LINZHEN MOQIANG

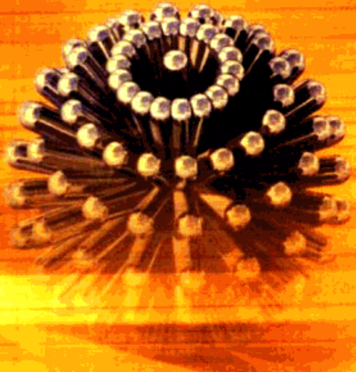
临阵磨枪

中考数学备忘

BEIWANG

周邦杰 朱传福 周征军 喻俊鹏 编著

翁钟贵 主编



湖北教育出版社

前　　言

《临阵磨枪》丛书，是依据部颁最新教材和最新高考改革方案，力邀重点中学知名教师撰写而成的精作，旨在使概念系统化，理论条理化，知识层次化，实验简明化，计算技巧化，记忆科学化。在学生考前起到“临阵磨枪，既快又光”的作用。

在编著的过程中，我们既突出各科的特点，又强调各类考试，特别是升学考试的实战性。具体说来，每册书大致由以下几部分组成：

一、“临考备忘”：将所学知识科学总结，巧妙归纳，把完整清晰的知识脉络交给学生，帮学生进行知识过滤和梳理，并教以高效的记忆方法。

二、“实战点拨”：题海无边，但仍有规律可循。我们选了一些巧而不偏的新颖典型例题，教学生如何举一反三和触类旁通。

三、“临考提示”：倾名家毕生的教学经验，通过研究高考的变化和发展，准确无误

地展示亮点、热点，教你“临门一脚”的真功。

这套丛书相当于名师考前的一次串讲，使学生不致在考前迷失在茫茫题海之中，特别适合学生考前的第二、第三轮复习。

编著这套丛书，得到郑兴国先生的大力支持和真诚帮助，在此致以衷心地谢意。协助编写的人员还有苏贤禄、喻建炎、王华香等。

由于编写时间仓促，水平有限，错漏难免，敬请读者斧正。

主编 翁钟贵

2003.12 于武汉

目　　录

代数部分

几何部分

第一章　实　数

【临考备忘】

一、知识结构

- 实数
  - 实数与数轴
  - 绝对值、相反数、倒数
  - 实数的运算
  - 科学记数法

二、考点纲要

1. 实数相关概念

实数：有理数与无理数的统称.

有理数：整数与分数的统称.

无理数：无限不循环小数.

实数的分类：(实数与有理数都有两种分类方法)：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\text{有限小数或无限循环小数}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\text{— 无限不循环小数}\end{cases}$$

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\begin{cases}\text{正有理数}\\ \text{正无理数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负实数}\begin{cases}\text{负有理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}
$$

$$
\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}
$$

$$
\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}
$$

理解数的概念和分类是把一个数判断为哪类数的关键.

【例 1】在下列各数中,①π　②3.14　③$\frac{22}{7}$　④$\sqrt{3}$　⑤0.1010010001…　⑥$\sqrt{\frac{25}{36}}$　⑦$(-\sqrt{2})^2$　⑧ctg30°　⑨$-\sqrt{16}$　⑩$\sqrt[3]{8}$ 哪些是有理数?哪些是无理数?

解:有理数是②③⑥⑦⑨⑩.

无理数是①④⑤⑧.

解析:① 学生对$\frac{22}{7}$这个数易判错,它与 π,3.14 易混淆,实质它是一个分数,是有理数.

② 注意:带有根号的数不一定是无理数,无限小数不一定是无理数,无理数也不一定都

是开方开不尽的数.

③ 无理数有三种形式,a.常数,如 π;b.无限不循小数,如 0.101001…;c.开方开不尽的方根,如$\sqrt[3]{2}$.

2. 数轴

(1) 定义:规定了原点、正方向、单位长度的一条直线.

(2) 数轴的三要素:原点,正方向,单位长度.

(3) 数轴上的点与实数是一一对应关系.

3. 相反数

(1) 相反数:只有符号不同的两个数.

(2) 任何数前面加上负号就变为它的相反数.如 a 与 $-a$.

(3)0 的相反数仍是 0.

(4) 互为相反数的两个数它们的和为零.它们的绝对值相等.

【例 2】若 a、b 互为相反数,m、n 互为倒数,k 是 4 的平方根,求 $2003a+2002b+mnb+k^2$ 的值.

解:$\because a$、b 互为相反数,$\therefore a+b=0$,

$\because m$、n 互为倒数.

$\therefore mn=1$. $\because k$ 是 4 的平方根,$\therefore k^2=4$.

$\therefore 2003a+2002b+mnb+k^2$

$=a+2002(a+b)+mnb+k^2$

$=a+b+k^2=4$.

解析:理解相反数、倒数、平方根的定义及性质是解题的关键.

4. 绝对值

(1) 代数定义:正数的绝对值是它本身,负数的绝对值是它的相反数;0 的绝对值是 0.

(2) 几何意义：一个数的绝对值就是在数轴上表示这个数的点离开原点的距离.

(3) 几个重要结论：

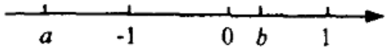
① 任何数的绝对值都是非负数，即 $|a| \geqslant 0$.

② 非负数的绝对值是它本身.

③ 非正数的绝对值是它的相反数.

要想去掉绝对值符号，就要知道绝对值符号里数的性质符号，再根据定义去掉绝对值.

【例 3】实数 a、b 在数轴上的位置如图，化简 $\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-1)^2}-|a+b|$



解：由图可知 $a<-1<0<b<1$

$\therefore a-b<0, b-1<0, a+b<0$

则 $\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-1)^2}-|a+b|=|a-b|+|b-1|-|a+b|=b-a+1-b+a+b$
$=b+1$

解析：由于 $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|$；

$\sqrt{(b-1)^2}=|b-1|$，关键是如何去掉绝对值符号，要去掉绝对值，就需知道 $a-b$, $b-1$ 与 $a+b$ 的符号，这由图可知.

5. 倒数与负倒数

(1) 倒数：两个数的乘积等于 1，这两个数互为倒数.

负倒数：两个数的乘积等于 -1，这两个数互为负倒数.

(2) 互倒两数之积等于 1，若 a、b 互为倒数，则 $ab=1$

互为负倒数的两数之积等于 -1，若 a、b 互为负倒数，则 $ab=-1$.

(3) 0 没有倒数.

(4) ±1 的倒数是它本身.

6. 科学记数法

(1) 把一个数记成 $a\times10^n$($1\leqslant|a|<10$,n 为整数)的形式叫科学记数法.

(2) 绝对值大于或等于 1 的数,用科学记数法表示时,n 的值是整数位数减去 1,如 $583200=5.832\times10^5$.

$-127.4=-1.274\times10^2$.

(3) 绝对值小于 1 的数,用科学记数法表示时,n 的绝对值是第一个不为零的数前面所有 0 的个数.

如:

$0.000356=3.56\times10^{-4}$,

$-0.00125=-1.25\times10^{-3}$.

7. 近似数与有效数字

(1) 截取近似数的方法有去尾法、近一法和四舍五入法,但用得最多的还是四舍五入法.

(2) 精确度:一个近似数四舍五入到哪一位叫做精确到哪一位.

精确度常用三种形式表示出来 ① 保留几位有效数字;② 精确到零点几;③ 精确到哪一位(如千位、十分位、百分位等).

(3) 有效数字:一个由四舍五入法得到的近似数,从左边第一个不为 0 的数字起,到最末位数字为止,中间的数都叫有效数字.

注:中间的 0 与最末尾的 0 都是有效数字.

【例 4】

① 近似数 12.5 亿有____个有效数字,精确到____位.

② 0.7845 精确到 0.01 的近似数为____. 7892 精

确到百位的近似数为____.

③ 近似数 0.038050 精确到____位，有____个有效数字，它们分别是____.

解：①3 个　千万

②0.78　7 千 9 百或 7.9×10^3

③ 百万分位，5 个，3、8、0、5、0.

解析：解这类题对概念要理解清楚，注意四舍五入时，只看精确位紧跟后面的那一位是否满 5，如上例中 ②；确定有效数字时，不要漏掉近似数中间的零和最末尾的 0，如上例中的 ③.

8. 实数大小的比较

实数大小比较通常的方法有：

① 数轴比较法：数轴上的数，右边的数总比左边的数大，正数大于一切负数，正数都大于 0，负数都小于 0，两个负数，绝对值大的反而小.

② 差值比较法：$A-B>0\Leftrightarrow A>B$；$A-B=0\Leftrightarrow A=B$；$A-B<0\Leftrightarrow A<B$.

此法常用于两个代数式值的大小比较. 如若 $M=3x^2-3x+5$，$N=2x^2+x+1$，比较 M、N 的大小.

$\because M-N=x^2-4x+4=(x-2)^2\geqslant0$，

$\therefore M\geqslant N$.

③ 媒介值法：如：若 $a=(-\frac{3}{4})^{-3}$，$b=-(\frac{3}{4})^3$，$c=(\frac{3}{4})^{-3}$. 比较 a、b、c 的大小. $\because a=(-\frac{3}{4})^{-3}=-(\frac{4}{3})^3<-1$；$b=-(\frac{3}{4})^3>-1$ 且 $b<0$，$c=(\frac{4}{3})^3>0$，由媒介值法，很容易得出 $c>b>a$.

④ 作商法：两个正数 a、b，$\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$

$\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$；$\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$

⑤ 分子有理化：设 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{p}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$，$\sqrt{c}-\sqrt{d}=\frac{p}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$ 再比较分母的大小.

【例 5】 比较下列各组数的大小

① $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{6}+\sqrt{5}$；② $\sqrt{7}-\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{6}-\sqrt{5}$；

③ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ 与 $-\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$；④ $\sqrt{2-a}$ 与 $\sqrt[3]{a-4}$.

解：① $\because(\sqrt{7}+\sqrt{6})-(\sqrt{6}+\sqrt{5})=\sqrt{7}-\sqrt{5}>0$，

$\therefore\sqrt{7}+\sqrt{6}>\sqrt{6}+\sqrt{5}$.

② $\because\sqrt{7}-\sqrt{6}=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$，$\sqrt{6}-\sqrt{5}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

而 $\sqrt{7}+\sqrt{6}>\sqrt{6}+\sqrt{5}$，

$\therefore\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}<\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$，即 $\sqrt{7}-\sqrt{6}<\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

③ $\because\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$，$-\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$，

$\therefore\sqrt{\frac{1}{4}}=-\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$.

④ 由 $\sqrt{2-a}$ 得 $a\leqslant2$，$\therefore\sqrt[3]{a-4}<0$ 而 $\sqrt{2-a}\geqslant0$.

$\therefore\sqrt{2-a}>\sqrt[3]{a-4}$.

【例 6】 以下四个数中，最小的正数是（　　）

A. $10-3\sqrt{11}$　　B. $3\sqrt{11}-10$

C. $5\sqrt{3}-18$　　D. $51-10\sqrt{26}$

解：$\because3\sqrt{11}-10<0$，$5\sqrt{3}-18<0$

∴ B、C 应排除

$$又 10-3\sqrt{11}=\frac{1}{10+3\sqrt{11}}$$

$$51-10\sqrt{26}=\frac{1}{51+10\sqrt{26}}$$

$$而\ 10+3\sqrt{11}<51+10\sqrt{26}$$

$\therefore 10-3\sqrt{11}>51-10\sqrt{26}$　故正确答案 D.

解析：实数大小的比较方法较灵活，使用时要观察其特点，选择合适的方法，分子（分母）有理化的方法常用.

9. 实数的运算

实数的运算注意灵活运用实数的加、减、乘、除、乘方、开方的运算法则和幂的运算法则以及零指数，负整数指数的法则，会运用实数的运算律，运算顺序解决实数的计算问题.

实数的运算顺序：

(1) 先算乘方和开方，再算乘除，最后算加减.

(2) 如果有括号先算小括号，再算中括号，最后算大括号.

(3) 如果没有括号，在同一级运算中，要从左到右依次进行运算.

【例 7】计算 $[-3\times(-\frac{3}{2})^{-2}+(-2^2)\times 0.125+(\sqrt{7})^0\div(\frac{4}{3})^{-1}]\div|2\times(-1.25)^2-3\frac{5}{8}|$

解：原式 $=[-3\times(\frac{2}{3})^2-4\times\frac{1}{8}+1\div\frac{3}{4}]\div|2\times(-\frac{5}{4})^2-\frac{29}{8}|$

$$=(-\frac{4}{3}-\frac{1}{2}+\frac{4}{3})\div|\frac{25}{8}-\frac{29}{8}|=-1.$$

解析：计算题重点注意运算法则，运算顺序，运算技巧，如有小数与分数混合运算，一般把小数化为分数，带分数化为假分数等.

10. 非负数

(1) 非负数：正数和 0 的统称. 非正数：负数和 0 的统称.

(2) 几种常见的非负数：$a^2 \geqslant 0$，$|a| \geqslant 0$，$\sqrt{a} \geqslant 0(a \geqslant 0)$.

(3) 非负数的性质：几个非负数的和为 0，则必须同时为 0. 非负数的性质对解决非负数的问题很重要.

【例 8】已知 x、y 是实数，且 $(x+y-1)^2$ 与 $\sqrt{2x-y+4}$ 互为相反数. 求实数 y^x 的负倒数.

解：$\because (x+y-1)^2$ 与 $\sqrt{2x-y+4}$ 互为相反数，

$\therefore (x+y-1)^2+\sqrt{2x-y+4}=0$.

$\because (x+y-1)^2 \geqslant 0$，$\sqrt{2x-y+4} \geqslant 0$，

而其和为 0，

$\therefore$ 有 $\begin{cases} x+y-1=0, \\ 2x-y+4=0, \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} x=-1, \\ y=2. \end{cases}$

$\therefore y^x=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$，

则 y^x 的负倒数是 -2.

解析：这类题解答的关键是利用非负数的性质.

【实战点拨】

【例 1】

(1) 已知 $a>b$，$b>c$，判断 $c-a$ 的正、负；

(2) 已知 $a<0$，$b<0$，$c<0$，判断 $(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^2+a^2)$ 的正、负；

(3) 已知 $a<0,b<0,c<0$,判断$(a\cdot b\cdot c)^2$ 和 $(a\cdot b\cdot c)^3$ 的大小

(4) 已知 $a<0,b<0,c>0$,判断$(a+b)(c-b)$ 和 $(a+b)(b-c)$ 的大小.

解:(1) $\because a>b,b>c.\therefore a>c$,则 $c-a$ 是负数.

(2) $\because a、b、c$ 都是负数,$\therefore a^3,b^3,c^3$ 都是负数;

a^2,c^2 是正数. $\therefore a^3+b^3,b^3+c^3$ 都是负数,

$\therefore (a^3+b^3)\cdot(b^3+c^3)\cdot(c^2+a^2)$ 是正数.

(3) $\because a、b、c$ 都是负数,$\therefore a\cdot b\cdot c$ 是负数.

则$(abc)^2$ 是正数,$(abc)^3$ 是负数

$\therefore (a\cdot b\cdot c)^2>(a\cdot b\cdot c)^3$

(4) $\because a、b$ 是负数. $\therefore a+b<0$

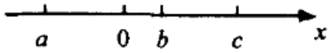
$\because c>0,b<0\quad\therefore c-b>0\quad b-c<0$

$\therefore (a+b)(c-b)<0;(a+b)(b-c)>0.$

$\therefore (a+b)(c-b)<(a+b)(b-c)$

解析:正确使用数轴比较法来比较数的大小.

【例 2】有理数 $a、b、c$ 对应的点在数轴上的位置如下图:



(1) 判断下列各数的符号:$-a,-b,c-a,b-c,c-b,\dfrac{a-b}{c},\dfrac{a+b}{c}$

(2) 比较下列每一对数的大小:$|a|$ 和 $|a-b|$;$|c-b|$ 和 $|c+a|$

(3) 比较 $a,-a,b,-b,c,-c$ 的大小,并用"<"连接起来.

解:由图可知 $a<0<b<c$ 且 $|a|>b\quad c>|a|$

(1) $-a>0,-b<0,c-a>0,b-c<0,c-b$

$>0, \frac{a-b}{c}<0, \frac{a+b}{c}<0$

(2) $\because a<0 \quad a-b<0 \quad$ 而 $a-b<a$

$\therefore |a|<|a-b|$.

$\because c-b>0, c+a>0$

而 $(c-b)-(c+a)=-(a+b)>0$

$\therefore |c-b|>|c+a|$

(3) 用特殊值法. 令 $a=-2, b=1, c=3$，则 $-a=2, -b=-1, -c=-3$

则 $a, -a, b, -b, c, -c$ 的大小是 $-c<a<-b<b<-a<c$

解析:注意数形结合的思想解题,有时借助数轴,利用特殊值法对比较大小很方便.

【例 3】化简 $|x+1|-\sqrt{x^2-4x+4}$

解:$\because |x+1|-\sqrt{x^2-4x+4}$

$=|x+1|-|x-2|$

$\therefore$ 令 $x+1=0$，　得 $x=-1$；

令 $x-2=0$，　得 $x=2$.

当 $x<-1$ 时,原式 $=-(x+1)+(x-2)=-3$；

当 $-1\leqslant x<2$ 时,原式 $=x+1+x-2$

$=2x-1$；

当 $x\geqslant 2$ 时,原式 $=x+1-(x-2)=3$.

解析:由于 $\sqrt{x^2-4x+4}=|x-2|$,因此本题实际上是要化简含有绝对值符号的式子,关键是去掉绝对值符号,这里绝对值符号内的代数式值的符号不能确定,因而采取“零点划分法”分类讨论.

这类题需对实数进行分类讨论,解此类题的难点在于如何进行恰当的分类,方法是观察题目的