初等数学论丛

CHU DEN SHU XUE LUN CONG

5

初 等 数 学 论 丛

（第5辑）

上 海 教 育 出 版 社

初等数学论丛

(第5辑)

本社编

上海教育出版社出版

(上海永福路123号)

新华书店上海发行所发行　上海崇明印刷厂印刷

开本787×1092 1/32　印张3.75　字数82,000

1982年12月第1版　1982年12月第1次印刷

印数1—7,700本

统一书号：7150·2814　　定价：0.32元

目　录

“关系映射反演原则”的应用

大连工学院应用数学研究所　徐利治

杭州大学计算数学教研室　王兴华

引　言

所谓“关系映射反演原则”，是指分析处理问题的一种一般性模式，它包括对所研究的问题中的各种“关系”(例如数量关系，几何中各元素之间的位置关系，等等)，采取“映射”和“反演”两个步骤去解决问题的过程.

众所周知，在现代科学技术领域中，为了解决各种具体系统中的一些实际问题，往往采用“数学模型方法”．即利用形式化的数学模型去反映(模写、刻画、表征)现实系统中的关系结构，然后通过对模型的分析研究得出结论，再把它翻译回来解答现实原型中的某些问题．这种处理问题的过程就已经体现了“关系—映射—反演”的思想．因为从给定的系统(即现实原型)到数学模型的某种对应关系，即可理解为一种“映射”；把模型上得出的理论分析结果(或结论)又返回到现实原型上去，从而给出实际问题的解答，这就是一个“反演”.

其实，即使在日常生活中，人们也经常自觉或不自觉地在运用着关系映射反演原则．例如，一个人对着镜子剃胡须．镜

子里出现着他脸颊上各部位胡须的映象，从胡须到映象的关系就是“映射”．所以映射就是连系着原象和映象的一种对应关系．他用剃刀修剪胡须时，胡须和剃刀两者（两个原象）间的关系可以看作“原象关系”．这种原象关系在镜子里表现为“映象关系”．他从镜子里看到这种映象关系后便能指使剃刀的映象去接触胡须的映象并进行修剪．于是也就真正修剪了胡须．这里显然已经用到了“反演原则”．因为他已根据镜子里的映象能对应地反演为原象的这一原理使剃刀准确地修剪了真实的胡须(原象)．

为了缩短名词的写法，我们不妨把关系（Relationship）映射（Mapping）反演（Inversion）原则简称为“RMI 原则”．显然，如果只是泛泛地谈论一般科学方法论中的这项原则，则对于研究数学问题还是无济于事的．本文专讨论数学中的 RMI 原则的表述形式及其应用．

我们认为，即使从数学教学法观点来看，把 RMI 原则概括地表述出来介绍给学生，将能帮助学生用统一的观点去理解不同数学分支中某些解题方法的共同本质，进一步还能训练学生有意识地运用这项原则去思考、分析并解决数学问题．

RMI 原则在现代数学的各个领域都有若干应用．这里只就初等数学和古典分析数学范围来讨论，主要是通过举例说明问题．

从简单的例子说起

［例 1］　人们进行庞大数字（所谓“天文数字”）的开方乘方等数值计算时，可以应用对数方法．首先，把要计算的数字取对数，这相当于把原来待求的数值“映射”成它的对数．把

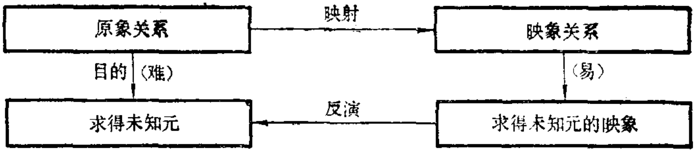
对数的相应结果算出来之后，再求出它的反对数，这又相当于把对数反变换(反演)成原来要计算的对象．这样就完成了计算任务．

比方要计算 $p=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{7}}$ 的值，则上述过程可以用如下的框图表示：

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{原象关系}\ p=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{7}}} \arrow[r, "\text{对数映射}"] \arrow[d, "\text{目的}"'] & \boxed{\text{映象关系}\ \lg p=\frac{1}{3}\lg a+\frac{1}{7}\lg b} \arrow[d, "\text{做乘法及加法}"] \\
\boxed{\text{求得}\ p\ \text{的数值}} & \boxed{\text{求得}\ \lg p\ \text{的数值}} \arrow[l, "\text{反演}", "\text{(取反对数)}"']
\end{tikzcd}$$

在这个例子中，映射方法选取得非常成功，实质上抓住了指数运算与真数运算的对应（映射与反演的关系），把后者的计算问题转化为前者的计算(把乘法转化为加法，把开方根计算转化为简单除法或分数乘法)，从而大大提高了计算效率．纳皮尔 (J. Napier) 在 16 世纪末期把上述“映射及其反演”发展成为一套数值计算方法，并编制了对数表作为映射,反演的工具，这就是他在数学史上不可磨灭的功绩．

仔细观察和思考上图所示的模式，即不难发现 RMI 原则在数学中是很带普遍性的思想方法．我们知道，在一个数学课题中，可以有各种各样的关系．通常利用“关系”确定一个不知其性状的数学对象，这种数学对象可称为“未知原象”或简称“未知元”．当然，关系结构中还会含有一些已知元素或已知对象．所有这些元素或对象都称为“原象”（例如例 1 中的未知数值 p 即为原象关系结构中的未知元，而 a 与 b 便是已知元素）．所谓数学中的 RMI 原则，就是由下图所示的一般模式：



这里所说的映射是指某种“一一对应关系”，因此存在逆映射，这就保证了反演的可能性．最后一步求得未知元，是指把未知原象的性状确定下来．

［例 2］ 利用射影变换的不变性，可以将平面几何中的许多定理推广到射影几何中去．今以著名的巴斯卡（B. Pascal）定理为例来加说明．巴斯卡定理断言：“圆内接六边形的三对对边延长线的交点必共线”．把圆换成椭圆，这定理照样成立，这就是射影几何中的巴斯卡定理．

给定一个椭圆和它的内接六边形，于是三双对边的延长线给出三个交点 A、B、C（假定其中没有无穷远点）．今把它们用直线联结起来，便得到一个未知性状的几何物，即“未知原象”．上述整个几何图形表现的关系便是原象关系．为了确定未知原象的几何性状，可对上述原象关系实施“射影变换”，即把上述椭圆置于一个适当的圆锥的截面上，使之正好成为截口，这时圆锥底面上的对应图形（射影）是一个圆内接六边形．由平面几何中的巴斯卡定理（六边形三双对边延长线的三个交点共线），根据射影变换下共线关系的不变性，反过来由对应关系便推知未知原象（A、B、C 两两连成的线性图形）也是一直线．

在上述推理中，“映射”就是射影变换，“映象关系”就是圆内接六边形及三对对边延长线的三交点．求得的映象就是三交点联成的一直线．反过来的对应关系便是“反演”．求得的

未知元就是由 A、B、C 联结成的直线图形.

[例 3] 初等微积分学中，寻求某些幂级数的"和函数"问题，也往往可根据 RMI 原则来获得解决. 例如，试求下列幂级数的和函数:

$$S(x)=\frac{x^2}{1\cdot2}-\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{x^4}{3\cdot4}-\cdots. \qquad (|x|<1)$$

这里所谓求"和函数"，就是寻求函数 $S(x)$ 的初等函数的有限形式的表达式. 这里，这种"表示形式"就是我们所寻求的对象("未知原象"). 当然，和函数实质上已被上述幂级数所确定，所以幂级数与 $S(x)$ 的相等关系便是"原象关系". 我们知道，幂级数在它的收敛区域内可以逐项积分和逐项求微商. 就目前的情况而言，采用微商算子 D 所给出的如下映射: ❶

$$f\longrightarrow Df\equiv\frac{df}{dx},$$

可以把 $S(x)$ 变换成一个较简单的熟知对象(映象):

$$S'(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots=\log(1+x).$$

在原象 f 满足 $f(0)=0$ 的限制下，映射 D 是一对一的，其反演是

$$g\longrightarrow D^{-1}g\equiv\int_0^x g(t)dt.$$

因此 $S'(x)$ 的反演结果便给出了原象表示式

$$S(x)=\int_0^x \ln(1+t)dt=(1+x)\ln(1+x)-x.$$

上述的解题过程可表示为下列框图:

---

❶ 我们用 $A\longrightarrow B$ 这样的记法表示原象 A 被映射成 B. 后者就是 A 的映象.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{(n-1)n}} \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\text{目的}"'] & \boxed{S'(x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n}} \arrow[d, "\text{熟知}"] \\
\boxed{S(x)=(1+x)ln(1+x)-x} & \boxed{S'(x)=ln(1+x)} \arrow[l, "D^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

再举一例，试求下述幂级数的和函数：

$$S(x)=1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\cdots. \qquad (|x|<1)$$

此时采用映射

$$f(x)\longrightarrow \int_0^x\int_0^v f(u)\,du\,dv,$$

可得

$$\int_0^x\int_0^v S(u)\,du\,dv=x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{x^2}{1-x}. \qquad (|x|<1)$$

施行反演

$$g(x)\longrightarrow \frac{d^2}{dx^2}g(x),$$

则得

$$S(x)=\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^2}{1-x}\right)=\frac{2}{(1-x)^3}, \qquad (|x|<1)$$

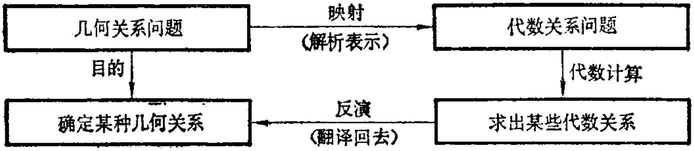
这便是所要寻找的原象的表示式.

上述诸例表明，应用 RMI 原则去处理数学问题时，重要关键是如何选取合适的映射．事实上，只有当映射选得好，才能使问题迎刃而解．

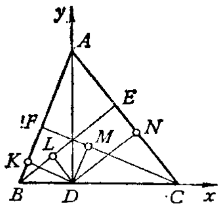
［例 4］ 在解析几何中，笛卡儿坐标平面上的点用数偶 (x, y) 来表示，直线和圆分别用 x、y 的一次方程式和二次方程式来表示．这样，作为“原象”的几何图形——点、线、圆等便和作为“映象”的 (x, y) 及含 x、y 的一次、二次式一一对应起来．这种对应关系即是“映射”．通常，一个几何问题无非是关于某些特定几何图形间的关系问题．这种关系在上述映

射下便转化为代数式之间的关系问题（即映象关系）. 于是，通过代数运算不难求得所需要的一些代数关系. 这些关系再翻译回去，就可得出原来几何图形（原象）间的某种几何结论，而这正是原来要求解答的问题.

上述思想方法可用框图表示如下：



今举一例，以示上述原则的具体运用. 设 H 为三角形 ABC 的垂心，D、E、F 为三高的垂足. 自点 D 分别作 AB、BH、CH、CA 的垂线，其垂足分别为 K、L、M、N. 求证此四点共线.（见右图）



为简化问题，取 D 为坐标原点，DC、DA 为 x、y 轴，并设三顶点的坐标为 $A(0,\ a)$、$B(b,\ 0)$、$C(c,\ 0)$. 这时，不难列出原象图形中十条直线的映象的相应十个一次方程式（为节省篇幅，方程具体形式不一一写出），求解各组一次联立方程，便可求得各点坐标：

$$H\left(0,\ \ -\frac{bc}{a}\right),\ \ N\left(\frac{a^2c}{a^2+c^2},\ \ \frac{ac^2}{a^2+c^2}\right),$$

$$K\left(\frac{a^2b}{a^2+b^2},\ \ \frac{ab^2}{a^2+b^2}\right),\ \ M\left(\frac{b^2c}{a^2+b^2},\ \ -\frac{abc}{a^2+b^2}\right),$$

$$L\left(\frac{a^2b}{a^2+c^2},\ \ -\frac{abc}{a^2+c^2}\right).$$

这些点的坐标分别满足：

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a^2c}{a^2+c^2} & \dfrac{ac^2}{a^2+c^2} & 1 \\ \dfrac{a^2b}{a^2+b^2} & \dfrac{ab^2}{a^2+b^2} & 1 \\ \dfrac{b^2c}{a^2+b^2} & -\dfrac{abc}{a^2+b^2} & 1 \end{vmatrix}=0, \quad 和 \quad \begin{vmatrix} \dfrac{a^2c}{a^2+c^2} & \dfrac{ac^2}{a^2+c^2} & 1 \\ \dfrac{a^2b}{a^2+b^2} & \dfrac{ab^2}{a^2+b^2} & 1 \\ \dfrac{c^2b}{a^2+c^2} & -\dfrac{abc}{a^2+c^2} & 1 \end{vmatrix}=0.$$

这两个代数关系式的反演就得到 N、K、M 共线和 N、K、L 共线. 故结论是 N、K、M、L 四点共线. □

[例 5] 在上例中, 如果把作为映象所在域的笛卡儿坐标平面换成高斯的复数平面, 并对点 (x, y), 过 z_1、z_2 的直线, 以 z_0 为圆心以 ρ 为半径的圆等几何对象分别对应地表成如下的复数形式:

$$z=x+iy, \qquad (i=\sqrt{-1})$$

$$z-z_1=\lambda(z_2-z_1), \qquad (-\infty<\lambda<\infty)$$

$$|z-z_0|=\rho.$$

则在上述对应关系作成的"映射"下, 凡平面几何中有关点、线、圆的几何关系等问题, 均可表成复数的等式关系. 这样, 只须通过复数的一些代数计算, 把得出的代数关系式"反演"成几何关系, 便可获得几何命题的证明. 因此, 如上所述的基本思想方法, 仍可纳入 RMI 原则框架.

几个较难一点的例子

这里将介绍一种非常有用的"映射", 叫做"幂级数变换"(对于寻找或确定一个数列来说, 往往又把它叫做"发生函数"). 这是在近代初等组合数学及概率计算中应用很广的一种映射方法.

方法的大意是: 为了研究一个数列, 例如 $\{a_n\}$: a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n, $\cdots$ 的结构, 我们把一个形式幂级数

$$a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n+\cdots$$

与 $\{a_n\}$ 对应起来. 这就把一个离散的对象换成了一个在分析学上便于处理的对象. 因为在分析学中对于幂级数运算已有着一套固定的方法, 所以在上述对应(映射)下, 作为幂级数系数即数列 $\{a_n\}$ 的结构问题, 也就便于通过幂级数运算去研究了.

[例 6] 试按照 RMI 原则, 求解差分方程

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}, \qquad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

其初始条件为 $f_0=1$, $f_1=2$.

为求 f_n 的一般表达式, 可引入如下形式的"映射"(幂级数变换):

$$\{f_n\}\longrightarrow F(t)\equiv 1+\sum_{n=0}^{\infty}f_n\cdot t^{n+1},$$

这里, 在幂级数中添加 1 作为常数项, 只是为了下面计算方便起见(其实令 f_0 代表常数项, f_n 表示 t^n 的系数, 方法仍然可以照样进行).

在上述映射中, $\{f_n\}$ 是未知的, 所以 $F(t)$ 也是未知的. 根据给定的"原象关系":

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}, \qquad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

连同初始条件 $f_0=1$, $f_1=2$, 可以相应地获得映象 $F(t)$ 之间的关系:

$$\begin{aligned}F(t)&=1+f_0t+f_1t^2+f_2t^3+\cdots\qquad +f_nt^{n+1}\quad+\cdots\\&=1+t\quad+f_0t^2+f_1t^3+\cdots\cdots\quad +f_{n-1}t^{n+1}+\cdots\\&\qquad\quad +t^2\quad +f_0t^3+\cdots\ +f_{n-2}t^{n+1}+\cdots\cdots\\&=1+tF(t)+t^2F(t).\end{aligned}$$

这就从原象关系导出了映象关系 $F(t)=1+(t+t^2)F(t)$. 由此求出映象

$$F(t)=\frac{1}{1-t-t^2}.$$

从幂级数展开式求出系数序列的过程，叫做幂级数变换的"反演". 作为最后一步，还须对求得的映象 $F(t)$ 作反演. 事实上，利用分项分式法可得

$$F(t)=\frac{1}{1-t-t^2}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{1-at}-\frac{b}{1-bt}\right),$$

其中 $1-t-t^2=(1-at)(1-bt)$，且

$$a=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\quad b=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

因此可得出 $F(t)$ 的展开式

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}t^n=1+\sum_{n=0}^{\infty}f_n\cdot t^{n+1}.$$

比较即得

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right\}.$$

这样便完全确定了 $\{f_n\}$.

本例中的计算固然有点复杂，但从思想方法来讲，显然还是符合 RMI 原则的框架.

[例 7] 一般的二项系数记为

$$\binom{a}{k}=\frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!},$$

这里的 a 可以是任意实数. 特别 $\binom{0}{0}=1$. 今设 α 和 β 是两个任意实数，试求级数和

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}.$$

这里所谓"求和"，是指寻求 c_n 的简明表达式，即不再包含求和运算的表达式. 为此目的，我们采取如下步骤:

第一步，明确原象关系．简记

$$a_n=\binom{\alpha}{n}、\quad b_n=\binom{\beta}{n},$$

则 $\{c_n\}$ 就由如下关系所确定：

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot b_{n-k}, \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

这就是"原象关系"，其中尚未找出一般简明表示式的 c_n 就是未知元．

第二步，引用幂级数变换作为映射工具：

$$\{a_n\}\longrightarrow A(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n,$$

$$\{b_n\}\longrightarrow B(t)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nt^n,$$

$$\{c_n\}\longrightarrow C(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^n.$$

第三步，找出映象关系．由幂级数的乘法规则和原象关系，可得

$$C(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot b_{n-k}\right)t^n=A(t)\cdot B(t).$$

这说明映象关系就是简单的乘积关系．

第四步，确定 $\{c_n\}$ 的映象．根据牛顿二项式定理，

$$A(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}t^n=(1+t)^{\alpha},$$

$$B(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\beta}{n}t^n=(1+t)^{\beta}, \qquad (|t|<1)$$

从而立即得出 $\{c_n\}$ 的映象为

$$C(t)=(1+t)^{\alpha}\cdot(1+t)^{\beta}=(1+t)^{\alpha+\beta}.$$

最后一步，作反演．求 $C(t)$ 的展开式系数，可得

$$c_n=\binom{\alpha+\beta}{n}.$$

这就确定了原象. 即得到了下列组合恒等式成立:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}=\binom{\alpha+\beta}{n}.$$

这就是组合数学中著名的樊德蒙 (A.-T. Vandermonde) 定理.

从例 6 已可看到幂级数变换在解差分方程时的作用. 十九世纪初期的数学家, 例如拉普拉斯 (P.-S. M. de Laplace), 就已经领悟到差分方程不过是微分方程的离散化形式, 而幂级数变换不过是某种积分变换的离散化形式. 因此拉普拉斯联想到如下的积分变换

$$f(t)\longrightarrow F(s)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-ts}dt$$

作为求解微分方程的映射工具. 这一映射非常有效, 在现代数学文献及教科书中称之为“拉氏变换”, 它的研究已成为现代“运算微积分学”的理论基础.

为说明上述映射的功能, 这里举一个《工程数学》教科书中的简单例子.

[例 8] 试按照 RMI 原则求解微分方程

$$y''+2y'-3y=e^{-t},$$

其初始条件为 $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

第一步, 明确原象关系. 在本题中未知原象为 $y(t)$, 它所满足的微分方程和初始条件组成原象关系.

第二步, 应用拉氏变换作映射. 原象 $y(t)$ 的映象是

$$Y(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}y(t)dt.$$

今对微分方程两边的函数同时作拉氏变换,并顾及初始条件,则利用初等微积分中的分部积分法,不难求得映象关系

$$s^2Y(s)-1+2sY(s)-3Y(s)=\frac{1}{s+1}.$$

第三步,从映象关系求出映象. 可得

$$\begin{aligned} Y(s)&=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)} \\ &=\frac{3}{8(s-1)}-\frac{1}{4(s+1)}-\frac{1}{8(s+3)}. \end{aligned}$$

第四步,求 $Y(s)$ 的逆变换(即拉氏变换的反演). 利用拉氏变换对照表,可以立即写出 $Y(s)$ 的原象:

$$y(t)=\frac{1}{8}(3e^t-2e^{-t}-e^{-3t}),$$

这便是微分方程的解.

例 6、例 8 中的求解方法可以推广到一般情形,即幂级数变换与拉氏变换可分别用作求解高阶常系数差分方程与微分方程的映射工具.

用 RMI 原则分析“不可能性问题”

数学上有一类问题,叫做“不可能性问题”,即关于某类数学对象不可能存在某种属性, 或者某个系统不可能存在某种元素之类问题. 所谓“不可能性命题”就是否定某种存在性的命题. 例如“$\sqrt{2}$不是有理数”(即有理数集合中不包含$\sqrt{2}$)以及“三等分角的尺规作图不可能性”等等都是不可能性命题.

RMI 原则不仅可用以直接探索某些关系结构的未知原象, 而且也可用以分析论证某些不可能性命题. 下面举两个