时代教育

全国硕士研究生入学考试综合辅导教程

数学

王式安 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

全国硕士研究生入学考试综合辅导教程

数　　学

主　编　　王式安

副主编　　胡金德　丁丽娟　蔡燧林

机 械 工 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

全国硕士研究生入学考试综合辅导教程．数学/王式安主编．—北京：机械工业出版社，2003.8

ISBN 7-111-13000-6

Ⅰ．全…　Ⅱ．王…　Ⅲ．高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 077890 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
责任编辑：郑文斌　　　封面设计：鞠　杨
责任印制：路　琳
北京蓝海印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2003 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
787mm×1092mm　1/16·35 印张·832 千字
定价：48.00 元

丛 书 序

“筚路蓝缕，以启山林。”回首考研路，可用四个字来概括：天道酬勤！那段日子教会了我怎样去面对困难和思考人生，培养了我不屈的性格，让我懂得成功需要不懈的努力。

——北京大学法律硕士　吴计政

摘自《考研战略战术》（2003 版）

今日的中国，大学本科生屈指可数的时代已一去不复返。据统计，1994 年全国仅有 11.2 万人报考研究生，在接下来的几年里，报考人数扶摇直上，到 2002 年，这个数字达到近 80 万人。据有关部门预测，今后几年，考研热将继续升温，竞争将更加激烈。

之所以摘抄上面吴计政同学的这段话，是因为这段话充分表明了我们编写这套辅导教程的最初目的——提供一个行之有效的学习方法和思路，利用考研辅导界名师的经验给大家提供一个复习的方案和时间上的安排，尽量让广大的考研者不走弯路。

正如吴计政同学所说，考研可能是广大学子在高考之后的又一次考验了。从 7 月到来年的初春，紧张的学习将占据全部的生活，那么如何有效地把握有限的时间，进行充分的复习备考呢？这是我们组织各位名师编写这套教程的原因。总体来说，这套教程具有以下几个特点：

1．编者都是考研辅导的一线知名老师。数学是由王式安老师牵头，更有胡金德老师、丁丽娟老师和蔡燧林老师的鼎立帮助。英语是由中国人民大学的考研辅导名师刘启升老师执笔。政治是由西安交通大学的陆卫明和韩鹏杰老师牵头。

2．编写本套教程的老师不单是了解考研试题，他们更了解考研的学生。可以说，本套教程的任何一本都是一个独立的系统，都能提供给读者每一个科目的完备的复习方案。这时，辅导书应该不仅仅是习题集，更应该是一个复习计划书，或是一本方法指导书。如果读者在使用本套教程的过程中能够意识到这一点，并且有效地应用这一点，将会使读者发现考研其实并不难，要说难，也只是没有掌握有效的方法，考研才变得如此难。

最后，祝正在备战考研的同学们，心想事成！

本套书是由王赢先生执行策划的，同时也得到了很多考研界知名老师的帮助和肯定，在此，向他们一并表示衷心的感谢。

时代教育

考研图书专题策划组

前　言

本书是为准备参加全国硕士研究生统一考试的考生所编写的，它适用于数学一、数学二的考生，也可供数学三、数学四的考生参考。

本书的编者结合多年来参加全国统一考试命题工作和教学实践的经验，严格按照教育部制订的 2004 年数学考试大纲要求共同努力编写本复习备考书，本书每章分 4 部分，现分述如下：

一、考研要求：这是考试大纲对本章内容的要求，帮助考生在复习本章内容时明确考试大纲对各层次内容要求的程度。

二、基本内容：简述本章重要概念、理论、性质、定理、公式和方法，帮助考生总结归纳所学知识。

三、典型例题分析：精选了一部分例题，其中包括一部分往届的考研真题，一部分历年的备选考题，各种题型反映了大纲所要求的深度与广度。对每个例题除详细解答外还给出了思路分析和评注，指出解决这类题型的关键或思路实质，以促进考生从根本上掌握解题的基本方法。

四、习题与答案：习题基本上按考研真题要求编写，分填空、选择和计算证明，它们中有些就是往届考研真题，有些是历年备选考题，习题都有答案，有些还给出解法或提示。不过建议读者不要一开始就看解答，而且一定要坚持自己先做，做不出或做完后再核查对照，核对后一定还要总结一下，才能真正融会贯通。

本书是为考研应试者所写，也可供相应同类院校师生作教学参考书。

由于时间仓促，书中难免有所疏漏，诚请专家和读者指正。

编　者

2003 年 8 月 18 日

目　　录

第二部分 线 性 代 数

第三部分 概率论与数理统计

第一部分　微　积　分

第一章　函数、极限、连续

本章考试要求　理解与掌握(或并会用)：函数的概念及其表示，建立简单应用问题中的函数关系，复合函数与分段函数，基本初等函数的性质及图形，极限与左、右极限的概念以及它们之间的关系，极限的性质及运算法则，极限存在的两个准则并会用它们求极限，用两个重要极限求极限，无穷小与无穷大的概念，无穷小的比较的概念并会用等价无穷小求极限，函数的连续性(包括左、右连续)的概念、间断点的分类.

会求与了解　函数的有界性、单调性、周期性和有界性.连续函数的性质与初等函数的连续性，闭区间上的连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)以及这些性质的应用.

§1　函　　数

一、函数的概念

1. 邻域：设 $\delta>0$，实数集 $U_\delta(x_0)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$ 称为 x_0 的 δ 的邻域，如果不必说及邻域半径 δ 的大小，则简记为 $U(x_0)$，称为 x_0 的某邻域，$\mathring{U}_\delta(x_0)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 称为 x_0 的去心 δ 邻域，类似地有记号 $\mathring{U}(x_0)$ 及相应的名称.

此外还有 x_0 的左(右)半 δ 邻域与 x_0 的左(右)半去心 δ 邻域等概念.

引入∞的(去心)邻域一词在今后的叙述上会带来一些方便.这是指：$U=\{x\mid |x|>X\}$，其中 X 为充分大的正数.

2. 函数的定义：设有两个变量 x 与 y，X 是一个非空的实数集.若存在一个对应规则 f，使得对于每一个 $x\in X$，按照这个规则，y 有惟一确定的实数值与之对应，则称 f 是定义在 X 上的一个函数，x 称为自变量，X 称为函数 f 的定义域，y 称因变量.函数 f 在 $x\in X$ 对应的 y 的值，称为函数值.记为

$$y=f(x),\quad x\in X$$

函数值所成的集合，常记为 Y，$Y=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$，称为函数的值域，以后“实数”的实字常省去.

习惯上，也称 y 或 $f(x)$ 为 x 的函数.

二、函数的表示

1. 用一个解析式子表示：例如 $y=\sin x,-\infty<x<+\infty$；$y=\lg x,x>0$，等等.这是常用的一种表示方式.如不作另外说明，用一个解析式子表示的函数的定义域是指该式的自然定义域.

2. 分段函数：在定义域的不同部分用不同的解析式子表示的函数称为分段函数.

例如从邮局寄一封平信，其重量 x(克)与所付邮资 y(元)之间的函数关系可由如下分段函数表达：

$$y=\begin{cases}0.8, & 0<x\leqslant 20\\ 1.6, & 20<x\leqslant 40\\ 2.4, & 40<x\leqslant 60\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

注　分段函数是一个函数，不能认为每一段是一个函数、是多个函数.

常见的几种分段函数：

【例 1】　绝对值函数(其图像如图 1-1)

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

【例 2】　符号函数(其图像如图 1-2)

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

它表示 x 的符号.显然有

$$|x|=x\operatorname{sgn}x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

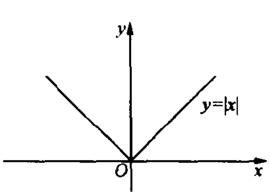

图　1-1

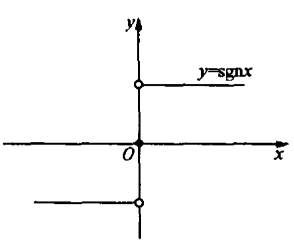

图　1-2

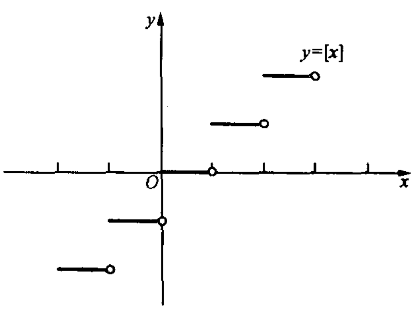

图　1-3

【例 3】　取整函数$[x]$，它表示不超过 x 的最大整数.例如，$[3.2]=3,[4]=4,[-\pi]=-4$.一般，$[x]=n$，当 $n\leqslant x<n+1$，$n=\cdots,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$.

$y=[x]$的图像如图 1-3，显然有性质：

对于 $x\in(-\infty,+\infty)$，有$[x]\leqslant x<[x]+1$，且$[x+1]=[x]+1$.

【例 4】 狄利克莱函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数时}\\ 0, & x\text{ 为无理数时}\end{cases}$$

狄利克莱函数无法描出它的图像.

3. 隐函数：设 x 在某数集 X 内每取一个值时，由方程 $F(x,y)=0$ 可惟一确定一个 y 的值，则称由 $F(x,y)=0$ 确定一个隐函数 y，虽然不一定能将 y 明显地解出来.

4. 由参数式表示的函数(此段数学三、四不要求)：设 $x=x(t)$，$y=y(t)$. 若 x 在某数集 X 内每取一个值时，由 $x=x(t)$ 可惟一确定一个 t 的值，并且对于此 t，由 $y=y(t)$ 可确定惟一的一个 y 的值，则称由参数式 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 确定了 y 为 x 的函数.

【例 5】 半径为 a 的圆周上一个定点 P. 开始时圆在点 P 与 x 轴在原点相切，让圆沿 x 轴自左向右滚动，求点 P 的运动轨线的方程 (如图 1-4).

解 如图 1-4，并设运动过程中的中心角为 t，P 的坐标为 (x,y)，于是得到轨线的参数方程：

$$\begin{cases}x=\overline{OD}-\overline{PA}=\overset{\frown}{PD}-a\sin t=a(t-\sin t)\xlongequal{\text{记为}}x(t)\\ y=\overline{DA}=\overline{DC}-\overline{AC}=a-a\cos t=a(1-\cos t)\xlongequal{\text{记为}}y(t)\end{cases}$$

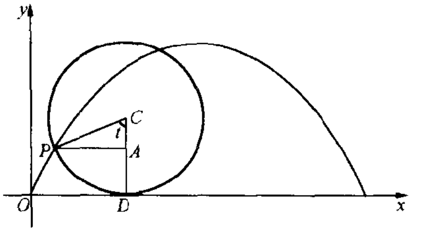

图 1-4

此轨线称为摆线. 设想从第一式中解出 $t=\varphi(x)$，代入第二式中，便得摆线的直角坐标方程，即得 y 依赖于 x 的函数关系. 但是事实上，用简洁的表达式 $t=\varphi(x)$ 是不可能的，亦即直接得到 y 与 x 的关系是不可能的，这样就更显得用参数式表示的重要性了.

除了上面这些表示方式之外，还有用图形表示、用表格表示，将来还会见到用极限表示、用变上限的积分表示、用级数表示函数等等.

三、函数的几种特性

1. 单调性：设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，如果对于任意的 $x_1\in X$，$x_2\in X$，$x_1<x_2$，就一定有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2),\quad (f(x_1)\geqslant f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是单调增加(减少)的. 如果一定有

$$f(x_1)<f(x_2),\quad (f(x_1)>f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是严格单调增加(减少)的.

2. 奇、偶性：设函数 $f(x)$ 在对称于原点的某数集 X 上有定义，并且对于任意 $x\in X$，必有 $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$，则称 $f(x)$ 在 X 上是偶(奇)函数.

在直角坐标 xOy 中，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于坐标原点 O 对称.

任一定义在对称于原点的数集 X 上的函数 $f(x)$，必可分解成一奇一偶函数之和：

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

3. 周期性：设 $f(x)$ 的定义域是数集 X，如果存在常数 $T>0$，当 $x\in X$ 时，必有 $x\pm T\in X$，

并且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为它的一个周期. 通常称的周期是指使 $f(x+T)=f(x)$ 成立的最小正数 T（如果存在的话）.

4. 有界性：设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，如果存在常数 M，当 $x\in X$ 时 $f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有上界；如果存在 m，当 $x\in X$ 时 $f(x)\geqslant m$，则称 $f(x)$ 在 X 上有下界；如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

定义中的 m 与 M 分别为 $f(x)$ 在 X 的下界与上界. 显然，如果 $m(M)$ 是 $f(x)$ 在 X 的下（上）界，则比 m 小（比 M 大）的任何数，都是 $f(x)$ 在 X 的下（上）界.

如果不论 M 多么大，总有 $x\in X$ 使 $f(x)>M$，则称 $f(x)$ 在 X 上无上界；类似地可以定义无下界.

例如，函数 $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界；$a^x(a>1)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有下界，无上界；$\log_a x(a>1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无下界，也无上界. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无上界，有下界. 对于 $\delta>0$，$f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上既有上界又有下界. 可见一个函数有界与否，与 x 的取值范围 X 有关.

四、反函数与复合函数

1. 反函数：设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 X，值域是 Y. 如果对于 Y 内的每一个 y，由 $y=f(x)$ 可以确定惟一的 $x\in X$. 这样在 Y 上定义了一个函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$ 或 $x=\varphi(y)$，$y\in Y$.

由反函数的定义，有

$$y\equiv f(f^{-1}(y)),\quad y\in Y;\quad x\equiv f^{-1}(f(x)),\quad x\in X$$

有时，也常将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$.

在同一坐标系中，$y=f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是一致的. 而 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

【例 6】 求函数

$$y=f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{1-x}, & x>1\end{cases}\text{的反函数}$$

解 当 $x\leqslant 1$ 时，由 $y=(x-1)^2$ 得 $0\leqslant y<+\infty$，并解得 $x=f^{-1}(y)=1-\sqrt{y}$. 当 $x>1$ 时，由 $y=\frac{1}{1-x}$，得 $-\infty<y<0$，并解得 $x=f^{-1}(y)=1-\frac{1}{y}$. 所以反函数

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}1-\sqrt{y}, & 0\leqslant y<+\infty\\ 1-\dfrac{1}{y}, & -\infty<y<0\end{cases}$$

或写成

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{x}, & 0\leqslant x<+\infty\\ 1-\dfrac{1}{x}, & -\infty<x<0\end{cases}$$

2. 复合函数：设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域是 D_φ，值域是 R_φ. 若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$（$\varnothing$ 表示空集），则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 为 x 的复合函数，它的定义域是 $\{x\mid x\in D_\varphi$ 且 $\varphi(x)\in D_f\}$. u 称为中间变量，x 称为自变量.

【例 7】 设 $f(x)$ 严格单调增加，$\varphi(x)$ 严格单调减少，并且可以构成下面所见的复合函数，则（　　）.

(A) $f(\varphi(x))$ 必严格单调增　　(B) $\varphi(f(x))$ 必严格单调减

(C) $f(x)\varphi(x)$ 必严格单调增　　(D) $f(x)\varphi(x)$ 必严格单调减

解　设 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $\varphi(f(x_1))>\varphi(f(x_2))$. 应选(B). 其他均可举出反例.

五、初等函数

1. 常值函数：C（C 为常数），$x\in R$.

2. 幂函数：x^α（α 为常数），其定义域由 α 确定，但不论 α 如何，在 $(0,+\infty)$ 内总有定义.

3. 指数函数：a^x（常数 $a>0,a\neq1$），$x\in R$.

4. 对数函数：$\log_a x$（常数 $a>0,a\neq1$），$x\in(0,+\infty)$.

5. 三角函数：$\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$\cos x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$\tan x$，$x\in\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$k\in Z$. $\cot x$，$x\in(k\pi,(k+1)\pi)$，$k\in Z$.

6. 反三角函数：$\arcsin x$，$x\in[-1,1]$；$\arccos x$，$x\in[-1,1]$；$\arctan x$，$x\in R$；$\operatorname{arccot} x$，$x\in R$.

以上六类函数称基本初等函数，由它们经有限次加、减、乘、除及复合而成并用一个式子表示的函数称初等函数.

六、典型例题分析

1. 求复合函数定义域

【例 1】 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，常数 $a>0$. 求 $f(x)+f(x+a)$ 的定义域.

解　$f(x+a)$ 的定义域是 $0\leqslant x+a\leqslant1$，即 $-a\leqslant x\leqslant1-a$. 而 $f(x)$ 的定义域是 $0\leqslant x\leqslant1$. 若 $0<a\leqslant1$，则 $f(x)+f(x+a)$ 的定义域是 $0\leqslant x\leqslant1-a$. 若 $a>1$，则 $f(x)+f(x+a)$ 无定义.

【例 2】 设 $f(x)=\ln\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(x)=\arcsin x$，求 $f(\varphi(x))$ 与 $\varphi(f(x))$ 的定义域.

解　由 $f(\varphi(x))=\ln\left(\varphi(x)+\frac{\pi}{4}\right)$ 知 $\varphi(x)>-\frac{\pi}{4}$，从而 $\arcsin x>-\frac{\pi}{4}$. 又 $\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{\pi}{4}<\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$. 于是推知 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant1$. 即 $f(\varphi(x))$ 的定义域为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant1$.

由 $\varphi(f(x))=\arcsin f(x)$ 知 $-1\leqslant f(x)\leqslant1$. 从而 $-1\leqslant\ln\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant1$. 所以

$\mathrm{e}^{-1}-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\mathrm{e}-\frac{\pi}{4}$. 即 $\varphi(f(x))$ 的定义域为 $\mathrm{e}^{-1}-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\mathrm{e}-\frac{\pi}{4}$.

注　求复合函数的定义域方法如下：先求最外层的定义域，以此作为第二层函数的值域