何？造成大尺度水平运动的过程是什么？产生变质和岩浆活动的热源起源是什么？大地测量对于了解这些地质过程的贡献有两个方面，第一方面是大地测量的观测结果为地球对已知力的响应提供了一种量度，例如，在地表荷载问题中，作用力是已知的，变形的观测结果为地壳和地幔的流变性质提供了约束。第二方面，大地测量观测结果被用来对力本身提供约束。

许多地球物理观测结果可用径向对称地球模型来拟合，但重力场的卫星测量结果表明横向结构也很重要，这些资料提示了地球内部的非流体静力状态。这些全球重力测量结果反映了地球内部的动力学过程，为地球的现今结构提供了进一步的约束，并间接地对地球的演化提供了约束。

地球变形的谱如图 1.1(a)所示。在低频和长波长上，地球的优势变形与地幔对流、地幔的表面形状、板块大地构造有关。在谱的高频部份，时空维上的优势变形为地震位移场、板块大地构造的现时表现形式和地幔对流。因此，空间—时间谱的两个极端彼此间有密切的关系，与许多中间波长—时间尺度的变形也有密切关系。全球构造运动的证据是很多的，但描述这种运动的模型则基本上是运动学模型，只有很少的模型解释引起地表运动的动力学机制，也很少有模型解释地壳或岩石圈下的变形。现代地球物理学和地质学的中心任务是要定量了解涉及的机制。近年来向着这个目标已经取得了显著的进展，但远不能说对这个问题有了充分的了解。这种状况可以归因于几个方面的原因，其中的两个原因尤其与本书的主题有关：我们关于地壳和地幔流变学的知识有限；对于作用在行星内部的力的性质的了解也很有限。因此许多地球物理研究不仅直接是为解决全球问题的，而且也是为了解决相当专门的问题的，包括地球的地震模型的进一步改进，地壳和地幔流变性质的确定，以及板块边界和板块内部的构造过程的研究。

广义的大地测量学包括地壳运动的研究，重力场的时、空变化及地球的潮汐和自转变形，大地测量学的观测结果在地球结构和演化的研究中起着重要的作用。图 1.1(b)归纳了可用来验证图 1.1(a)所归纳的变形的特定的大地测量技术。在很长的时间尺度上，重力和大地水准面异常的观测结果提供了有关地球内非流体静应力和地球对这种应力的响应的信息。例如，在海山或沉积盆地上的重力观测结果可提供岩石圈对时间尺度为  $10^6 \sim 10^7$  年

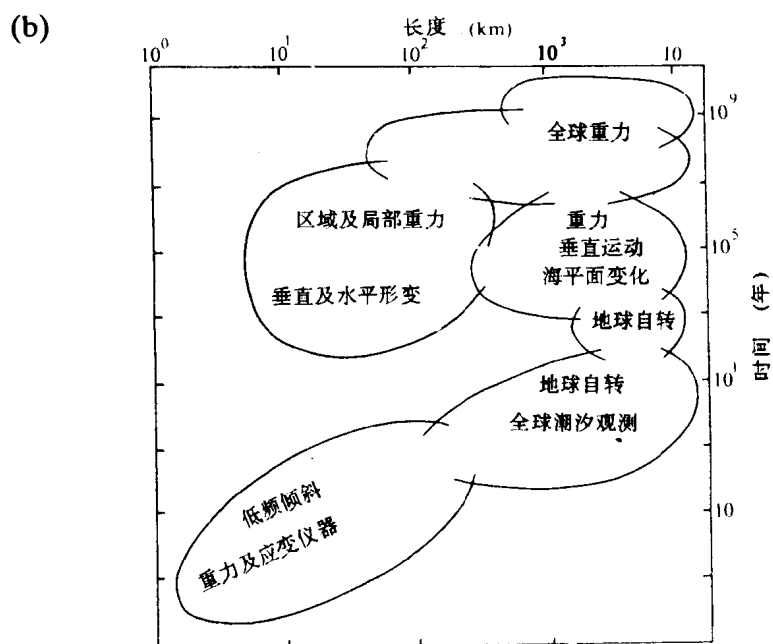
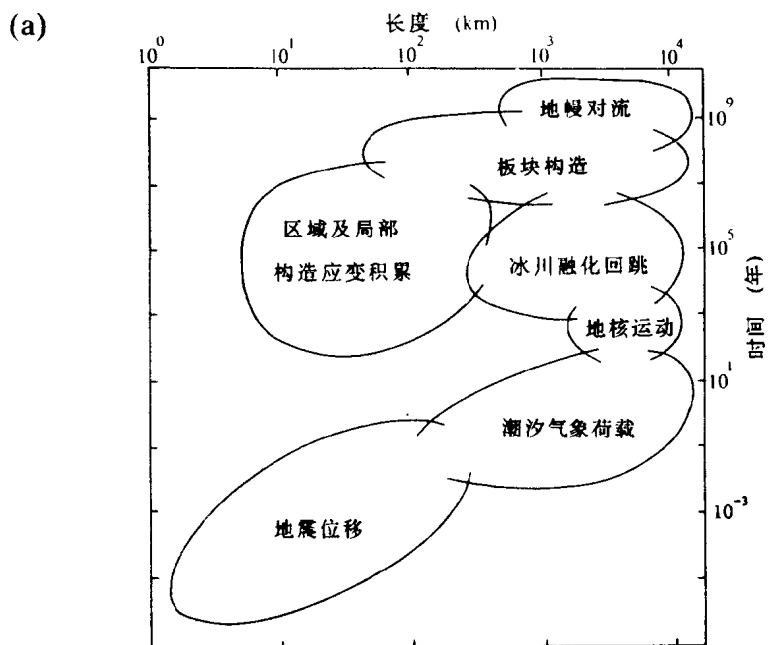


图 1.1 (a) 导致地球变形的地球动力学过程的空间-时间谱。(b) 与测定这些变形有关的大地测量技术。

的荷载响应的量度。在  $10^3 \sim 10^4$  年的时间尺度上，海平面的视变化提供了地幔对发生在 18000 年至 6000 年以前的大范围的冰川消退的响应的估计，在更短的几天到几十年的时间尺度上，固体潮和地球自转的观测结果提供了地球的全球弹性和非弹性响应的估计。在局部上，大地测量观测值提供了地壳变形的估计，而这种变形由于地震仪的响应频带宽度不够是探测不到的。倾斜和应变测量结果也可以解释地震前后的变形过程。

尽管大地测量不能解决每一个地球物理问题，但在许多情况下，大地测量观测结果起着某种佐证作用。但必须承认，这些观测结果只能提供整个地球史上很短一段时间（最多是 100 年）内的信息。应用历史和古生物学的观测结果（例如在研究地球自转时）和通过考察地貌证据（例如在研究海平面相对于现今海岸线的变化时），有时可以拓展这个时间段。这种外推，对于填补变形的现时大地测量观测结果与在  $10^6$  年或更长在地质时间尺度上代表平均速率的运动和变形的地质和地球物理观测结果之间的空白确实是必要的。

## 第二章 大地测量的若干概念

这一章中汇集了后面几章讨论大地测量方法和地球物理学问题时所要用到的很多大地测量的概念和公式。这里，这些概念的讨论和有关公式的推导不可能是很完备的，读者需要参看其它一些大地测量文献，例如 Bomford (1971)、Heiskanen 和 Moritz (1967)、Levallois (1970)、Vanicek 和 Krakiwsky (1982)。这里归纳的两个主要题目是：(i) 位理论问题，这是讨论地球形状和重力场解所需要的。(ii) 参考系问题，这是讨论行星自转及表面变形所需要的。此外，这一章中还收集了后面章节所需的许多其它公式。

在 2.2 节中，扼要地讨论了地球形状理论，选择代表地球形状的特定的等位面是大地水准面。它是这样一个面：在海上与相应的平均海面相差在 1~2 米之内。这个面的一级近似可以用一个扁率  $f = (R_e - R_p) / R_e \approx 1/300$  的椭球来表示。式中  $R_e$  和  $R_p$  分别为地球的平均赤道半径和极半径。这样一个面为这颗行星提供了一个很方便的参考形体，大地水准面偏离这个参考椭球的距离  $N$  叫做大地水准面高。对于大部分大地测量工作来说，参数  $f$  和  $R_e$  的选择是使得这种大地水准面差距为最小，因  $N$  大约为 100m 的量级。 $N$  的观测精度接近于 20cm，因此  $\sigma_N / R_e \approx 3 \times 10^{-8}$ 。定义大地水准面的主要观测是重力  $g$ ，任何地球参考模型的理论都必须有这个参考椭球的重力场的公式。对于地球物理解释来说，比这个最佳拟合的椭球体更为有用的适当的参考形体是一个旋转流体静力平衡体，这个旋转体的大小、径向密度分布和转速都与真实地球相当。这一理论也需作简单的讨论。

为了监测地球自转轴的运动，或者为了测量地壳的运动和应变，必须建立坐标参考框架，以便相对于这个参考框架来定义和测量这些运动。对于地球自转的研究或全球地壳运动的测量来说，这个参考系统必须是全球参考系。而对于有限区域的地壳变形研究来说，只要较为局部的参考框架就可以了，但迟早要将局部运动与构造运动的较大参考框架和全球参考框架联系起来。大地测量参考系，传统上一直是由三角测量结合经、纬度的天文观测，有时还有重力测量来建立的。但这些观测的精度较低（第五章），因而在全球变形监测中价值不大。只有将空间技术应用于大地测量，应用人造卫星和月球的激光和电子观测，测量来自射电源的处于射电频率的辐射，才有可能建立所要求的高精度的全球参考框架。

参考框架有两种基本类型，一种是以与地球相连系的地固参考框架，另一种是天文上定义的代表某种固定的或惯性坐标系的参考框架。有时通过引入中介参考框架来建立这些参考系，例如定义人造卫星绕地球运动的一种参考系。因此，参考框架的全面讨论需要讨论地固、天文和轨道参考系，它们与时间的关系，由于地球自转轴在空间取向的运动（岁差和章动）和相对于地壳的运动（极移）而产生的它们的定向随时间的变化。这种运动的某些基本要素在 2.4 节和 2.5 节中讨论，但较全面的讨论放在第十一章。这些参考框架的问题在 2.3 节中讨论。更详细的叙述可在 Gaposchkin 和 Kolaczek (1981)、Moritz 和

Mueller(1986)、Babcock 和 Wilkins(1988)和 Kovalevsky 等(1988)的书中找到。这是一个热门的课题。

## § 2.1 重力和重力位

造成地球形状的主要的力是重力；来自于这颗行星内的质量分布的重力引力和来自于行星自转的离心力。在一个稳定的参考框架  $X_i (i= 1,2,3)$  中，位于  $P(X_i)$  处的一个单位质量所受到的由位于  $P'(X'_i)$  处的一个质量单元  $dM'$  所产生的引力的大小  $\delta F$ ，由万有引力定律给出：

$$\delta F = G L L^{-3} dM' \quad (2.1.1a)$$

式中， $G$  为引力常数， $L$  是从  $P'$  到  $P$  的向量，或

$$L = \sum_i (X'_i - X_i) \hat{\mathbf{k}}_i \quad (2.1.2a)$$

和

$$L = [\sum_i (X'_i - X_i)^2]^{1/2} \quad (2.1.2b)$$

式中， $\hat{\mathbf{k}}_i$  为在  $X_i$  轴方向上的单位向量。单位质量上力的方向为方向  $PP'$ 。对于一个有限大小的吸引体

$$\mathbf{F} = G \int_M L^{-3} L dM' \quad (2.1.1b)$$

式中，积分是在整个质量体  $M$  上取的。平行于  $X_i$  轴的力的分量  $F_i (i= 1,2,3)$  为：

$$F_i = G \int_M L^{-3} (X'_i - X_i) dM' \quad (2.1.3)$$

$\mathbf{F}$  为引力。该力的位  $V$  由下式定义

$$\mathbf{F} = \text{grad } V = \nabla V \quad (2.1.4)$$

式中， $\nabla = \sum_i (\partial / \partial x_i)$  是梯度算子。这个位在任何方向的导数即表示该方向上的力的分量，力场是由位完全确定的。这是一个在天文学、大地测量学和地球物理学中广泛采用的符号约定（例如 Kaula 1966a、1968；Brouwer 和 Clemence 1961；Heiskanen 和 Moritz 1967；也可见 Sternberg 和 Smith 1964）；但在地球物理学文献中也会遇到物理学教科书中较常用的符号约定（例如见 Stacey 1977a）。由 (2.1.2) 和 (2.1.3)。

$$V = G \int_M L^{-1} dM' \quad (2.1.5)$$

$V$  为位于  $P(X_i)$  处的被吸引体的每单位质量的引力位。对于位于  $P(X_i)$  处的一个质量体  $M$ ，总重力位或力函数为  $MV$ 。位能定义为  $-MV$ 。

讨论一颗自转着的行星的重力位时，采用一组固连于此行星上并随之一起转动的坐标轴  $x_i$  是很方便的，尤其是当我们在这颗星体表面的任何一个固定点  $P(x_i)$  上测量重力

时更是如此。2.4 节将进一步讨论这种  $x_i$  坐标系。于是作用在该点上的力  $\mathbf{g}$  是引力  $\mathbf{F}$  与离心力的向量和，或

$$\mathbf{g} = G \int_M L^{-3} \mathbf{L} dM + \omega^2 P \hat{\mathbf{P}} \quad (2.1.6)$$

式中， $\hat{\mathbf{P}}$  是通过  $P$  点垂直于转轴的单位向量， $P$  为相应的距离， $\omega$  为绕此轴的转动速率（见图 2.1）。为方便起见，取转轴平行于  $x_3$  轴，于是  $P = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$ ，此力平行于  $x_i$  轴的分量为

$$(\omega^2 x_1, \omega^2 x_2, 0)$$

这里，(2.1.6) 中的位置向量  $\mathbf{L}$  是相对于这个转动参考框架来定义的。综合引力和离心力的重力位  $W$  为

$$\mathbf{g} = \nabla W = \nabla(V + \frac{1}{2} \omega^2 P^2) \quad (2.1.7)$$

式中， $\mathbf{g}$  为重力向量，其大小为  $g$ ，称之为重力。

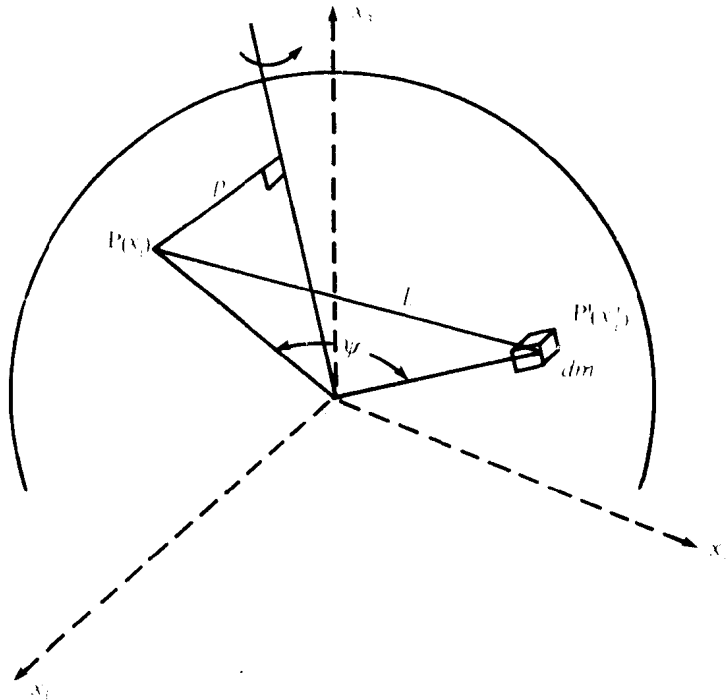


图 2.1 位于地球上  $P'(x'_i)$  处的质量单元  $dm$  和受  $dM$  吸引的位于距  $P$  的距离为  $L$  的  $P(x_i)$  处的单位质量的相对位置图， $p$  为  $P$  到瞬时转轴  $\omega$  的距离。

## § 2.2 位理论要点

### 拉普拉斯和泊松方程

引力位  $V$  是由 (2.1.5) 式定义的，力的分量即  $V$  的一阶偏导数是由 (2.1.3) 式

和 (2.1.4) 式定义的。在体外,  $V$  的二阶导数满足条件

$$\sum_i \partial^2 V / \partial x_i^2 \equiv \nabla^2 V = 0 \quad (2.2.1)$$

这就是拉普拉斯方程。它的解称为谐函数, 引力位是体外的一个谐函数。在体内, 同样的运算得到

$$\nabla^2 V = -4\pi G\rho \quad (2.2.2)$$

这就是泊松方程。算子  $\nabla^2 = \sum_i (\partial^2 / \partial x_i^2)$  称为拉普拉斯算子。而  $V$  和  $\nabla V$  在沿包围此质量的边界上是连续的, 但  $\nabla^2 V$  则是不连续的, 拉普拉斯方程和泊松方程在边界上也无效。由重力和离心力构成的位  $W$  不满足这两个方程。由 (2.1.7) 式, 在体外,

$$\nabla^2 W = \nabla^2 V + \nabla^2 \left( \frac{1}{2} \omega^2 P^2 \right) = 2\omega^2 \quad (2.2.3)$$

在体内, 则

$$\nabla^2 W = -4\pi G\rho + 2\omega^2 \quad (2.2.4)$$

用球坐标  $r$ 、 $\Phi$ 、 $\lambda$  ( $\Phi$  为纬度,  $\lambda$  为经度, 这两者均相对于地固参考框架  $x_i$  定义) 来表示

$$x_i V = r(\cos\Phi \cos\lambda, \cos\Phi \sin\lambda, \sin\Phi)$$

拉普拉斯方程成为

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi^2} - \frac{\tan\Phi}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \Phi} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \Phi} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (2.2.5)$$

### 勒让德多项式

将外部位展开成谐函数在数学上是方便的, 因为这样的函数也是拉普拉斯方程的解。对于表述在球面或地球表面得到的观测值, 球谐函数尤其方便, 它们也便于全球数据的地球物理反演。若  $P(x_i)$  处的单位质量向径  $\mathbf{r}$  和  $P'(x'_i)$  处的质量单元的向径  $\mathbf{r}'$  之间的夹角记作  $\psi$  (图 2.1), 则这两点之间的距离  $L$  为

$$L = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.6)$$

对于  $r > r'$ , 距离的倒数为

$$L^{-1} = r^{-1} \left[ 1 + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos\psi \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_{n0}(\cos\psi) \quad (2.2.7a)$$

对于  $r < r'$

$$L^{-1} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^n P_{n0}(\cos\psi) \quad (2.2.7b)$$

$P_{n0}(\cos\psi)$  为约定的  $n$  阶勒让德多项式, 它们由 Rodrigues 公式定义。令  $t = \cos\psi$  (例如 MacRobert 1967), 则

$$P_{n0}(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (2.2.8)$$

零阶多项式  $P_{n0}$  被称之为带谐函数。在  $\Phi = \pi/2$  与  $-\pi/2$  之间有关于  $\Phi = 0$  对称排列的几个不同的零点，对于奇数  $n$ ，圆  $\Phi = 0$  构成这一集合中的一个。若用球坐标  $r, \Phi, \lambda$  表示  $P$  和  $P'$  的位置，则地心角  $\psi$  由下式给出

$$\cos\psi = \sin\Phi\sin\Phi' + \cos\Phi\cos\Phi'\cos(\lambda' - \lambda) \quad (2.2.9)$$

将此式代入上述勒让德多项式的定义式，得加法定理（例如 MacRobert 1967, p.7），

$$P_{n0}(\cos\psi) = \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin\Phi) P_{nm}(\sin\Phi') \cos m(\lambda - \lambda') \quad (2.2.10)$$

式中

$$\delta_{0m} = \begin{cases} 1 & \text{若 } m = 0 \\ 0 & \text{若 } m \neq 0 \end{cases} \quad (2.2.11)$$

$P_{nm}(\sin\Phi)$  为  $n$  阶  $m$  次缩合的勒让德多项式。令  $t = \sin\Phi$ ，它们由下式定义，

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2-1)^n \quad (2.2.12a)$$

或表作，

$$P_{nm}(t) = \frac{(1-t^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n} \sum_{k=0}^{k^*} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-m-2k)!} t^{(n-m-2k)} \quad (2.2.12b)$$

式中， $k^*$  为  $\leq (n-m)/2$  的最大整数 (Heiskanen 和 Moritz 1967, p.24)。当  $0 < m < n$  时，多项式  $P_{nm}(\sin\Phi)(\cos m\lambda$  或  $\sin m\lambda)$  被称之为田谐函数。这些函数在以  $\Phi = \pi/2$  为极的  $n-m$  个圆上和通过  $\Phi = \pi/2$  的  $m$  个等间隔的大圆上有零点，当  $m = n$  时，称该多项式为扇谐函数，但扇谐函数这个名称常常还包括全部  $m \neq 0$  的调和函数，而不考虑它们的阶数。表 2.1 给出了某些低阶低次的函数。

表 2.1  
 $n$  阶  $m$  次的非正规化勒让德和缩合的勒让德函数  $P_{nm}(\sin\Phi)$

	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$
$n=0$	1			
$n=1$	$\sin\Phi$	$\cos\Phi$		
$n=2$	$\frac{3}{2}\sin^2\Phi - \frac{1}{2}$	$3\sin\Phi\cos\Phi$	$3\cos^2\Phi$	
$n=3$	$\frac{5}{2}\sin^3\Phi - \frac{3}{2}\sin\Phi$	$\cos\Phi(\frac{15}{2}\sin^2\Phi - \frac{3}{2})$	$15\cos^2\Phi\sin\Phi$	$15\cos^3\Phi$

用 (2.2.7a) 和 (2.2.10) 式在  $r > R$  处，(2.1.5) 式的位  $V$  可展成球谐函数，

$$V = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_e}{r}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin\Phi) \quad (2.2.13)$$

式中

$$\left. \begin{matrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{MR_e^n} (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_M (r')^n P_{nm}(\sin\Phi') \begin{cases} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{cases} dM \quad (2.2.14a)$$



$C_{nm}$ 、 $S_{nm}$  为斯托克斯系数。 $R_e$  代表这颗行星的赤道半径。有时在 (2.2.13) 式中用平均半径  $R$  代替  $R_e$ ，此时系数的定义必须作相应的修正，即

$$\left. \begin{array}{l} C_{nm} \\ S_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1}{MR^n} (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_M (r')^n P_{nm}(\sin\Phi') \begin{cases} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{cases} dM \quad (2.2.14b)$$

采用缩略符号

$$Y_{inm} = P_{nm}(\sin\Phi) \begin{cases} \cos m\lambda & \text{若 } i=1 \\ \sin m\lambda & \text{若 } i=2 \end{cases} \quad (2.2.15a)$$

$$C_{inm} = \begin{cases} C_{nm} & \text{若 } i=1 \\ S_{nm} & \text{若 } i=2 \end{cases} \quad (2.2.15b)$$

则可将位写成缩略形式

$$V(r, \Phi, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^m C_{inm} Y_{inm} \quad (2.2.15c)$$

### 勒让德多项式的某些性质

勒让德多项式有多个重要性质，其中最重要的是正交关系。当  $i \neq j$ ， $n \neq p$  或  $m \neq q$  时

$$\int_S Y_{inm} Y_{jpm} dS = 0 \quad (2.2.16a)$$

和

$$\int_S [Y_{inm}]^2 dS = 4\pi / \Pi_{nm}^2 \quad (2.2.16b)$$

式中，积是在一个单位半径的球的表面  $S$  上取的（例如 MacRobert 1967）。规格化因子  $\Pi_{nm}^2$  定义为

$$\Pi_{nm}^2 = \frac{(2 - \delta_{0m})(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} \quad (2.2.16c)$$

勒让德多项式的定义 (2.2.12) 相当于在位的理论展开式中常用的非规格化函数。这种用法的确有数值计算上的缺点，随着阶数和次数的增加，(2.2.14) 式的分母中的  $(n+m)!$  这一项变得越来越大，为了避免这种情况，有时引入规格化多项式  $\bar{Y}_{inm}$ ，它们是这样定义的

$$\int_S [\bar{Y}_{inm}]^2 dS = 4\pi \quad (2.2.16d)$$

或

$$\bar{P}_{inm} = \Pi_{nm} P_{inm} \quad (2.2.17a)$$

和

$$\bar{Y}_{inm} = \Pi_{nm} Y_{inm}$$

相应的规格化斯托克斯系数 (2.2.14) 式为

$$\bar{C}_{inm} = \frac{1}{\Pi_{nm}} C_{inm} \quad (2.2.17b)$$