

九年一貫制試用課本

(全日制)

# 概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

人民教育出版社

## 前 言

在党的总路綫的光輝照耀下，随着 1958 年以来的連續大跃进，人民公社的建立与蓬勃发展，我国已經进入了一个持續跃进的新的历史阶段。今年，我国又出现了两个高潮：一个是技术革新和技术革命的高潮，一个是农村和城市大办人民公社的高潮，这两个高潮对教育事业提出了一系列新的問題，广大工农群众要求迅速改变我国“一穷二白”的落后面貌，迅速攀登科学文化高峰，加快我国社会主义建設的速度。但是現行中小学数学教学内容陈旧落后，脱离实际，存在严重少慢差費現象，与現代科学技术飞跃发展的形势极不相称，远远不能滿足社会主义建設的迫切需要，因此，中小学数学教学必須改革。

北京师范大学数学系，在党的领导下，发动了广大师生，深入地进行了这次根本性的改革，大破数学教学的旧体系，建立新体系，在 1958 年以来的調查研究及实际工作經驗的基础上，根据“适当縮短年限，适当提高程度，适当控制学时，适当增加劳动”的精神，1960 年寒假中，我們又深入到工厂、人民公社、学校、科学研究机关等处进行調查訪問，編出了一套“九年一貫制（全日制）学校数学教学改革草案（初稿）”，根据这个草案編出了一套九年一貫制（全日制）学校数学課試用教材，这套教材分成代数、初等函数、微积分学、概率論与数理統計、制图学五科。代数中包括算术內容，但因从始至終貫穿代数因素，故定名代数。

这套数学教材的編写尽量遵循以下四点要求：

一、教材內容及体系为社会主义服务，特别是为現代化生

产和尖端科学技术服务。

二、教材体系要贯彻辩证唯物主义观点，理论联系实际的精神，以函数为纲，尽量作到数与形的结合。

三、教材中要贯彻概念与计算相结合的精神。

四、教材的分量与难易程度要适合学生实际接受能力和认识发展的客观过程。

这套数学教材还没有经过实验，希望教师能创造性地使用，必要时也可以适当增减一些材料，特别是希望教师能根据情况增加一些例题与习题，以便学生能更巩固地掌握各种概念，熟练地进行各种计算，教材中对各种计算工具作了集中介绍，希望教师能特别注意分散使用，在作习题及课外活动中，尽量要求学生使用学过的计算工具进行计算。

本书包括概率论与数理统计二部分：

概率论内容包括：概率的概念及其性质、概率的计算方法、随机变量、期望值与方差。

数理统计内容包括：大子样统计推断、小子样统计推断的几种简单方法，离差分析与相关分析初步介绍。

本书内容与生产实际紧密相联系，概念从实际引入，着重于揭露概念的实际意义，而不着重于繁复的推导。

本书强调计算和实际应用，特别是数理统计，完全讲的是方法，要求学生能具备比较熟练的计算能力。同时还特别规定了15个课时的实习。通过实习要求学生能够比较熟练地运用所学的几种统计方法以解决一般的生产问题。

在编写过程中，我们得到了许多单位的帮助，给我们提出了许多宝贵的意见，最后在教育部直接领导下，组织了北京、天津、

辽宁、山西、河南等地区的专家和优秀大、中、小学教师对这套教材进行了討論研究，我們对于这些单位的同志們在此表示衷心感謝。人民教育出版社和印刷厂也給予了热情无私的幫助，發揮了共产主义大协作的精神，在此一并致謝。

由于時間仓促，調查了解工作做得还很不够，加上我們水平較差，一定还存在許多缺点和錯誤，我們热情的希望教师和讀者提出意見，使本書不断地得到修改、补充和完善，在教育战綫上开出燦烂之花，結出丰硕之果。

北京师范大学数学系普通教育改革小組

1960年4月25日。

# 目 录

<b>第一章 基本概念</b> .....	<b>1</b>
§ 1. 概率論研究的对象及其研究的必要性.....	1
§ 2. 概率的概念.....	4
§ 3. 概率的性質.....	6
§ 4. 概率的求法.....	11
习题.....	13
<b>第二章 随机变量</b> .....	<b>17</b>
§ 1. 随机变量.....	17
§ 2. 随机变量的分布律.....	20
§ 3. 期望值和方差.....	25
习题.....	32
<b>第三章 数理統計</b> .....	<b>38</b>
§ 1. 用大子样的平均值进行产量估計.....	40
§ 2. 用大子样檢驗生产是否正常.....	41
§ 3. 用小子样檢驗生产是否正常.....	48
§ 4. 用大、小子样檢驗生产状况是否相同.....	50
§ 5. 檢驗一个变异因素对产品質量有无 影响.....	54
§ 6. 回归直綫、相关图、相关系数的公式及意义.....	61
习题.....	68
<b>附: 习题和問題</b> .....	<b>71</b>
表 1. 正态分布表.....	73
表 2. F 分布表.....	75
表 3. t 分布表.....	77

# 第一章 基本概念

## § 1. 概率論研究的对象及其研究的必要性

在我們周圍經常看到这种事件：四季变化、黑夜白昼的替換、一个大气压下（不再受其它因素影响）水在  $100^{\circ}\text{C}$  时沸騰，在  $0^{\circ}\text{C}$  时不能沸騰等等。这类事件都是必然事件。另一种事件，如在一年中每日到百貨公司买东西的人数、每年河流洪峰出現的时间、容器內一个分子的运动速度和方向等等。这类事件都是偶然事件。

为了对这两类事件——必然事件和偶然事件有比較透彻的了解，我們来分析一下这两类事件。下面我們看几个例子：

**例 1.** 苏联的人造卫星达到了第一宇宙速度（8 公里/秒），所以，能够繞着地球运轉。可見这是个必然事件。在这种情况下，“达到了第一宇宙速度”是条件，“卫星繞着地球运轉”是事件。这就是說，当条件实现时，事件就必然发生。这样的事件叫做必然事件。而美帝国主义的墜入海中的山藥蛋一样的卫星，达不到第一宇宙速度，便不能繞地球运轉。这也是一种必然現象。不过这时事件“卫星繞地球运轉”是不可能实现的。这种当条件实现时（这时条件是“达不到第一宇宙速度”），一定不能发生的事件叫做不可能事件。

**例 2.** 在一个大气压下，水的溫度达到  $100^{\circ}\text{C}$ （假定不再受其它因素影响），水沸騰是必然事件。在这里条件是“一个大气压和溫度  $100^{\circ}\text{C}$ ”。而事件是“水沸騰”。在这个条件下，事件是

一个必然事件。如果改变条件，使温度为  $50^{\circ}\text{C}$ ，气压仍为一个大气压。在这个条件下“水沸腾”不可能发生，是一个不可能事件。

**例 3.** 在大量产品中，随便从里面抽一件产品。可能抽到合格品，也可能抽到废品。这是一种偶然事件。这里条件是“对产品进行抽取”。我们把抽到一个合格品看作一个事件。当进行抽取时，这个事件可能发生，也可能不发生。我们把这种**当条件实现时，可能发生也可能不发生的事件叫做随机事件(或然事件)**。

**例 4.** 电话局在单位时间内，接到呼唤的次数是不确定的。在单位时间内“次数是 500 次”这个事件，可能发生也可能不发生。这个事件也是随机事件。其条件是“经过一个单位时间”。

一个事件发生，究竟是必然的还是随机的，总是对一定条件来说的。例如：一个工人同志原来每天大约生产另件 1000 个左右。生产另件 1000 个以上是随机事件。技术革新后，效率提高了 8 倍。生产另件 1000 个以上就成为必然事件了：由此可见，当条件改变时，这些事件发生可能性的大小也将随着改变。一个事件可以由必然发生转化为随机发生。而一个随机发生的事件，当条件改变时也可以必然发生或不可能发生。所以我们研究事件发生的规律性的时候，总是在一定的条件之下来进行的。

应该指出，随机事件绝不是毫无规律、不可捉摸的事件。实际上它也有一定的规律。例如前面我们谈到的，每天电话局接到的呼唤次数，是带有随机性的。第一天接到的呼唤次数和第二天接到的呼唤次数相差可能比较悬殊，这样单独一天一天地来看，

好象没有什么规律,但是就总的情况来看(看几个月或看几年),就会看出,每天接到的次数大多在一个确定的范围内,虽然也偶而有超出这个范围之外的时候,但这只是少有的情况.类似这样的例子很多.这些事实说明,随机事件是有规律的,只不过这种规律有一个特点,即这种规律反映的是大量事件中的特性.

由于生产技术的不断提高,工厂每日生产出的产品是大量的.又因为在生产时受着许多随机因素的影响,所以,生产一个产品是合格品还是废品,总带有一定的随机性.如果对每一个产品都进行检查,在人力、物力、时间上都是一个巨大的浪费.而且有些情况下根本没有办法一一进行检查.如对棉纱质量进行检查.对每根若都进行强力试验,势必将所生产出来的棉纱都拉断,而这样就失去了生产的意义.但是,我们知道在大量的产品中,产品的质量有一定的规律,掌握了它的规律,就可以使我们从部分产品的质量推断出整个产品质量的情况,这在现代大生产检验中具有重大的实际意义.就是这样,大量的随机事件随着生产力的发展,与人们的生产活动发生了紧密的联系,迫切要求人们集中力量对这种现象进行研究.由于人们在生产活动中不断的实践,逐渐认识到这种自然现象的性质和规律,而形成概率论这门学科.随着生产力高速度的发展,促使概率论这门学科日新月异的发展变化.它有許多新的分枝,如:数理统计、随机过程论、公用事业问题的数学理论、信息论的数学理论等等.这门新型的学科随着自动控制、原子核物理、大生产过程的不断发展,公用事业范围的扩大,而迅速的发展起来.因此,对这些规律性的研究显得越来越重要,我们必须很快的掌握这门科学,为我们伟大的社会主义建设服务.



概率論的產生和發展，充分反映了人類認識的辯證規律是“實踐——理論——實踐”。概率論所揭露出來的規律，充分証明了客觀世界中的任何現象都有着自身的規律，都是可以被人們所認識的。這些事實，徹底粉碎了資產階級各種謬論。我們學習概率論這門學科，只有用毛澤東思想武裝我們的頭腦，樹立辯證唯物主義的世界觀，才能真正的掌握。

我們這裡所講的內容僅僅是概率論、數理統計中最初步的知識。要求學生利用這些知識會解決一些實際問題，為進一步學習概率論的知識和掌握現代科學技術打下初步的基礎。

## § 2. 概率的概念

進行射擊測驗時，炮彈命中目標這一事件是隨機事件。這裡條件是“發射”。發射一次叫條件實現一次，也叫做進行了一次試驗。在抽取產品時“抽到合格品”這一事件是隨機事件。其條件是“抽取”。抽取一次叫條件實現一次，也叫做進行了一次試驗。

在條件實現一次時，隨機事件可能發生，也可能不發生。但當我們進行大量試驗時，可以看出隨機事件的發生是遵循着一定的規律的。我們看下面兩個例子：

**例 1.** 一個工廠對每天產品質量進行檢查。從每天所生產的產品中抽取一部分，其中合格品個數列成下表（見下頁首）。

我們用  $A$  表示事件“抽到合格品”，進行  $n$  次試驗（即抽取  $n$  個產品），事件  $A$  發生了  $m$  次（即合格品有  $m$  個），這個  $m$  叫做事件  $A$  出現的頻數， $\frac{m}{n}$  叫做事件  $A$  出現的頻率。在表中可看到進行大量試驗結果表明所得到的頻率具有一定的穩定性。

月/日	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	3/8	3/9	3/10
抽取的 总数	400	450	370	380	470	360	390	435	425	410
合格品 的数量	380	432	353	363	445	330	372	415	406	392
频率 = 合格品数量 = 总数量	95%	96%	95%	95.4%	94.7%	95.2%	95.3%	95.5%	95.6%	95.5%

例 2. 北京某电容器厂, 对 59 年下半年生产的电容器进行检查. 在每月的产品检查中得到合格品的频率列表如下:

月份	7	8	9	10	11	12
频率	0.97	0.975	0.98	0.99	0.98	0.98

可以看出频率具有一定的稳定性.

由以上两例可以看到, 在所有产品中抽出  $n$  个产品, 其中合格品的个数虽然是随机的, 可是抽到合格品的频率呈现出一定的稳定性, 这种稳定性反映了“抽得合格品”这个随机事件的一种客观规律. 在工厂的生产中就用产品的合格率这个名词来刻画这种规律. 对于很多其他的随机事件同样地具有这种统计规律性, 即在多次试验中事件出现的频率具有稳定性, 这种规律性是由条件和随机事件的关系决定的.

为了研究和刻画随机事件的这种统计规律性, 我们引入概率的概念, 一个随机事件  $A$  有确定的概率的意思是说: 对于事件  $A$  有一个确定的正实数  $p$  存在, 不论做多少回  $n$  次试验, 所得到的频率  $\frac{m}{n}$  总是经常接近于  $p$ , 并且试验次数  $n$  越大, 这种接

近就越經常。随机事件  $A$  的概率通常記作  $P(A)$ ，它的存在性正如我們在上面所指出的那樣，在很广泛的一类現象中通过实践得到良好的証实。

### § 3. 概率的性質

上面我們已經介紹了什么叫概率，但仅仅知道这些，对于我們認識随机事件的規律还是远远不够的。我們知道各个事件是有联系的。毛主席教导我們要从事物的联系中去研究事物。那么，事件間的概率又有什么关系呢？这就是本节要解决的問題。

#### 一、必然事件的概率是 1，不可能事件的概率为 0。

上面已經講过，在一个大气压下，溫度  $100^{\circ}\text{C}$  的水沸騰，这个事件是必然事件。如果我們进行試驗，“水沸騰”这个事件一定发生。我們做了  $n$  次試驗，显然事件就发生了  $n$  次。这就是說不論做几回  $n$  次試驗頻率总是  $\frac{n}{n}=1$ 。因此，它的概率也等于 1。必然事件記作  $U$ 。这样上面的事实可表示成  $P(U)=1$ 。

我們知道一个大气压下， $100^{\circ}\text{C}$  的水一定不会結冰。所以，在这条件下“水結冰”这个事件对于  $n$  次試驗都将不发生。从而，每做  $n$  次試驗，它的頻率总是 0。概率也就是 0。这里“水結冰”是一个大气压下溫度达到  $100^{\circ}\text{C}$  情形下的不可能事件。不可能事件記作  $V$ 。这样上面的事实可表示成  $P(V)=0$ 。

#### 二、任意事件的概率在 $[0, 1]$ 之間。

因为每做  $n$  次試驗，事件出現的次数  $m$  总不会大于  $n$ ，所以  $\frac{m}{n} \leq 1$ 。同时，次数总是大于或等于 0，即  $\frac{m}{n} \geq 0$ 。所以  $0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$ 。由上看出，頻率經常接近的数應該是在  $[0, 1]$  之間。所以，任意事件  $A$  的概率  $P(A)$  滿足下面的不等式

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

### 三、对立事件的概率

从一堆产品中抽出一件产品，不是废品就是合格品，若是废品就一定不是合格品：即每次试验时，“抽到合格品”与“抽到废品”两个事件一定要发生一件，但又不能同时发生。一般说来，如果两个事件  $A$  与  $\bar{A}$ ，当每次试验时， $A$  与  $\bar{A}$  发生一件且只能发生一件，这时称事件  $A$  与事件  $\bar{A}$  为对立事件。上例中的事件“抽到合格品”与“抽到废品”就是对立事件。

由此可见，进行  $n$  次试验时，事件  $A$  出现  $m$  次，则其对立事件  $\bar{A}$  一定出现并且只能出现  $n-m$  次。事件  $A$  的频率为  $\frac{m}{n}$ ，则对立事件  $\bar{A}$  的频率为  $\frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$ 。因为，事件  $A$  的频率  $\frac{m}{n}$  经常接近于  $P(A)$ ，所以其对立事件  $\bar{A}$  的频率  $1 - \frac{m}{n}$  就经常接近于  $1 - P(A)$ ，即  $\bar{A}$  的概率为  $1 - P(A)$ ， $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ 。

### 四、事件和的概率

我们研究下面的事件：在某一段时间内某邮局

“接待的顾客在 100 人次到 200 人次之间”记作  $A$ ，

“接待的顾客在 200 人次到 300 人次之间”记作  $B$ ，

“接待的顾客在 100 人次到 300 人次之间”记作  $C$ ，

这三个事件有着密切的关系。

若接待的顾客在 100 到 300 人次之间，那么或者接待的顾客在 100 到 200 人次之间或者接待的顾客在 200 人次到 300 人次之间。换句话说，如果事件  $C$  发生则  $A, B$  必有一件发生。同时，若  $A, B$  之一发生，则  $C$  也一定发生。这时我们说事件  $C$  是事件  $A, B$  的和。记作  $C = A + B$ 。

有时我们也碰到更多个事件的和，例如下面的事件：

$A_1$  “在某时间内仓库收进 70—80 件货物”，

$A_2$  “在某时间内仓库收进 80—85 件货物”，

$A_3$  “在某时间内仓库收进 85—100 件货物”，

$A$  “在某时间内仓库收进 70—100 件货物”。

和上面的情况类似，如果  $A$  发生，则  $A_1, A_2, A_3$ ，至少有一件发生。同时， $A_1, A_2, A_3$  之一发生，则  $A$  必发生，这时我们说， $A$  是事件  $A_1, A_2, A_3$  的和。记作  $A = A_1 + A_2 + A_3$ 。

一般说来，如果事件  $A$  发生时，在事件  $A_1, \dots, A_n$  中至少有一件发生。同时，事件  $A_1, \dots, A_n$  中之一发生，则  $A$  必发生。这时我们说事件  $A$  是事件  $A_1, \dots, A_n$  的和，记作  $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ 。

下面我们再来说明互不相容的关系：一个工厂生产的产品分成三等。每生产一个产品，如果是一等品，就不能是二等品和三等品。把“出现一等品”记作  $A$ ，“出现二等品”记作  $B$ 。如果  $A$  发生，则  $B$  一定不发生。而  $B$  发生  $A$  也一定不发生。这时我们说事件  $A$  与事件  $B$  互不相容。这种关系与对立事件不一样。这里对每次试验  $A, B$  可能全不发生，因为每生产一个产品可能不是一等品、也不是二等品、而是三等品。

我们把“出现一等品或二等品”看成是一个事件  $C$ 。如果  $C$  发生，则  $A, B$  至少有一个发生。同时若  $A, B$  之一发生，则  $C$  必发生。所以，就有  $C = A + B$ 。又知  $A, B$  互不相容，也就是说  $A$  发生  $B$  就不发生。  $B$  发生  $A$  就不发生。设进行  $n$  次试验， $A$  发生次数为  $m_1$ ， $B$  发生的次数为  $m_2$ 。所以， $C$  发生次数为  $m_1 + m_2$ 。因此  $C$  出现的频率为  $\frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}$ 。即

$C$  出現的頻率 =  $A$  出現的頻率 +  $B$  出現的頻率。若  $A, B$  互不相容, 則其和  $C = A + B$  的概率有以下公式:

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B).$$

由上面, 我們還可以推出這樣的結果, 若事件  $A_1, \dots, A_n$  兩兩互不相容, 並且  $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ . 則有

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

這裡所謂事件  $A_1, \dots, A_n$  兩兩互不相容, 是指其中任意兩個事件都是互不相容的。

### 五、事件差的概率

某工廠生產一批機器零件, 尺寸規格在 9.9 厘米到 10 厘米之間。我們把事件“尺寸小於 10 厘米”記作  $A$ ; 事件“尺寸小於 9.9 厘米”記作  $B$ 。生產的零件尺寸小於 10 厘米, 不小於 9.9 厘米, 則為合格品。也就是說, 若  $A$  發生,  $B$  不發生, 則“生產出合格品”這個事件發生。我們把  $A$  發生,  $B$  不發生這個事件叫做  $A$  和  $B$  的差。記作  $A - B$ 。

現在要看  $A - B$  的概率等於多少:

首先我們看出, 如果一個零件尺寸小於 9.9 厘米, 那麼它的尺寸就一定小於 10 厘米, 這就是說, 事件  $B$  發生時, 事件  $A$  一定發生。一般來說: 如果有兩個事件  $A$  和  $B$ , 當  $B$  發生時,  $A$  一定發生, 則稱事件  $B$  蘊含事件  $A$ , 記作  $B \subset A$ 。

設作  $n$  次試驗後,  $B$  出現的次數為  $m_1$ ,  $A$  出現的次數為  $m_2$ 。因為有  $B \subset A$ , 所以在  $B$  出現  $m_1$  次中,  $A$  也同時出現。但是  $A - B$  出現的次數應該是  $B$  不出現而  $A$  出現的次數, 因此,  $A - B$  出現次數應該是  $m_2 - m_1$ 。所以其頻率為  $\frac{m_2 - m_1}{n} = \frac{m_2}{n} - \frac{m_1}{n}$ 。概率為

$$P(A-B) = P(A) - P(B) \quad (B \subset A)$$

大家知道  $P(A-B) \geq 0$ , 所以  $P(A) - P(B) \geq 0$ . 即有  $P(A) \geq P(B)$ . 就是說, 若  $B \subset A$ , 則  $P(A) \geq P(B)$ .

## 六、相互独立事件积的概率

我們先来介紹什么是相互独立的事件: 有两个射手同时向一个靶进行一次射击, 已經知道甲射手射中 10 环(这个事件用  $A$  表示)的概率是 90% [即  $P(A) = 90\%$ ], 乙射手射中 10 环(这个事件用  $B$  表示)的概率是 80% [即  $P(B) = 80\%$ ]. 問甲乙两个射手都射中 10 环的概率是多少? 首先我們看到在这个問題中不論甲射手是否射中 10 环, 乙射手射中 10 环的概率总是 80%, 即事件  $A$  是否发生并不影响事件  $B$  的概率; 反过来也是这样. 两个事件  $A$  和  $B$ , 如果事件  $A$  是否发生并不影响事件  $B$  的概率, 事件  $B$  是否发生也不影响事件  $A$  的概率, 我們就称  $A, B$  是相互独立事件.

甲, 乙两个射手都射中 10 环也就是事件  $A, B$  同时发生. 我們把  $A$  和  $B$  同时发生这个事件叫做  $A$  和  $B$  的积, 記作  $AB$ .

怎样計算相互独立事件  $A, B$  的积  $AB$  的概率呢?

設  $A, B$  是相互独立事件, 它們的概率分別是  $P(A), P(B)$ . 作  $n$  次試驗, 在这  $n$  次試驗中,  $A, B$  发生的次数分別是  $\mu_A, \mu_B$ , 其中  $A, B$  同时发生的次数是  $\mu_{AB}$ . 由于事件  $A$  发生对事件  $B$  的概率沒有影响, 因此在  $A$  发生的  $\mu_A$  次試驗中  $B$  发生的次数  $\mu_{AB}$  (即这  $n$  次試驗中  $A, B$  同时发生的次数) 所占的比例不应当比  $n$  次試驗中事件  $B$  发生的次数  $\mu_B$  所占的比例大的很多或小的很多, 即  $\frac{\mu_{AB}}{\mu_A} \sim \frac{\mu_B}{n}$ . 为了求出  $P(AB)$ , 我們只要知道  $\frac{\mu_{AB}}{n}$

經常和那个实数接近就可以了。  $\frac{\mu_{AB}}{n} = \frac{\mu_{AB}}{\mu_A} \cdot \frac{\mu_A}{n} \sim \frac{\mu_B}{n} \cdot \frac{\mu_A}{n}$ ，由于  $\frac{\mu_A}{n}$  經常接近  $P(A)$ ， $\frac{\mu_B}{n}$  經常接近  $P(B)$ ，所以  $\frac{\mu_{AB}}{n}$  經常接近的数  $P(AB)$  就是  $P(A)P(B)$ ，即  $P(AB) = P(A)P(B)$ 。

应用上述結果得：甲、乙两个射手都射中 10 环的概率是  $P(AB) = P(A)P(B) = 90\% \times 80\% = 72\%$ 。

#### § 4. 概率的求法

根据概率的定义，通过試驗，可以求出頻率，作为所求概率的近似值。但是在許多情况下，也可以根据所研究事件的特性直接求出这事件出現的概率。这种特性就是“等可能性”。例如：有 6 件产品，任意从其中抽取一件，那么抽取的結果共有六种可能（以  $A_1, \dots, A_6$  分别表示这六个事件）。

$A_1$ : “抽出的是第一件”，

$A_2$ : “抽出的是第二件”，

.....

$A_6$ : “抽出的是第六件”。

由实践知道，上面 6 件产品被抽到的可能性都是彼此相同的。这就是說，上面六个事件具有等可能性。因此，每一事件发生的概率是彼此相同的，都等于  $\frac{1}{6}$ 。

如果在上面的六件产品中有五件是合格品（設第一，二，...，五件是合格品），我們要求出“抽到合格品”这一事件  $A$  的概率。

因为抽到合格品相当于抽到第一件，或第二件，.....，或第五件。也就是說， $A$  发生相当于  $A_1$  发生或  $A_2$  发生，.....，或  $A_5$  发生。反之，当  $A_1, A_2, \dots, A_5$  中之一发生时， $A$  也必然发生。所



以  $A = A_1 + \dots + A_5$ ，又因每次試驗(即抽取一次)在  $A$  發生的情況下事件  $A_1, A_2, \dots, A_5$  中只能有一事件發生，所以， $A_1, \dots, A_5$  是兩兩互不相容的事件。根據加法公式： $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_5) = \frac{5}{6}$ 。這裡一切可能發生的結果有六種(這些結果有等可能性)，使事件  $A$  發生的結果有五種。那麼  $A$  發生的概率就等於：

$$\frac{\text{使 } A \text{ 發生的結果的數目}}{\text{一切可能發生的結果數目}} = \frac{5}{6}$$

一般說來，如果總共有  $n$  種具有等可能性的結果，並且在每一次試驗中必有一件發生，且只有一件發生，若有一事件  $A$  恰好包括上面的  $m$  個結果，則事件  $A$  發生的概率  $P(A) = \frac{m}{n}$ 。

**例 1** 設有  $N$  件產品，其中有  $M$  件廢品。問從這  $N$  件產品中任取出  $n$  件產品其中至少含有一個廢品的概率。

**解：**以  $A$  表示事件“ $n$  個產品中至少有一個廢品”，那麼它的對立事件  $\bar{A}$  就是“ $n$  個產品全部為合格品”。由  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ ，只須求出  $P(\bar{A})$  就行了。

由於在  $N$  個產品中無論取哪  $n$  個產品的地位是平等的(等可能的)，因此，一切可能結果是從  $N$  個產品中任選  $n$  個產品的組合，共有  $C_N^n$  種。使  $\bar{A}$  發生的結果是從  $N - M$  個合格品中任取  $n$  個的組合，共有  $C_{N-M}^n$  種。這樣就得出

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{N-M}^n}{C_N^n}, \quad P(A) = 1 - \frac{C_{N-M}^n}{C_N^n}$$

上面我們談的等可能性的結果是有限的，對於具無限等可能性的結果的情況，我們仍可以用與上面類似的方法求出事件