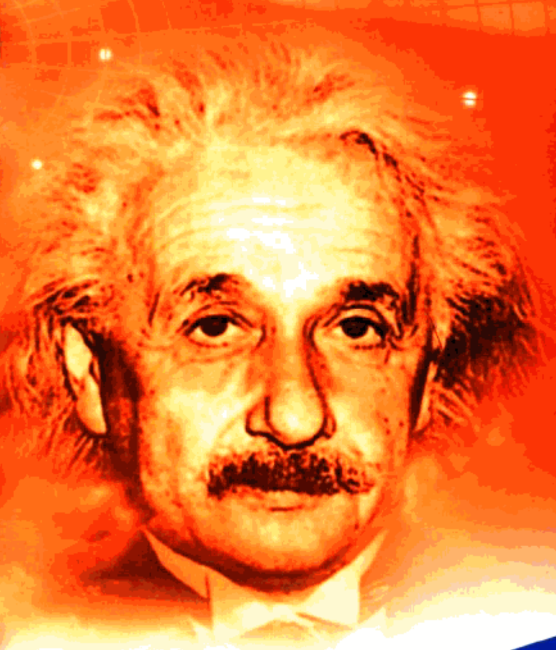
知名教辅专家 希扬主编

大象教辅

人民教育出版社 审定 大象出版社 出版



课堂要革命 · 学生要创

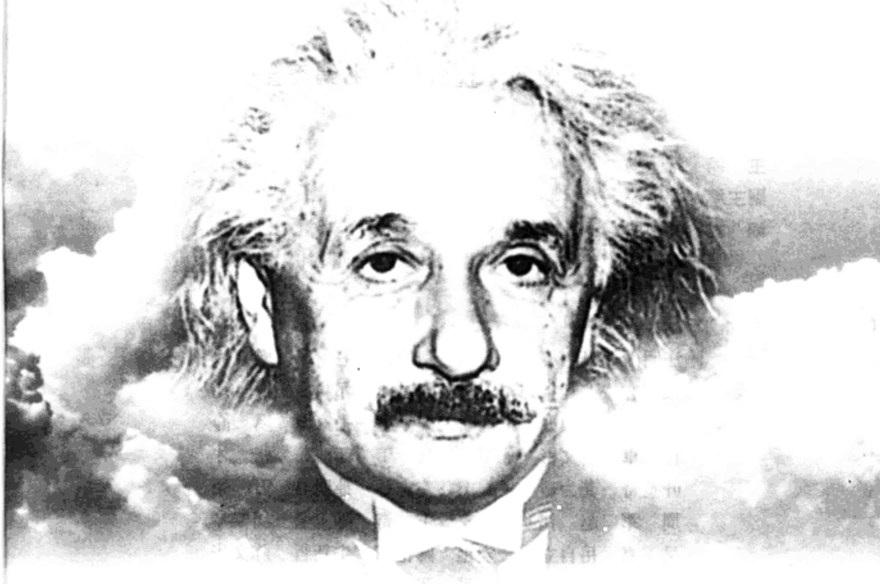
发散收敛整合

（修订版）

发散收敛 知识整合 开放求索

本册主编 李祥伦

高一数学（下）



发散·收敛·整合

FASAN SHOULIAN ZHENGHE

（修 订 版）

高一数学（下）

丛书主编：希 扬

本册主编：李祥伦

本册主编：虞 静 姜 树

大象出版社

《发散·收敛·整合》丛书编委会

本册书名　《发散·收敛·整合》(修订版)高一数学(下)

本册主编　李祥伦

本册撰稿　虞　静　姜　树

责任编辑　刘　丽　史　军

出　　版　大象出版社(郑州市经七路25号　邮政编码450002)

发　　行　大象出版社

网　　址　www.daxiang.cn

制　　版　河南大象出版技术服务有限公司

印　　刷　河南永成彩色印刷有限公司

版　　次　2003年12月第2版

印　　次　2003年12月第1次印刷

开　　本　890×1240　1/32

印　　张　5.875

字　　数　217千字

印　　数　1—15 000册

书　　号　ISBN 7-5347-2960-2/G·2405

定　　价　6.20元

欲穷千里目　更上一层楼

——《发散·收敛·整合》代序

文因名人撰写，当行之久远；书因名家作序，将蓬荜生辉。而我们既非名人，也非名家，只是参与了希扬主编的《发散·收敛·整合》这套丛书的策划与评审工作，谈谈与主编接触的感受以及评审中的切身体会，也许会在这套书的读者中找到几个知音。

过去的几年

"不曾'异想'，就不能'天开'"，"想前人未想之想，事前人未事之事"是主编常爱说的话，常爱做的事。早在几年前，他策划《三点一测》时就说过："我们为什么不可以编一套教辅，让上百万的学习者、应试者一看就心明眼亮，在学习应试中不走弯路？"几年前，《三点一测》一上市就异军突起，一鸣惊人。之后，他策划一套响一套。而今，即将付梓问世的这套《发散·收敛·整合》丛书，将会以它创意上的独出心裁、内容上的深层魅力、方法上的独树一帜而受到广大读者的喜爱，将是同步教辅图书新的里程碑。

最新的奉献

这套《发散·收敛·整合》丛书，是作者奉献给初一至高三中学生的与教学同步的新型素质教育丛书，是《发散思维大课堂》的姊妹篇。

何谓发散思维、收敛思维、知识整合？

发散思维即求异思维，是通过对已知信息进行多方向、多角度、多渠道的思考，从而悟出新问题、探索新知识或发现多种解答或得出多种结果的思维方式。

收敛思维即求同思维，是指从已知信息中寻觅正确答案的一种有方向、有范围、有层次的思维方式。

发散思维、收敛思维在思维过程中紧密联系，它们是辩证统一的。

前者表现思维的广度，后者体现思维的深度。

知识整合是对学科之间知识、技能的沟通和迁移，使学科知识在更大的范围内综合化，突出知识的运用和创新过程，把综合素质的培养落到实处。

发散—收敛—整合，是新世纪素质教育大课题的三部曲，三者相辅相成。从基础知识的学习到发散思维能力的延伸，再到总结规律，形成自己的知识网络，最后通过知识整合，形成运用所学知识解决问题的能力；由浅入深，由此及彼，环环相扣，有条不紊，体现了学生创新思维的形成全过程。

这套丛书按照新的时代要求和素质教育理念，力图体现新的课程观、教材观、教学观和学习观，以培养学生的创新精神和实践能力为重点，以提高学生综合素质为目标，旨在促进学生主动的、生动活泼的学习，促进学生的全面发展，是一套崭新的，具有开放性、探究性，时代感强，视野开阔，方法独特的素质教育丛书。

真诚的希望

目前，素质教育对教学提出了更高的要求。培养和造就无数有慧心、有灵气、会学习、会沟通、善协作、守诚信、富有团队精神的综合型人才，是我们教育工作者和出版工作者的神圣使命，是我们研究的重大课题。我们殷切地企盼这套丛书问世以后能听到全国莘莘学子与辛勤耕耘的教师们的反馈意见，从而使之在今后的修订中不断臻于完善。

丛书评论组

前　　言

敛散思维即收敛与发散思维。收敛思维又叫求同思维,是指从已知信息中产生逻辑结论,寻觅正确答案的一种有方向、有范围、有层次的思维方式。它是深刻理解概念、正确解决问题、完整掌握知识系统的重要思维方式。发散思维即求异思维,是对已知信息进行多方向、多角度、多渠道的思考,不局限于既定的理解,从而提出新问题、探索新知识或发现多种解答或得出多种结果的思维方式。

发散思维与收敛思维在思维过程中紧密联系、交替使用,它们是辩证统一的。收敛思维体现思维的深度,发散思维表现思维的广度,二者的有机结合,可缔造灵性空间,活化思维,提高认知水平和创造思维能力,从而达到开启心扉、挖掘潜能、提高整体素质的目的。

本套书以新的教改精神为指导,紧扣最新修订的高中教学大纲,与人教版高中(修订)教材同步,紧密联系学生的学习实际,全面深入地反映2001年以来高考试题情况,力求贴近整个教学环节,增强学生思维的灵活性、拓展性,以提高学生解决实际问题的能力。

本套书每章(单元)均由以下六个部分组成:

基础知识指要　依据新修订的教学大纲、考试大纲,指明知识的学习要求和要点,并将整个高中三年的全程目标分解到每章(单元),确保学生达到教学大纲在知识、技能、综合素质诸方面提出的要求。

重点难点剖析　帮助学生突出重点,精辟地分析、引导、诠释疑难问题,提供化解难点的思路和方法。

高考破误捷径　通过对高考试题不同思维方式的分析,寻根探源,释疑解惑,排除思维障碍,点拨避错技巧,从而使读者获得最正确、最简捷的解题思路和方法。

敛散思维导练　通过对题型发散、正向收敛、最优收敛、侧向发散、逆向发散、转化发散、多向发散、综合发散等各种模式例题的分析与指导练习,强化学生思维训练,培养敛散思维能力。

知识整合实践 对学科每章(单元)知识进行全面系统的整理和提炼,加深各个知识点间的联系,在巩固知识的基础上加强运用,提高学生分析问题、解决问题的能力。本栏目中还设置"联系实际指导"、"理(文)科综合园地"、"高考名题点评"、"竞赛新题开悟"四个小栏目并配备了例题。

提高能力测试 每章(单元)设置综合能力测试题一套,用以提高学生对学科知识体系和规律性的整体掌握水平及分析问题、解决问题的能力。这可以帮助学生检验课堂学习效果,同时家长也可借此了解学生对课本各章节知识的掌握程度。书后附有参考答案。

另外,对解题方法及其注意事项和解题时容易犯的错误,在解题结束后,增加了"点评"及"警示误区",指出其错误的缘由。

本套书主要用到如下敛散思维:

正向收敛 是按照常规习惯形成的,沿着固定方向,采用一定的模式或方法进行思考的思维方式。

最优收敛 是一题多解或构造法中最佳解法的思维方式。

侧向发散 是从知识之间的横向联系出发,即从同一学科的不同分支出发,或从不同学科的有关原理或规律出发,去模拟、构造、分析问题,寻求解答的思维方式。

逆向发散 是从习惯思路的反方向去分析解答问题的思维方式。

转化发散 是保持原命题的实质而变换其形式的思维方式。

多向发散 是从多方面思考同一问题,使思维不局限于一种模式或一个方面,从而获得多种解答的思维方式。

综合发散 是通过教材各章(单元)知识点之间的联系、一个学科与其他学科之间的联系,进行综合思考的一种思维方式。

这套书由浅入深,精析多练,学练结合,阶梯训练,逐步提高,并揭示高考的测试规律,使学生的复习与应试实际更贴近,从而提高学生灵活运用知识的能力,增强迁移应变和创造性思维能力。这套书出版以来,受到师生的欢迎。今年再版时,结合新修订的教材和高考的新情况,我们对这套书进行了修订,使它渐臻完善。

编　者

目　录

第四章 三角函数

基础知识指要

一、理解任意角的概念、弧度的意义,能正确进行弧度和角度的换算.

二、掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义,并会利用单位圆中的三角函数线表示正弦、余弦和正切;了解任意角的余切、正割、余割的定义.

三、掌握同角三角函数的基本关系:$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$,$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$;掌握正弦、余弦的诱导公式.

四、掌握两角和与两角差的正弦、余弦、正切公式;掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式;通过公式的推导,了解它们的内在联系,从而培养逻辑推理能力.

五、会正确运用三角公式进行简单三角函数式的化简、求值和恒等式证明(含引用积化和差公式、和差化积公式及半角公式,但不要求记忆).

六、能用单位圆中的三角函数线画出正弦函数、正切函数的图象,并在此基础上由诱导公式画出余弦函数的图象.

七、理解周期函数与最小正周期的意义;并通过三角函数的图象理解正弦函数、余弦函数和正切函数的性质.

八、能用"五点法"画正弦函数、余弦函数和 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的简图,并理解 A、ω、φ 的物理意义.

九、能由已知三角函数值求角.并能用符号 $\arcsin x$、$\arccos x$、$\arctan x$ 表示.

重点难点剖析

本章重点是任意角的三角函数,同角三角函数间的关系式,诱导公式,和角公式、差角公式,倍角公式及其应用,三角函数的图象和性质.

本章的难点是确定三角变换,角的变换,由函数图象求函数的解析式,运用有关公式化简、求值、证明,三角函数在代数、几何和实际问题中的应用.

为了掌握重点、难点,必须注意以下问题.

一、任意角的三角函数

1. 关于角的几个概念的区别

(1) 终边相同的角与相等的角

终边相同的角不一定相等，相等的角一定终边相同.

(2) 象限角、区间角和轴线角

象限角：如果使角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的正半轴重合，角的终边落在哪个象限，就把这个角叫做哪个象限的角.

第一象限角：$k\cdot 360^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+90^\circ, k\in\mathbf{Z}$；

第二象限角：$k\cdot 360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+180^\circ, k\in\mathbf{Z}$；

第三象限角：$k\cdot 360^\circ+180^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+270^\circ, k\in\mathbf{Z}$；

第四象限角：$k\cdot 360^\circ+270^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+360^\circ, k\in\mathbf{Z}$.

区间角：角的量数在某个确定的区间内(上).

轴线角：角的终边落在坐标轴上.

终边在 x 轴上的角 α 的集合为

$$\{\alpha\mid\alpha=k\cdot 360^\circ+180^\circ, k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha\mid\alpha=k\cdot 360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$$
$$=\{\alpha\mid\alpha=n\cdot 180^\circ, n\in\mathbf{Z}\};$$

终边在 y 轴上的角 α 的集合为

$$\{\alpha\mid\alpha=k\cdot 360^\circ+90^\circ, k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha\mid\alpha=k\cdot 360^\circ+270^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$$
$$=\{\alpha\mid\alpha=n\cdot 180^\circ+90^\circ, n\in\mathbf{Z}\}.$$

2. 角的弧度制与角度制的区别与互换

在运用弧长公式 $l=|\alpha|\cdot r$ 及扇形面积公式 $S=\frac{1}{2}r^2\cdot\alpha(0<\alpha\leqslant 2\pi)$ 时，度量圆心角的单位是弧度. 若用角度作单位，则弧长公式表示为

$$l=\frac{|n|\pi r}{180^\circ}.$$

扇形面积公式表示为

$$S=\frac{n\pi r^2}{360^\circ}(0<n\leqslant 360^\circ).$$

3. 三角函数的特点

三角函数的定义、三角函数线既是数学中的基本概念，又是解三角函数问题的依据，它能将三角问题转化为有向线段的比.

4. 角的约束条件

在约束条件下，求与 α 角的终边相同的角，常先将与 α 终边相同的角表示成 $2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 的一般形式，然后由约束条件确定一般形式中 k 的值，求出适合条件的角.

5. 三个特殊式子

三个式子 $\sin\alpha+\cos\alpha$、$\sin\alpha\cos\alpha$、$\sin\alpha-\cos\alpha$ 中,已知其中一个式子的值,可求其余二式的值,因为其间隐含着平方公式:$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. 若已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=p$,$\sin\alpha\cos\alpha=q$,则可由此二式消去 α,求出 p、q 之间的关系式.

6. 三角函数化为最简形式的标准

(1) 函数种类尽量少,次数最低,并且尽可能化为积的形式.

(2) 能求出值的要求出值来.

(3) 最好分母不含三角函数.

(4) 尽量不留根式.

7. 同角三角函数关系、诱导公式是解题常用的重要公式

(1) 由某角的一个三角函数值求该角的另外五个三角函数值时,一般可按照先倒数,再平方,最后商的顺序进行,特别要注意平方关系中正负号的选择.

(2) 在使用诱导公式求三角函数时,一般可按以下步骤进行:①若已知角为负角,可用诱导公式转化成和它绝对值相等的正角的三角函数值;②若已知角是大于360°的角,可用诱导公式转化为小于360°的正角的三角函数值;③由所得的角的象限选用公式转化为锐角的三角函数值;对于含任意整数 n 的情况要予以讨论.

以上归纳为三句话:化负角为正角、去掉周期数、化任意角为锐角.

(3) 在三角恒等式证明中,一般有以下三种方法:①化繁为简,即从繁杂的一端变形到简单的一端;②左右归一,即分别将左右两端变形到同一个式子;③变更论证,即通过化除为乘、左右相减(相除)等,转化成证明与原结论等价的式子.

在条件等式证明中,一般可用消去法及基本量方法,消去法即用代入、加减、平方等方法消去某些量;基本量方法就是适当地选择其中可以独立取值的量作为基本量,其他的量都可以表示为基本量的函数,从而将问题归结为研究这些量之间的关系.

三角变形常用的有切割化弦法、"1 的代换法". 其他的代数变形方法,如比例系数法等也常应用.

(4) 关于正弦、余弦的齐次式、齐次分式问题. 形如

$$y=a\sin\theta+b\cos\theta; \quad ①$$

$$y=a\sin^2\theta+b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta; \quad ②$$

$$y=\frac{a\sin\theta+b\cos\theta}{a'\sin\theta+b'\cos\theta}; \quad ③$$

$$y=\frac{a\sin^2\theta+b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta}{a'\sin^2\theta+b'\sin\theta\cos\theta+c'\cos^2\theta} \quad ④$$

的式子,分别称为正弦、余弦的齐次式或齐次分式.

现令 $\tan\theta=m(m\neq0)$,上述各式由以下方法求值:

①式乘以$\frac{\cos\theta}{\cos\theta}$而得到$(am+b)\cos\theta$,然后求$\cos\theta$即可.

②式乘以$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$而得到$\frac{am^2+bm+c}{1+m^2}$.

③式分子、分母同除以$\cos\theta$,得$\frac{am+b}{a'm+b'}$.

④式分子、分母同除以$\cos^2\theta$,得$\frac{am^2+bm+c}{a'm^2+b'm+c'}$.

二、三类基本题

三角函数式的恒等变形包括求值、化简、证明,其解法依据三角恒等变换公式及代数中恒等变换知识,如配方法、消元法、因式分解、比例性质等.

1. 求值

可分为给角求值、给值求值及给值求角这三种类型.

(1) 给角求值的关键是正确地选用公式,以便把非特殊角的三角函数相约或相消,从而化为特殊角的三角函数.

(2) 给值求值的关键是找出已知式与欲求式之间的角、运算及函数的差异,一般可以适当变换已知式,求得另外函数式的值,以备应用;同时也要注意变换欲求式,便于将已知式求得的函数值代入,从而达到解题的目的.

(3) 给值求角的关键是先求出该角的某一三角函数式的值,再判断该角在对应区间的单调性,从而达到解题的目的.

2. 化简

化简三角函数式是为了更清楚地显示式中所含量之间的关系,以便于应用.

常用方法是:异名函数化为同名函数,异角化为同角,异次化为同次,切割化弦,特殊值与特殊角的三角函数互化等.

3. 证明

(1) 恒等式的证明,三角恒等式包括有条件的恒等式和无条件的恒等式两种.

①无条件的恒等式证明,常用综合法(执因索果)和分析法(执果索因),证明的形式有化繁为简、左右归一、变更论证等,不论采用什么证明方式和方法,都要认真分析等式两边三角函数式的特点、角度和函数关系,找出差异,寻找证明的突破口.

②有条件的恒等式证明,常常先观察条件式及欲证式中左、右两边三角函数式的区别及联系,灵活使用条件,变形得证,证明方法主要是基本量法和消去法.

关于边角的三角函数恒等式,可用正弦定理将边的关系转化为角的关系,也可用余弦定理将角的关系转化为边的关系.

(2) 不等式的证明,一般可用换元法把三角不等式转化为代数不等式,也可用三角函数的有界性及单调性直接证明.

4. 解题方法、技巧综述

(1) 公式的正用、逆用和变用

①公式的正用，特别要熟练掌握一个三角函数式的多种表达形式，如

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$，

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$，

$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$，

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\cos^2\alpha-\cos2\alpha=\cos^2\alpha\tan^2\alpha$.

②公式的逆用，如

$\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta=\cos\alpha$，

$\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\cos2\alpha$，$\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$，

$\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\dfrac{\alpha}{2}$.

③公式的变用(原始公式经变形后所得式子)，如

$\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$，

$1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$，$1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$，

$\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$，$\cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$，

$1\pm\sin\alpha=\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}\pm\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$，$\cos\alpha=\dfrac{\sin2\alpha}{2\sin\alpha}$.

(2) 熟练掌握七种基本技能

①巧妙地将角进行恒等变换，能简化解题.

例如：$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$，$2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$，

$2\beta=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)$，$\alpha-\gamma=(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)$，

$A=(m+1)A-mA$.

②熟悉角的倍、半、和、差的相对性.

例如：单角 α 可以看成角 $\alpha+\beta$ 和角 β 的差角，也可看成 $\alpha-\beta$ 与角 β 的和角，这里单角竟成了“差角”与“和角”，从而可以巧用公式；同样，$\dfrac{\alpha}{2}$是角 α 的半角也可以看成是角$\dfrac{\alpha}{4}$的倍角，$n\alpha$ 可看作是 $2n\alpha$ 的半角，也可看作是$\dfrac{n\alpha}{2}$的倍角. 总之，复角、倍角、半角可以变换成单角，反之单角也可变换成复角、倍角、半角.

③熟悉几组勾股数.

若角 α 的一个三角函数值是以具体的数字或确定了符号的字母形式出现时,可利用"勾股数"(3、4、5;5、12、13;7、24、25;9、40、41 等)或"勾股定理",并结合三角函数的符号进行求解,颇为方便.

④熟悉"1"的各种变通.

注意到在三角函数中,

$$\begin{aligned}1 &= \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sec^2\alpha-\tan^2\alpha\\&=\csc^2\alpha-\cot^2\alpha=\tan\alpha\cdot\cot\alpha=\sin\alpha\cdot\csc\alpha\\&=\cos\alpha\cdot\sec\alpha=\tan45^\circ=\cot45^\circ=\cdots\end{aligned}$$

熟悉它们的各种形式,在解题中可将 1 作各种适当的代换.

⑤熟悉互余和互补的各种形式.

若 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$,则有 $\cos\alpha=\sin\beta,\cos\beta=\sin\alpha,\tan\alpha=\cot\beta,\cot\alpha=\tan\beta$.

若 $\alpha+\beta=\pi$,则有 $\sin\alpha=\sin\beta,\cos\alpha=-\cos\beta,\tan\alpha=-\tan\beta,\cot\alpha=-\cot\beta$.

若 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$,则有 $\sin\alpha=\cos\beta,\cos\alpha=-\sin\beta,\tan\alpha=-\cot\beta,\cot\alpha=-\tan\beta$.

若 $\alpha-\beta=\pi$,则有 $\sin\alpha=-\sin\beta,\cos\alpha=-\cos\beta,\tan\alpha=\tan\beta,\cot\alpha=\cot\beta$.

熟悉两角和(差)的互余及互补形式,对解题大有用处.

⑥万能公式.

熟悉万能公式的代换作用,将含多种三角函数的式子转化为只含有一种三角函数的式子.

⑦熟练掌握三角形中的恒等变形.

$\sin(A+B)=\sin C,\cos(A+B)=-\cos C,\tan(A+B)=-\tan C,$

$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2},\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2},\tan\frac{A+B}{2}=\cot\frac{C}{2},$

$$\begin{aligned}\sin(A+B)&=\sin C=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}\\&=2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A+B}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(A+B)&=2\cos^2\frac{A+B}{2}-1=2\sin^2\frac{C}{2}-1\\&=1-2\sin^2\frac{A+B}{2}=1-2\cos^2\frac{C}{2}.\end{aligned}$$

(3) 灵活运用七种常用解题技巧

①切割化弦.

应用题中出现的正切、余切函数,正割、余割函数均化为弦函数(正弦、余弦函

数).

化切为弦的常用公式有:

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$

$\tan\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=\frac{\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha},\cot\alpha=\frac{\sin2\alpha}{1-\cos2\alpha}=\frac{1+\cos2\alpha}{\sin2\alpha}.$

②化切.

应用万能公式,把题中所给的正弦、余弦函数,正割、余割函数均化为切函数(正切、余切函数),从而把三角问题转化为代数问题.

化弦为切的常用公式有:

$$\sin2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha},\cos2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}.$$

③切的互化.

如果在所要证的恒等式中仅含正切、余切函数,往往把正切(或余切)化为余切(或正切).

④化角.

将题中的倍角、半角、和(差)角化为单角,或者确定某一种角作为基本量,将其他形式的角化为这种形式的角,从而使问题得以解决.

⑤降幂和升幂.

应用公式 $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$,可得 $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$,$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$. 这些式子常用来降幂,以便于运用公式;或者用上面公式将一次形式转化为二次形式,便于进行因式分解.

⑥和差化积与积化和差.

题中若出现和(或积)如一次三项式(四项式)(或三个或四个因式的连乘积)等,一般用和差化积(或积化和差)化简,和差化积的次数与项数有关,对于较复杂的三角问题,这两种方法要综合使用.

⑦利用辅助角进行恒等变形.

对于形如 $a\sin x+b\cos x$ 的三角形式,一般利用插入辅助角公式来解,变形方法有以下几种:

(ⅰ)$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$($a$、$b\in\mathbf{R}$,$a$、$b\neq0$)

其中 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

(ⅱ)$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$($a$、$b\in\mathbf{R}$,$a$、$b\neq0$)

其中 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$，且 φ 角由(a,b)所在的象限确定.

(iii) $a\sin x\pm b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x\pm\varphi)\ (a、b\in\mathbf{R}^*)$

其中 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$，$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

三、三角函数的图象和性质

(1) 求三角函数的定义域和值域

确定三角函数的定义域，除应注意到偶次根式内的被开方式不能小于零，分式的分母不为零，对数的真数为正，底数大于零且不等于 1 以外，还要考虑三角函数本身的定义域，如正切函数 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，余切函数 $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$，从而归结为解不等式组. 在求不等式组的解集时，要借助于三角函数图象或单位圆中的三角函数线进行观察.

由于 $|\sin x|\leqslant 1$ 及 $|\cos x|\leqslant 1$，由此可以解决一些三角问题.

(2) 用三角函数的单调性和奇偶性的定义来判断三角函数的单调区间、比较两个(或多个)三角函数值的大小等.

需要注意，自变量的值必须在该函数的同一单调区间时，才能用单调性来比较大小，若不是同名三角函数，则应考虑化为同名三角函数或者用插值法.

(3) 应用函数的周期性的定义，求简单三角函数的周期；利用函数的周期性画出函数的图象.

(4) 三角函数的图象的"五点法"作图. 作三角函数的图象一般采用坐标法或几何法，自变量用弧度值表示，由于函数最大和最小的点以及函数值为零的点是确定正弦曲线、余弦曲线的五个关键的点，因此，在精确度要求不高时，常用"五点法"作图. 但同样要注意使图象能显示曲线的形态和数量特征.

四、已知三角函数值求角

已知角 α 的一个三角函数值求角 α，所得的解往往不惟一，关键在于给定的 α 的范围. 此类题的解法步骤是：

1. 确定角 α 所在象限；

2. 若函数值为正，先求出对应的锐角 β；若函数值为负，先求出与其绝对值对应的锐角 β；

3. 根据角 α 所在的象限，由诱导公式，得出 $0\sim2\pi$ 间的角；

4. 若要求适合条件的所有角，再利用终边相同的角的表达式.

高考破误捷径

例1 (1995年全国高考试题)已知θ是第三象限角,若$\sin^4\theta+\cos^4\theta=\frac{5}{9}$,那么$\sin 2\theta$等于 ( )

(A)$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (B)$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (C)$\frac{2}{3}$ (D)$-\frac{2}{3}$

解法1 用直接法.

将原式配方,得

$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{5}{9}$,

于是$1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta=\frac{5}{9}$.

$\therefore \sin^2 2\theta=\frac{8}{9}$.

由已知θ在第三象限,

$\therefore 2k\pi+\pi<\theta<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$,$(k\in\mathbf{Z})$.

从而$4k\pi+2\pi<2\theta<4k\pi+3\pi$,$(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore 2\theta$在第一、二象限,$\therefore \sin 2\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

故本题应选(A).

解法2 用排除法.

由$2k\pi+\pi<\theta<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$,有

$4k\pi+2\pi<2\theta<4k\pi+3\pi$,$(k\in\mathbf{Z})$,

知$\sin 2\theta>0$,所以应排除(B)、(D);

验证(A)、(C),由$\sin 2\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,得

$2\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{4}{9}$,并与$\sin^4\theta+\cos^4\theta=\frac{5}{9}$相加得$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=1$成立,所以可以排除(C),故本题应选(A).

警示误区

错解 将原式配方,得