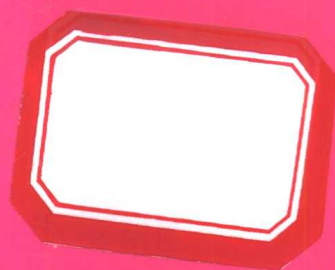


考研大纲辅导教材(工学类)

考研数学精讲 与模拟测试

1999



硕士研究生入学考试

数学命题研究组

许诗文 主编

成都科技大学出版社

考研数学精讲与模拟测试

(工 学 类)

1999

许诗文 编著



成都科技大学出版社

(川)新登字 015 号

责任编辑:赖晓霞

封面设计:刘贵平

考研数学精讲与模拟测试

(工学类)

许诗文 编著

成都科技大学出版社出版

南京政治学院印刷厂印制

各地新华书店经销

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张 28.5 字数 725 万字

1998 年 2 月第 1 版 1998 年 2 月第 1 次印刷

ISBN7-5616-3147-2/O·221

定价: 35.00 元

前 言

本书是根据新的数学大纲,近几年统考命题的特点及多年考研数学辅导班的教学经验精编而成。

本书共分四部分:一、优秀模拟试题;二、专题精讲;三、模拟试题解析·评论;四、专题精讲习题答案或解答。

本书特色:1. “以纲为纲”,专题精讲部分下意识地突出大纲所要求的基本概念、定理与公式等。2. 专题精讲里的例题分析典型,突出解·题·方·法·和·技·巧,目的是教给读者学会分·析·问·题,解·决·问·题·的·方·法,把·数·学·学·活。3. 专题精讲部分一般采用化整块为子块的方式讲解,有的采用子块结合的串讲方式进行(如第三讲),便于读者快速全面掌握。4. 本书模拟试题在深·度与广·度上与大纲要求的相近,模拟试题的设计更具有针·对·性(参·看下一页的以例说明)。

编者 1998. 2

惊人的雷同或相似

1997 年硕士研究生入学考试试卷一有两题出现在本书第一版,亲爱的读者,你感觉到很吃惊!或几乎不相信!然而这是真的!现以例说明:

先看第一大题填空题的第 1 小题:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

本小题正好是《考研数学精讲与模拟测试》(95 年第一版第 13 页,本版书第 14 页)模拟试题六第三大题第(1)小题(其解答在原版书中为 181~182 页,本版书中为 394 页,且都加以评论)。这是一个惊人的巧合!

再看第三大题第 1 题计算题:

计算积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋

转一周而成的曲面与平面 $z = 8$ 所围的区域。

本题正好与《考研数学精讲与模拟测试》(95 年第一版第 17 页,本版书第 16 页)模拟试题七第四大题雷同!(其解答在原版书为 188 页,本版书中为 401 页,且加以评论)这是一个惊人的相似!

上面的两例是不是偶然的巧合呢?下面请读者参看 1996 年硕

士研究生入学考试试卷一第七大题:

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 满足条件 $|f(x)| \leq a$,
 $|f''(x)| \leq b$, 其中 a, b 都是非负常数, c 是 $(0,1)$ 内任意一点, 证明
 $|f'(c)| \leq 2a + \frac{b}{2}$.

本题正好与《考研数学精讲与模拟测试》(95 年第一版第 126 页, 本版书第 45 页) 例 21 雷同! (原版书模拟试题七第七题和本版书第七套模拟试题第七题又再次选了该题!) 事实再次说明了上面出现统考试题与本书模拟试题或例题雷同或相似不是偶然的, 而是一种必然! ——这是本书作者(数学命题研究组专家)精讲、精选、精编的结果!

祝读者早日使用本书!

祝读者考试成功!

考试成功!

数学命题研究组许诗文

一九九八年二月

目 录

第一部分 优秀模拟试题	1
数学一说明	1
数学一模拟试题	2
数学一第一套模拟试题	2
数学一第二套模拟试题	4
数学一第三套模拟试题	6
数学一第四套模拟试题	8
数学一第五套模拟试题	10
数学一第六套模拟试题	12
数学一第七套模拟试题	14
数学二说明	18
数学二模拟试题	19
数学二第一套模拟试题	19
数学二第二套模拟试题	20
数学二第三套模拟试题	22
第二部分 专题精讲	25
第一讲 正确应用等价无穷小代换定理	25
配套练习(填空题、选择题、习题精选)	32
第二讲 参数方程的高阶导数(二阶导数为例)例题分析	33
习题精选	35
第三讲 介值定理、中值定理、泰勒定理、 ξ 问题、零点问题	36

第四讲	由率的几种表达形式	49
	习题精选	52
第五讲	不定积分	52
第六讲	定积分	62
	习题精选	72
第七讲	原函数存在定理与应用	73
	习题精选	78
第八讲	多无函数的基本概念、微分法与无条件极值	78
	配套练习(选择题、习题精选)	104
第九讲	空间曲线的切线与法平面及曲面的切平面与法线	107
	配套练习(选择题、习题精选)	110
第十讲	多元函数的条件极值	112
	习题精选	119
第十一讲	重积分的计算	120
	配套练习(选择题、习题精选)	142
第十二讲	对积性在重积分(曲线、曲面积分)中的应用	145
第十三讲	各种积分的关系—格林、奥氏、斯氏公式	152
	配套练习(选择题、习题精选)	179
第十四讲	无穷级数	184
	选择题	211
第十五讲	微分方程	212
	选择题	229
第十六讲	行列式	230
第十七讲	矩阵	237
第十八讲	向量和矩阵的秩	244
第十九讲	线性方程组	254
第二十讲	特征值与特征向量	265
第二十一讲	$P^{-1}AP=B$ 中已知两者如何求第三者?	274
第二十二讲	二次型	280
第二十三讲	正交相似变换下的标准形在证明中的简单应用。	287
第二十四讲	随机事件及其概率	290

第三十五讲 随机变量及其分布	297
第二十六讲 多维随机变量	299
第二十七讲 随机变量的数字特征	316
第二十八讲 大数定律与中心极限定理。	323
第二十九讲 数理统计的基本概念	326
第三十讲 参数估计	340
第三十一 假设检验	

第三部分 模拟试题解析·评论 366

数学一模拟试题解析	366
数学一第一套模拟试题解析	366
数学一第二套模拟试题解析	370
数学一第三套模拟试题解析	376
数学一第四套模拟试题解析	381
数学一第五套模拟试题解析	386
数学一第六套模拟试题解析	393
数学一第七套模拟试题解析	398
数学二模拟试题解析	404
数学二第一套模拟试题解析	404
数学二第二套模拟试题解析	410
数学二第三套模拟试题解析	413

第四部分 专题精讲习题答案或解答 415

第一讲习题答案或解答	415
第二讲习题答案或解答	416
第四讲习题答案或解答	416
第六讲习题答案或解答	416
第七讲习题答案或解答	418
第八讲习题答案或解答	418

第九讲习题答案或解答.....	421
第十讲习题答案或解答.....	421
第十一讲习题答案或解答.....	423
第十三讲习题答案或解答.....	426
第十四讲习题答案或解答.....	429
第十五讲习题答案或解答.....	429
第二十九讲习题答案或解答.....	430
第三十讲习题答案或解答.....	430
第三十一讲习题答案或解答.....	431
 附表 1 泊松分布表	 432
附表 2 标准正态分布表	434
附表 3 χ^2 分布表	435
附表 4 t 分布表	437
附表 5 F 分布表	438

第一部分 优秀模拟试题

数学一说明

数学一适用的招生专业

力学、仪器仪表、动力工程及工程热物理、电工、电子学与通信、计算机科学与技术、自动控制、管理科学与工程、船舶与海洋工程、原子能科学与技术、航空与宇航技术、兵器科学与技术、机械工程、材料科学与工程、冶金、土木、水利、测绘、化学工程和工业化学、地质勘探、矿业、石油、铁道、公路、水运、以及建筑学、技术科学史、轻工、纺织、林业工程、农业工程六个学科中对数学要求较高的二级学科、专业。

数学一考试内容

高等数学：函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数和空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程，线性代数：行列式，矩阵，向量，线性方程组，矩的特征值和特征向量，二次型。概率论与数理统计初步：随机事件和概率，随机变量及其概率分布，二维随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征，大数定律和中心极限定理，数理统计的基本概念，参数估计，假设检验。

试卷结构

(一) 内容比例

高等数学 约 60%

线性代数 约 20%

概率论与数理统计初步 约 20%

(二) 题型比例

填空题与选择题 约 30%

解答题(包括证明题) 约 70%

数学一模拟试题

数学一第一套模拟试题

一、填空题(每小题3分,共15分)

(1) 曲线 $\begin{cases} x = y^2 \\ z = x^2 \end{cases}$ 在点(1,1,1)处的法平面方程是_____。

(2) 设曲面 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, 则 $\oiint_S dS =$ _____; $\oiint_{S(\text{外侧})} y dx dz =$ _____。

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$ 的收敛域是 $|x| < 1$ 。

(4) 设 ξ, η 是两个相互独立且均服从正态分布 $N(0, (\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$ 的随机变量, 则随机变量 $|\xi - \eta|$ 的数学期望 $E(|\xi - \eta|) =$ _____。

(5) 已知三维线性空间的一组基底为 $a_1 = (1, 1, 0), a_2 = (1, 0, 1), a_3 = (0, 1, 1)$, 则向量 $u = (2, 0, 0)$ 在上述基底下的坐标是_____。

二、选择题(每小题3分,共15分)

(1) $x = 0$ 是函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x+1}}}, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ \frac{x^2(1-x)}{\sin x}, & x > 0, \end{cases}$$

的

(A) 可去间断点. (B) 跳跃间断点.

(C) 振荡间断点. (D) 无穷间断点.

(2) 设函数

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{f'(a)} \left\{ 1 + \frac{f(x) - f(a)}{[f'(a)]^2} \left[f''(a) - \frac{1}{2} f''(a) \right] \right\}$$

则 $\varphi'(a)$ 是()

(A) a . (B) $f(a)$. (C) $f'(a)$. (D) 1.

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$ 则 $f(\xi) = \int_0^1 f(x) dx$, 其中 ξ 的情况是()

(A) 在 $[0, 1]$ 内至少有一点 ξ , 使该式成立.

(B) 不存在 $[0, 1]$ 内的点 ξ , 使该式成立.

(C) 在 $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$ 都存在 ξ , 使该式成立.

(D) 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 中存在 ξ , 使该式成立.

(4) 若微分方程 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 有积分因子 $\mu(x, y)$, 则 $\mu(x, y)$ 满足()

(A) $Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \mu(x, y).$

(B) $P \frac{\partial \mu}{\partial x} - Q \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \mu(x, y).$

(C) $Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \mu(x, y).$

(D) $Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$

(5) 已知 $0 < P(B) < 1$ 且 $P[(A_1 + A_2) | B] = p(A_1 | B) + P(A_2 | B)$, 则下列选项成立的是

(A) $P[(A_1 + A_2) | \bar{B}] = P(A_1 | \bar{B}) + P(A_2 | \bar{B}).$

(B) $P(A_1 B + A_2 B) = P(A_1 B) + P(A_2 B)$

(C) $P(A_1 + A_2) = P(A_1 | B)P(A_2 | B)$

(D) $P(B) = P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2).$

三、(每小题 5 分, 共 20 分)

(1). 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2 \sin(\frac{1}{x^2})}{\sin x} + \left(\frac{3 - e^x}{2 + x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} \right] = \frac{1}{e}$

(2) 将函数 $f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1 + x^2}$ 展成关于 x 的幂级数, 并求收敛区间.

(3). 设 $F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$. 这里 f 连续, $t > 0$, 求 $F'(t)$.

(4). 求向量组 $\alpha_1 = (1, 1, -1), \alpha_2 = (0, 1, -2), \alpha_3 = (2, 1, 0), \alpha_4 = (-1, 1, 2)$ 的最大线性无关组, 并将其它向量表成此最大线性无关组的线性组合.

四、(7 分) 改变下面累次积分的顺序, 求出积分的值

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}-3}^{\frac{\pi}{2}-3} dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x+3} (x+1) \sqrt{1 - \cos^2 y} dy + \int_{\frac{\pi}{2}-3}^{5-\pi} dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sqrt{1 - \cos^2 y} dy \\ + \int_{5-\pi}^{5+\pi} dx \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{5}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sqrt{1 - \cos^2 y} dy.$$

五、(8 分) 计算曲面积分

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z) dS$$

其中

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{若 } z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0, & \text{若 } z < \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

六、(9 分) 确定函数 $f(x), \varphi(x)$ 以使曲线积分

$$\int_v \left\{ \frac{\varphi(x)}{2} y^2 + [x^2 - f(x)] y \right\} dx + [f(x)y + \varphi(x)] dy + z dz$$

对于任何闭曲线 v 的积分都等于零. 假定上面确定的函数 $f(x), \varphi(x)$ 满足条件 $f(0) = -1, \varphi(0) =$

0, 试计算沿曲线 v 从点 $M_0(0, 1, 0)$ 到点 $M_1(\frac{\pi}{2}, 0, 1)$ 的曲线积分

$$\int_{M_0}^{M_1} \left\{ \frac{\varphi(x)}{2} y^2 + [x^2 - f(x)] y \right\} dx + [f(x)y + \varphi(x)] dy + z dz$$

七、(5分) 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 n 阶连续导数, 问: 当 $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, 且 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ 时, $(x_0, f(x_0))$ 是否为拐点? 为什么?

八、(9分) 已知三阶矩阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$, 设矩阵 $B = A^3 - 5A^2$, 试求:

(1) 矩阵 B 的特征值及其相似标准形, 并说明理由;

(2) 行列式 $|B|$ 及 $|A - 5I|$ (I 为三阶单位矩阵)。

九、(6分) 设随机变量 ξ 的概率密度为

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi^2}, & 0 < x < \pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求随机变量函数 $\eta = \sin \xi$ 的概率密度。

十、(6分) 已知总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

其中未知参数 $\theta > 0$, 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为取自总体 X 的一个样本,

(1) 求 θ 的极大似然估计量;

(2) 说明该估计量是无偏估计量。

数学一第二套模拟试题

一、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

(1) 自点 $(1, -1, 2)$ 向平面 $x + 2y - 3z = 0$ 所作的一垂线足坐标为 $(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$ 。

(2) 设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有同一分布律, 且 X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则随机变量 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布律为_____。

(3) 改变二次积分的顺序: $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy =$ _____。

(4) 沿边长为 a 的立方体的外侧的曲面积分: $\oiint_{\Sigma} (x-2) dy dz + (y+z) dz dx =$ _____。

(5) 若 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是行列式为 -1 的正交矩阵, $A^* = (b_{ij})_{n \times n}$ 是 A 的伴随矩阵, 则必有 $a_{ij} + b_{ij} =$ _____, $1 \leq i, j \leq n$ 。

二、选择题(每小题 3 分, 共 15 分)

(1) 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{bmatrix}$

$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 则必有()

(A) $AP_1P_2 = B$ (B) $AP_2P_1 = B$

(C) $P_1P_2A = B$ (D) $P_2P_1A = B$

(2) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则随 σ 的增大, 概率 $P\{|X - \mu| < \sigma\}$ 应()

(A) 单调增大 (B) 单调减小 (C) 保持不变 (D) 非单调变化。

(3) 设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $y = f(x^2 + y^2) + f(x + y)$ 所确定, 且 $y(0) = 2$, 其中 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(4) = 1$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ 等于()

(A) 1. (B) $-\frac{1}{7}$. (C) $\frac{1}{7}$. (D) 0.

(4) 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{p_0}$, $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{p_0}$ 存在, 则

(A) $f(x, y)$ 在 p_0 点连续.

(B) $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在 p_0 点连续.

(C) $f(x, y)$ 在 p_0 点存在全微分 $dz = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{p_0} dx + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{p_0} dy$.

(D) (A), (B), (C) 都不对.

(5) 设有曲线积分

$$I = \int_L (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$$

其中积分表达式是某二元函数 $u(x, y)$ 的全微分, 则这时 $u(x, y)$ 等于

(A) $(x^2 + y^2)(\cos x + \cos y)$. (B) $(x^2 + y^2)$.

(C) $x^2 \cos y + y^2 \cos x + c$. (D) $(\cos x + \cos y)e^x$.

三、(每小题 3 分, 共 15 分)

(1) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin x} - 1) \ln(1 + 2x)}{(1 - e^{4x}) \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}$.

(2) 设 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且对任意 x, y, t 均有 $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. 又已知 $f(x_0, y_0) = a$, 试求:

$$\left[x^2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

(3) 计算 $\int_0^a \frac{1}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} dx$

四、(5 分) 设 $F(x) = \int_0^a f(x + y) dy$, 其中 $a > 0$, $f(u)$ 为处处有定义且单调增加的连续函

数,试讨论 $F(x)$ 的增减性。

五、(7分) 求级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和。

六、(6分) 改变下列累次积分的积分顺序

$$\int_0^{\sqrt{5}} dy \int_{y^2}^{3y} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{5}}^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$$

七、(7分) 设 S 为以 Γ 为边界的光滑曲面,试求连续可微函数 $\Phi(x)$,使展布在 S 上的曲面积分 $\iint (1-x^2)\Phi(x)dydz + 4xy\Phi(x)dzdx + 4xzdx dy$ 与曲面 S 的形状无关。

八、(10分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

(1) 分别写出以 A 和 A^{-1} 为矩阵的二次型;

(2) 求 $A, A^{-1}, A^2 + A$ 的特征根(值);

(3) 求相应于 A, A^{-1} 的二次型的法式(标准形)。

九、(7分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数,且满足条件 $|f(x)| \leq a, |f''(x)| \leq b$,其中 a, b 都是非负常数, C 是 $[0, 1]$ 内任意一点,证明 $|f(C)| \leq 2a + \frac{b}{2}$ 。

十、(6分) 设 ξ, η 是相互独立且服从同一分布的两个随机变量,已知 ξ 的分布律为 $P(\xi = i) = \frac{1}{3}, i = 1, 2, 3$ 。又设 $X = \max(\xi, \eta), Y = \min(\xi, \eta)$ 。

(1) 写出二维随机变量 (X, Y) 的分布律:

$Y \backslash X$	1	2	3
1			
2			
3			

十一、(6分) 从一批钉子中抽取 16 枚,测得其长度为(单位:cm)2.14,2.10,2.13,2.15,2.13,2.12,2.13,2.10,2.15,2.12,2.14,2.10,2.13,2.11,2.14,2.11。设钉长分布为正态,试在下列情况下求总体期望 μ 的置信度为 0.90 的置信区间(1) 已知 $\sigma = 0.01cm$; (2) σ 为未知

数学一第三套模拟试题

一、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

(1) 过平面 $3x - y + 2z - 2 = 0, x + y - 4z - 3 = 0$ 的交线且与平面 $x + y + 2z - 1 = 0$ 垂直的平面方程为_____。

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos(e^x - 1)$ 与 $2^m x^n$ 是等价无穷小, 则 $m = \underline{\hspace{1cm}}, n = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(3) 已知函数 $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$, 则 $df(1, 1, 1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) 向量场 $\vec{A} = x^2 y^2 z \vec{i} + xy^3 \vec{j} + xyz^3 \vec{k}$ 的旋度 $\text{rot} \vec{A} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5) 设随机变量 X 服从 $(0, 2)$ 上的均匀分布, 则随机变量 $Y = X^2$ 在 $(0, 4)$ 内概率分布密度 $f_Y(y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、选择题(每小题 3 分, 共 15 分)

(1) 下列命题中, 正确命题的个数是()

- ① 一个向量组的极大无关组唯一时, 该向量组线性无关;
- ② 一个向量组线性无关时, 该向量组的极大无关组唯一;
- ③ 如果矩阵 A 的所有 $r (r > 0)$ 阶子式等于零, 那么 A 的秩小于 r ;
- ④ 如果矩阵 A 的秩是 $r (r > 0)$, 那么 A 的所有 r 阶子式不等于零。

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(2) 函数 $f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \leq x < 1 \\ -10, & x = 1 \\ x+1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 在闭区间 $[0, 2]$ 上()

- (A) 无最大值, 也无最小值. (B) 只有最小值, 无最大值.
- (C) 只有最大值, 无最小值. (D) 既有最大值, 也有最小值.

(3) 设曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 $x = 1$ 的交线在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线对 y 轴的斜率为 1, 则()

- (A) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. (B) $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 1$.
- (C) $f(x, y) = xy$. (D) $f(x, y) = \sqrt{3-x^2-y^2}$.

(4) 已知函数 $f(x, y)$ 定义在点 a 的邻域内有: ()

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a-h)] = 0,$$

则:

- (A) a 点一定是 $f(x)$ 的跳跃间断点.
- (B) a 点一定是 $f(x)$ 的连续点.
- (C) a 点一定是 $f(x)$ 的可去间断点.
- (D) 以上说法都不对.

(5) $I = \iint_{\Sigma} dx dy$, Σ 是 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧, 则 I 值为()

- (A) 0. (B) πa^2 . (C) $-\pi a^2$. (D) $-4\pi a^2$.

三、(每小题 6 分, 共 18 分)

(1) 已知 $f(x)$ 在 $x = 12$ 的邻域内为可导函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 12} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 12} f'(x) = 991$. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 12} \frac{\int_{12}^x \left[t \int_t^{12} f(\theta) d\theta \right] dt}{(12-x)^3}$$

(2) 旋转面 $4z = x^2 + y^2$ 上某点 M 处的切平面为 π , 若平面 π 过曲线 $x = t^2, y = t, z = 3(t-1)$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的切线为 l , 试给出平面 π 的方程。