數學導論

曹亮吉編著

數學導論

作　者：曹　亮　吉
發行者：科學月刊社
臺北市重慶南路二段75號10樓
電話：351-2872，321-4821
郵撥帳戶：0018482-3
印刷者：精權企業有限公司
臺北縣中和市23521永和路363巷51號
電話：2239239
定　價：新臺幣250元
七十七年一月初版

目　　錄

第一章　數學簡史

要了解數學是什麼，一定要對數學歷史有概略的了解，而要了解數學歷史，又要有相當的數學知識。所以我們採取漸進的方式，在第一章中談數學的簡史，强調數學發展泉源的應用面與理論面，以及兩者間互動的關係。明白了這樣的特性，這本書往後內容的安排就順理成章；讀者涵泳於數學歷史與數學知識的互相激盪之中，當能對數學是什麼有初步的認識。

§1　中國數學簡史

一般而言，早期經濟、政治、軍事、建設、曆算等活動，都會促發算術，初等代數及初等幾何的發展；但這種發展過程非常緩慢，知識要逐漸累積，隨後經人編纂注釋，才廣爲流行。中國最古老的兩本算書，「周髀算經」及「九章算術」，其產生的過程就是這樣的。

古時候的天文學家常在地上立一根標竿，測得日影長短，以爲曆算之依據。此種標竿稱爲表，也叫做髀，而「周髀算經」正因記載着周人用表測日影而得名。「周髀算經」的主要內容爲天文及相關的測量與計算，其成書年代約在兩漢之間，著名的注釋者包括魏晉時的趙爽，北朝的甄鸞及唐朝的李淳風等人。

更可窺見古代中國數學內容的是「九章算術」，它也是大約在兩漢之間成書的，三國時的劉徽，唐朝的李淳風都做過校注的工作。「九章算術」共收有246個問題，分爲九章。該書每在舉出幾個同類問題之後，即將其共同的解法加以歸納並敘述出來；這種歸納式及敘述性的數學表現成爲中國算書的傳統。現在將九章的內容分述如下

（註一）。

第一章「方田」：主要是講田畝面積的計算。「方」有單位面積的意思，而「方田」則是計算一塊田含有多少個單位面積的方法。

第二章「粟米」：講的是各種比例問題，特別是關於各種糧穀間的比例交換問題。

第三章「衰分」：「衰」是按比例，「分」是分配，所講的是一些按比例分配的問題。

第四章「少廣」：「少」是多少，「廣」是寬廣，「少廣」是由已知面積和體積，反求一邊的寬廣多少的問題，其中講解了開平方、開立方的方法。

第五章「商功」：「商」是商量，「功」是工程。這是有關各種工程的計算，主要是各種體積的計算。

第六章「均輸」：是計算如何按人口多少、路途遠近等條件，合理安排各地區運輸賦粟和分派徭役等的問題。

第七章「盈不足」：是用假設的方法來解決某些難解的問題。例如「今有共買物，人出八盈三，人出七不足四，問人數、物價各幾何？」就是「盈不足」一類的問題。

第八章「方程」：講的是關於聯立一次方程式解法的問題。其中還講解了正負數的概念及正負數加減的法則。

第九章「勾股」：敍述了「勾股定理」及相似三角形解法的問題。這一章也提出了一般二次方程的解法問題。

全書除第一、九章及「商功」中的體積計算爲幾何外，其他全部皆爲算術及初等代數。除「勾股」外，這些內容並沒太特別，其他民族也都可能發展出來的。雖然如此，這些數學也只有少數人才會，而算法不出「九章算術」的「五曹算經」正是爲一些低階官員編寫的，

這樣他們在辦理與計算有關的業務時，才不致於張惶失措。所謂五曹指的是五類官員：田曹，掌田畝面積的計算；兵曹，軍隊配置及給養運輸；集曹，交換貿易；倉曹，糧食稅收及糧倉容積；金曹，絲織物買賣及錢財貨幣。

使數學更跨出一步的刺激是來自天文。因為天文需要更深的數學知識，而又與曆法、卜算有密切的關聯，很受官方的重視，因此天文學家常常是數學家，而且也容易留名青史。中國數學發展就是典型的例子：替「九章算術」作注的劉徽；創大明曆、求圓周率及球體體積的南北朝人祖冲之（429～500年）；首先引用二階內插法於天文的隋朝人劉焯(544～610年)；撰「緝古算經」，介紹帶從開立方法數值解一般三次方程式的唐初人物王孝通(官至曆算博士、太史丞)；著「夢溪筆談」、創隙積術、研究高階等差級數的北宋人沈括(1032～1095年，司天監）；編授時曆，採用三階內插法及球面三角學的元人郭守敬(1231～1316年，官至太史令)；與利馬竇共譯「幾何原本」並督修「崇禎曆書」的明人徐光啓(1562～1633年，曾任太史)等人都是不折不扣的天文學家。此外，創增乘開方法數值解一般高次方程式的北宋人賈憲(十一世紀中葉)，為司天監丞楚衍的弟子；撰「數書九章」，系統性介紹聯立一次同餘方程式的南宋人秦九韶（十三世紀上半葉），「早歲侍親中都，因得訪習於太史，又嘗從隱君子受數學」；而著書無數、介紹已傳入的西方數學，負承先啓後之責的清人梅文鼎（1633～1721年），也終身鑽研曆法。凡此種種都足以說明天文與數學的關係。難怪十八世紀末，清人阮元會將歷代天文學家及數學家 243 人，外加來華西洋人37人，共 280 人的傳記收錄在一起，而編成一部「疇人傳」——疇人指的是世代相承，專門掌管天文曆法的人。

在中國的數學發展史上當然也有幾位和天文比較沒有關係的數學

家。金朝人李治（1192～1279年）就是一個例子。他大半的時間在各地隱居，最後買田於封龍山下，從游日多，爲北方著名的學者。他著有「測圓海鏡」，詳細介紹天元術，在代數中引進未知數。再者，元人朱世傑（十四世紀初）著有「四元玉鑑」，解四元聯立方程式，並對垛積招差（高階等差級數）有系統性的研究，他「周遊四方……，踵門而學者雲集。」以上兩位應該算是職業數學家——以研究數學及教授數學爲生的人。此外，明朝中葉的程大位是個商人，平時對數學有濃厚的興趣，曾編就「算法統宗」一書，重點在介紹珠算。這些人所發展或整理出來的數學就和天文沒有多大的關係。

除了勾股定理、圓周率及球體體積的計算（註二）外，中國的數學主要的是朝代數的方向進展，其重要的成就包括數值解多項式方程式、引入未知數的天元術、一次聯立方程式、同餘方程式及高階等差級數等，使得中國的數學在南宋與元朝時（十三、四世紀）達到一高峰（註三）。中國獨立發展數學的情況到了明末清初有了改變，此時傳教士東來，先後引進了西方的平面幾何學、三角學及對數等。有清一代的數學家一方面整理中國古代算書，一方面吸收及介紹西方的數學，使得中國數學的發展逐漸與世界的潮流合而爲一。（註四）

註一：以下對九章算術內容的描述，主要是錄自李儼的「中國古代數學簡史」。

註二：有關圓周率及球體體積的計算，請見第六章「分析的方法」。

註三：除了高階等差級數在第二章§5中略爲提到外，有關中國在代數學的成就請見第四章§13。

註四：本節的主要參考書爲李儼的「中國古代數學簡史」。

§2 西方數學簡史

在西方數學發展史中，天文也是一大動力。遠的如亞歷山大希臘的 Claudius Ptolemy（西元二世紀），他將亞歷山大希臘的天文學

及三角學整理成13冊巨著「Almagest」，系統性介紹了平面及球面三角學(註一)。近者如 Kepler (1571～1630年)，以數學模式確立行星運行三大定律。又如 Newton（1642～1727年），研究行星運動，發表萬有引力定律，導入微積分的數學方法，開啓了天文學、物理學及數學的新紀元（註二）。其他如印度的 Brahmagupta（598～660年），波斯的 Khayyam（1050～1123年）等天文學家都是掌握當時尖端數學知識的人。

除天文外，其他促進西方數學發展的因素還很多，有時偏重實用，有時偏重理論，有時兩者互相夾纏，很難區分。現在我們且依着歷史的順序，談西方數學的發展。

西方最早發展數學的是巴比倫人與埃及人，他們的數學都因應用而生，而且都很初等，一直要到希臘才有劇烈的轉變。許多古文明認爲自然是紛亂的、神秘的、善變的、恐怖的，而這一切都是那些喜怒無常之諸神的傑作，人是無法了解其中的奧妙。大約在西元前六百年，有一批希臘哲學家開始對自然的看法有了一百八十度的轉變，他們認爲大自然是循然有序依照一定模式來變化的，而且人可以了解變化的原因、預測變化的結果，而這一切都可由研習數學入手。於是無論是天文、光學，無論是音樂的研究，都帶有濃厚的數學味道。數學的發展也就掌握在這些探討自然界眞理的哲學家手中。這些哲學家——愛智者，在各地成立學院，講授各種學問，其中以數學出名的有 Pythagoras（畢氏，約前582～497年）、Eudoxus (約前408～355年)、Euclid (歐氏，約生於前 325 年)、Apllonius（約前 261～190 年）等人，也有貴族出身，不愁衣食，專心做學問，如 Archimedes (約前 287～212年)就是。他們發展出來的數學，如數論、平面幾何（註三）、圓錐曲線（註四）、積分初步（註五）等，在當時可說是比較

偏理論性的。到了亞歷山大希臘（前306～後642年）的中後期，學風丕變，轉趨應用，三角學就在這時期成熟的（註六）。

中世紀時，希臘之學式微，整個知識傳遞限於僧院或其附屬學校，而注重的只限於僧侶的訓練及教義的傳播，對自然界的興趣減至最低。另一方面，拉丁語爲歐洲當時通用的語言，但是羅馬人的數學與科學一向落後，所以整個歐洲的也不行。雖然如此，羅馬的貴族哲學家 Boethius（480～524年）、英國的僧侶 Bede（673～735年）等人，他們的數學程度雖不怎麼樣，但總算使中世紀前期歐洲的數學保持一點點希臘的餘蔭。

在此同時，阿拉伯文化興起，宮廷數學家 Al-Khwarizmi（780～850 年）等人將希臘的許多文獻翻譯成阿拉伯文，又引入印度——阿拉伯數字，發展代數學（註七）。這些成果漸漸激起歐洲學者的興趣，他們或者翻譯阿拉伯文獻，或者直接引介希臘經典，使數學也漸漸走上文藝復興之路。這種復興的起始者可溯至日後成爲教皇 Sylvester 二世的法國僧侶學者 Gerbert（940～1003 年）；他在算板上使用阿拉伯數字。而最重要的可能要數富商之子的 Fibonacci（1170～1250年）；他把阿拉伯人的數學文獻譯成拉丁文，其中最主要的一本書爲「Libre Abaci」，內容包括算術、代數，成爲阿拉伯數學進入歐洲的橋頭堡。

文藝復興時期的藝術家往往受僱於王公貴族，從事繪畫、建築等工作。因此他們要精通各種知識，也往往是當時最好的數學家。爲了解決如何在平面上表現實物遠近與大小的問題，他們開創了透視幾何學（註八），其中最著名的有 Alberti（1404～1472年）、Francesca（1416～1492年）、Da Vinci（1452～1519年）、Dürer（1472～1528年）等人。

中世紀後期至十七、八世紀，占星學大盛，它使醫、卜、算、天文聯在一起。許多王公貴族及大學爲了醫、卜，請了占星家來講解、授課，間接促進了天文與數學的發展。這類人物以撰寫「Ars Magna」，使三次、四次方程解法廣爲流傳的 Cardano（1501～1576年）及天文學家 Kepler 爲代表。文藝復興以後數學活動鼎盛，從事數學者不再具有典型的背景，他們或者是工程師、天文學家、宮廷教師，或者是大學教授，例如於十七世紀將十進位小數引入歐洲的工程師 Stevinus（1548～1620年）、研究對數（註九）的地主 Napier（1550～1617年）、創造解析幾何的著名哲學家 Descartes（1596～1650年）、同爲解析幾何（註十）的創造者又開啓數論研究的律師 Fermat（1601～1665年）、大學教授的 Newton、或身爲外交家却對微積分及邏輯很有貢獻的 Leibniz（1646～1716年）等等，都成爲數學史上的人物。

從 Galilei（1564～1642年）、Newton 以降，物理與數學的結合，使物理的發展更迅速，使數學的視野更廣濶(註十一)。十八、九兩世紀的物理學家，和數學家往往二位一體，並不分家。又因數理發展達於成熟，從此以後數理人才只得集中在大學或研究機關內。數理不分家的局面到二十世紀時漸有改變。雖然物理、數學仍然相依甚深，但有許多數學走上爲數學而數學的愛智路線上。另一方面，數學的觸角廣及於科學的各個領域內，數學成爲每個從事科學研究者必備的知識。於是以研究數學及以教授數學爲生的職業數學家就大量產生了，而數學也成了一門完全獨立的學問。（註十二）

註一：平面與球面三角學將在第二章 §2、§3 中論及。

註二：請參閱本章 §3「行星運轉的模式」。

註三：第三章 §1 將討論 Euclid 的「原本」。

註四：請參閱本章 §4「理論與應用的互動」。

註五：請參閱第六章「分析的方法」。

註六：有關亞歷山大希臘的數學史請參閱70年九月科學月刊中的「一段數學興亡史」一文。

註七：請參閱第四章 §12「代數學的發展簡史」。

註八：請參閱第五章 §13「坐標化前的射影幾何」。

註九：第二章 §4 將專論對數的研究發展史。

註十：有關解析幾何學的發軔與發展，請看第四章 §11、§12。

註十一：第八章將專論數學與物理之間的關係。

註十二：有關數學史的參考書，我們在此介紹三本，依由淺而深的順序，爲 D. J. Struik 的「A concise history of mathematics」，H. Eves 的「An introduction to the history of mathematics」及 M. Kline 的「Mathematical thought from ancient to modern times」。

§3 行星運轉的模式

數學不但是天文學的工具，天文學也提供了數學很多的發展機會，如三角學及對數就是。而 Kepler 行星運動模式，更是應用數學的另一層面。爲了了解數學及其應用之間的關聯，我們來看看行星運動的數學模式的發展史。

一個模式的建立要經過觀察、假說、再觀察、修正（或重立）假說、再觀察、驗證……；行星運動模式也是如此。人類最早的行星運動模式爲圓周運動。從地球看，太陽和月亮大約以等速、圓形的軌道繞着地球轉；但在仔細觀測下，太陽、月亮的運行速度不是那麼均勻，軌道也不是那麼圓，且行星的運行現象更是複雜，從地球觀看（地球中心說），忽前忽後，速度變化亦大，所以需要一套更好的數學模式來解釋。Eudoxus 於西元前四世紀提出同心球理論：對太陽系的每個星球而言，都有三個或四個想像中的同心球（這裏同心球指的都

是球面）與之相應，它們各繞一轉軸作等速運動，但都是以地球（想成一點）爲其共同的中心點。這個星球（想成一點）在最裏層同心球（相對於轉軸）的赤道上，最裏層同心球的轉軸延伸而附着在第二裏層的同心球上，因此第二同心球的轉動影響第一轉軸，也因此影響該星球的運動；同樣地，第二轉軸附着在第三同心球上……。Eudoxus 選擇適當大小的同心球，轉軸與旋轉速度，各用了三個同心球來描述太陽與月亮的運動，又各用四個球來描述金、木、水、火、土這些當時已知行星的運動，最後，他把其他的星球全放在一個極大的同心球上。這二十七個同心球雖屬擬造，但能粗略描述星球運行，足見 Eudoxus 的數學功力。爲更進一步解釋星球運動的動力，Aristotle 又加入二十九個同心球，與先前的二十七個互相牽動，使得最外層同心球一動，所有星球都跟着轉動，這是同心球模式的極致。

在 Eudoxus 提出同心球理論之後，希臘天文學又有周轉圓模式。它是這樣的：如圖 3-1，一個行星 P 在以 S 爲圓心的圓周上等速繞行。而 S 本身同時也以等速在以地球心 E 爲圓心的圓周上繞行。S 所在的圓稱爲 deferent，而 P 所在的圓稱爲周轉圓 (epicycle)。天文學家 Hipparchus（西元前二世紀）選了適當大小的 deferent 和

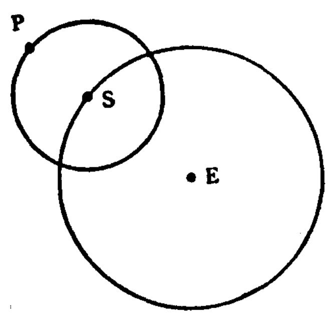

圖 3-1

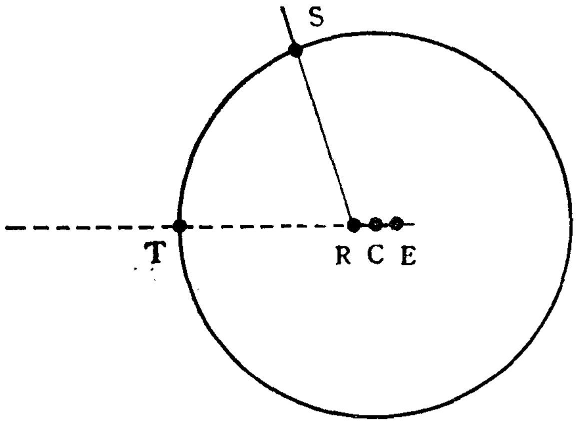

圖 3–2

周轉圓及S、P在這些圓上的速度，使得周轉圓模式較同心球模式更來得準確些。為使準確性再提高，Ptolemy 將周轉圓模式稍作修改（見圖 3–2）：deferent 的圓心C與地球心E稍有偏差，在 EC 延線上取 R 點，使得 EC＝CR，而 S 在 deferent 上並不等速，但∠SRT 的大小卻以等速增加。這種 Ptolemy 周轉圓模式成為西方天文學經典，甚至在 Copernicus 提出太陽中心說之後仍然深具影響力。直到 Kepler 確立行星運動定律，才完全將這種誤入歧途的模式擺脫掉。

1591年，Kepler 從 Tübingen 大學畢業後轉入神學院，準備當牧師。1594年，將從神學院畢業時，經人介紹到奧地利 Graz 地方教數學及天文學，而放棄了神職。前此，他在 Tübingen 大學時受天文學家 Mästlin 的影響，深信當時還沒被廣為接受的 Copernicus 學說：地球自轉且繞太陽公轉；這是他任教前所僅有的天文知識。翌年夏天，在授課當中，他突然「悟出」了正多面體及行星距離間的

關係(註一)，寫出了一篇充滿神秘占星色彩的論文「宇宙的神秘」，送到大天文學家 Brahe (1546～1601年) 手中。 Brahe 雖不贊成 Kepler 的神秘占星觀點，但驚訝於其豐富的天文知識，導致日後 Kepler 到布拉格做 Brahe 的助手，而當1601年 Brahe 去世，接替他的職位並繼承了他的遺產——幾十年的星像記錄——這是望遠鏡發明前最精確的記錄。有此財產，Kepler 展開了「火星降服戰」。

雖然太陽中心說使行星運行理論往正確的方向進了一步，但描述行星運行的準確度却沒有增加，因為對行星運行的軌道及速度還是不清楚。由於深受希臘哲學及天文學的影響，Kepler 自然認定：一個行星運行的軌道必定是圓形，速度必是等速。但他對火星及地球試了各種大小不同的圓，不同的圓心(不一定是太陽)、不同速度，總是與記錄有出入。最後他放棄了等速圓周運動模式，而改試變速圓周運動。

他的想法如圖 3-3 所示：將圓分成若干段小弧，火星在每段小弧

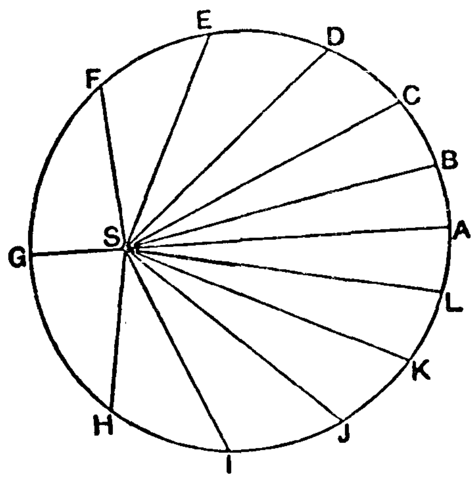

圖 3-3

上的運行時間相同，而速度則與其到太陽距離成反比，所以離太陽越遠則小弧越短。爲了計算方便，Kepler 假定每段小弧與太陽所圍成的扇形面積相等。由此假定所得的更準確數據，一度使他以爲已打勝這場戰爭，雖然最後發現還是與實際記錄有出入。爲了尋找更好的模式，他放棄了圓爲火星運轉軌道，改用種種不同的卵形線，經過日以繼夜的計算，最後發現橢圓軌道最切合記錄。橢圓，這種古希臘時期就知道的純數學產物，居然是行星運行的軌道！那麼上述面積相等的假定究竟對不對？對的，如果把太陽擺在橢圓的一個焦點上。這樣 Kepler 降服了火星，推翻了圓周等速運動及其衍生的複雜模式。1609年出版的「新天文」正式宣布希臘天文學的結束，天文學新紀元的開始。

Kepler 由「火星降服戰」所導出的行星運行模式可歸納成兩個定律：第一、行星運行的軌道爲橢圓形，太陽居其一焦點；第二、行星與太陽的聯線在等長的時間內掃過相同的面積(如圖 3-4)。1619年，他發表了「宇宙的和諧」，宣布了第三定律：行星繞行太陽一周所需的時間 T 和行星到太陽的平均距離 R 之間有如下的關係：T^2：R^3 爲

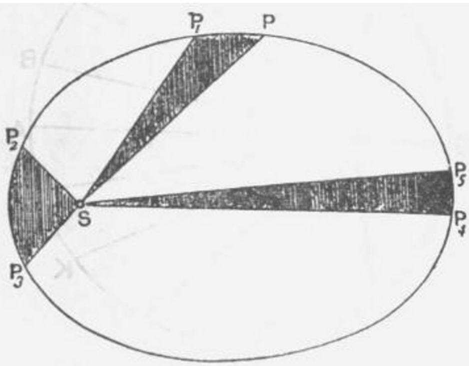

圖 3-4

定數。這三個定律將太陽系用數學結成一體，更加肯定 Copernicus 學說的正確性。

Kepler 模式雖然是天文學的一大躍進，但它並非登峯造極，因為更精密的觀測、更準確的計算都顯示許多行星並非百分之百遵行 Kepler 模式。許多人認為，如果 Kepler 擁有現代化的觀測儀器與電腦，那麼他可能不敢確立其三大運動定律。這一切都要等到 Newton 的萬有引力模式來解決。Newton因研究「使行星遵行 Kepler 模式的力量」和「使蘋果掉地的力量」是否相同，而引發了萬有引力的想法，同時由 Kepler 三定律及 F＝ma 導出了萬有引力公式(註二)。如果只有太陽和一個行星（其他行星都不存在的話），根據萬有引力（經過數學計算），這顆行星就得遵照 Kepler 模式運行。但太陽系裏行星不止一個，行星間引力雖小（因質量比太陽小得多），却足夠使行星運動稍微背離 Kepler 模式——所謂的擾動現象，而這些擾動現象可以根據萬有引力的數學公式算得，這正是萬有引力模式更為高明之處。

1781年三月十三日，英國天文學家 W. Herschel（1738～1822年）由望遠鏡發現太陽系的第七顆行星——天王星。天王星的出現使萬有引力模式面臨考驗，原來天王星的軌道與預期的並不吻合——即使把已知行星的擾動因素都考慮在內。要放棄萬有引力模式嗎？不，萬有引力已經說明了太多的現象。一定還有一顆未被發現的行星！這是許多天文學家的結論。但它在那裏呢？

這問題引起一位名叫 John Adams（1819～1892年）的劍橋大學學生的興趣。他傾全力，想決定這顆未知行星有怎樣的大小及軌道，其（依據萬有引力數學公式）對天王星所引起的擾動才會符合觀測記錄。1843年十月，他有了結果，而且能預測何時何處，用望遠鏡可