《中学课程课外读物》

北京市海淀区教师进修学校主编

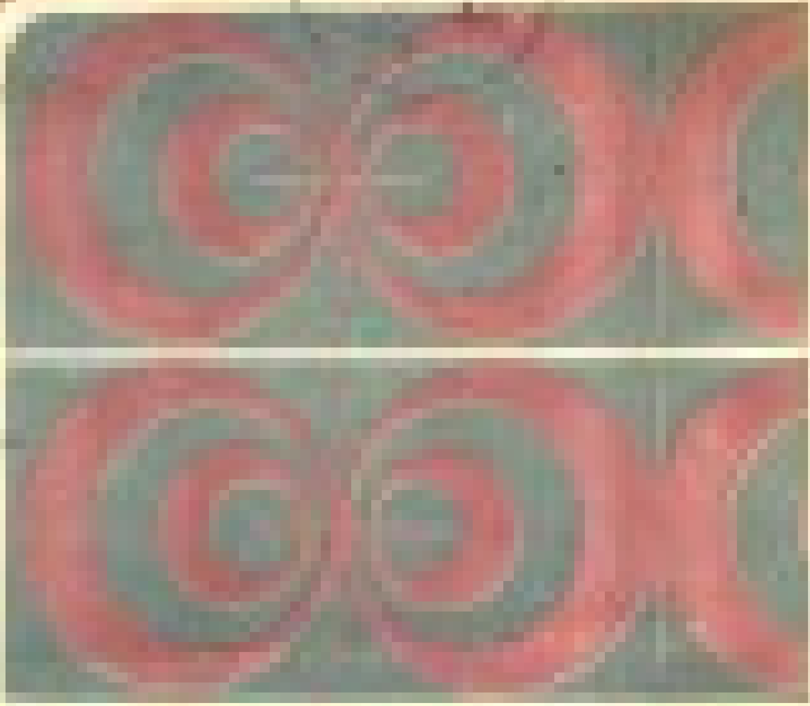
高一代数

自学解难

重庆出版社　华夏出版社

高一代数

自学解疑



中学课程课外读物

高一代数自学解难

附答案与提示

北京市海淀区教师进修学校主编

重庆出版社　华夏出版社

1987年·重庆

责任编辑　赵　剑

高一代数自学解难

重庆出版社、华夏出版社出版
新华书店重庆发行所发行　西安新华印刷厂印刷
*
开本 787×1092　1/32　印张 8.25　字数 192 千
1987年 7 月第一版　1988年 7 月第二版第二次印刷
印数：200,000
*
ISBN 7-5366-0085-2/G·55

定价：1.55元

前　言

为了帮助具有中等文化水平的青年和广大自学读者更好地掌握中学课程内容并提高他们的文化科学知识水平，我们组织了部分教学经验比较丰富的中学教师和教学研究人员，编写了这套《中学课程课外读物》。它包括语文、数学、外语、政治、历史、地理、物理、化学、生物等学科。

课外读物应该有利于掌握中学课程内容和扩大知识面。编写时我们注意依据教学大纲，体现各学科自身的特点，突出重点，剖析难点，开阔视野，启迪思维，开发智力，培养能力；力求使这套书具有针对性、启发性、实用性，成为广大读者自学中学课程的良师益友，成为家长指导和检查子女学习的助手，并可供教师备课时参考。

数学部分，每讲包括四节：系统与结构、理解与思考、方法与能力、回味与引申。

系统与结构，是出于体现较先进的系统观点，有利于读者从整体上把握知识而设置的。

理解与思考，从强调理解出发着重对基础知识，特别是重点、难点进行了较详细的讲述，同时，在学习方法方面引导读者重视独立思考。

方法与能力，一方面讲述了各种基本题型及其解题方法，另方面通过综合性较强的例题的剖析，加强了能力的培养。这一部分之后，配备了A，B两组练习题，供不同水平的读者选用。此外，还编拟了一份自测题并给了答案，以便

于自学的读者自我检查。

回味与引申，通过这部分对学有余力的读者，在知识的深度、广度上给以引导，在思想方法上给以指点。

本册编写者：

北京大学附属中学	周沛耕
北京工业学院附属中学	关民乐
北京医科大学附属中学	刘孝兰
北京市立新学校	任光海
北京市海淀区教师进修学校	王吉钊

由于编者水平有限，书中如有疏漏或不足之处，欢迎读者批评指正。

北京市海淀区教师进修学校

目　　录

第一讲 函 数

一、系统与结构

1. 主要内容

① 关于集合的基本知识。

② 映射的概念；函数与反函数的关系。

③ 函数的图象及函数的基本性质。

④ 基本初等函数中的幂函数、指数函数、对数函数的定义、图象和基本性质。

⑤ 函数性质的应用。

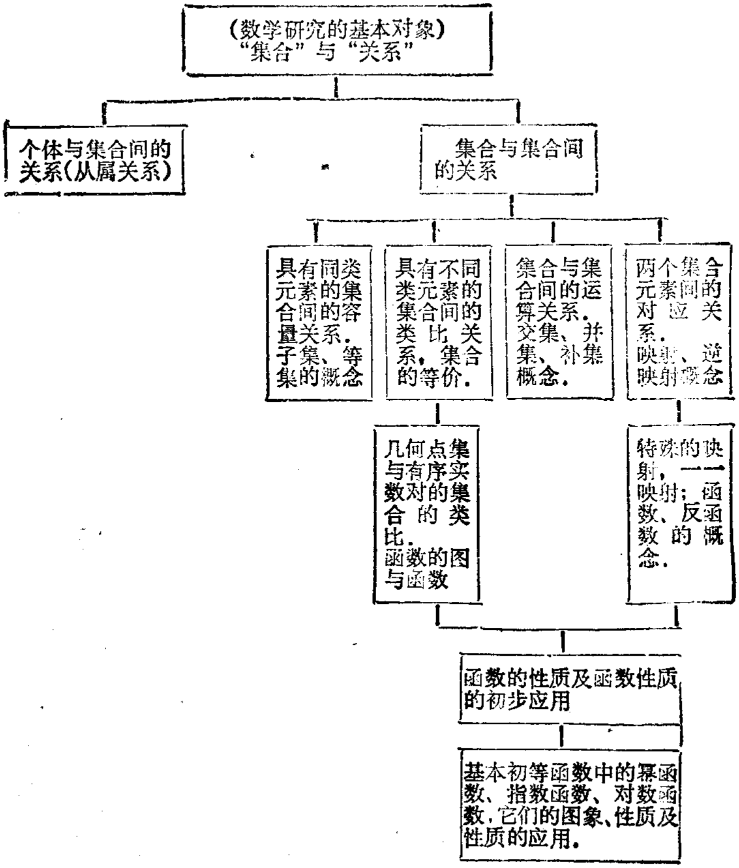
2. 结构框图(见第 2 页)

3. 几点说明

① “集合”是数学研究的基本对象之一。一些数，一些代数式，一些函数，一些点，一些图形……，凡能看做一个整体的各个对象的总和就形成一个集合。初等数学中，经常遇到的集合有数集(或有序实数对的集合)、点集、式集、函数集等。

② “关系”是数学研究的基本问题之一，它体现了事物之间相互联系的方式或规律。目前我们接触到的关系主要有对应关系，函数关系，从属关系，包含或排斥关系，运算关系，类比或转换关系，位置关系，逻辑关系等。

③ 现阶段向大家介绍的函数关系是两个数集间的映



射．任何一个确定的函数关系应当包括定义域、值域、（映射的）对应法则．函数关系是数学的重要内容，也是我们这一讲的核心内容．研究函数的一种重要方法是数形结合的办法，即把函数关系与它的直观表现形式——函数的图象——结合起来的办法．

④ 正确而熟练地使用数学符号和数学语言是高中学生

在数学学习中的一项基本任务。数学语言的主要特点是准确性、精炼性、深刻性、条理性。数学语言体现了数学这门学科特有的美感。

二、理解与思考

1. 特定字母和符号

N：表示自然数集，自然数集也是正整数集，它是无限集．在它的全体元素中，1是最小的元素。自然数集有许多重要的子集，例如部分自然数集$\{1,4,9,25,\cdots,100\}$，奇自然数集$\{2k-1,\ k\in N\}$，偶自然数集$\{2k,\ k\in N\}$，素数（也叫质数）集$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,\cdots\}$，合数集$\{4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20,21,22,24,25,\cdots\}$，被3除余1的自然数集$\{3k-2, k\in N\}$，由一个奇数$p$与2的各非负整数次幂相乘所得的自然数的集合$\{p,\ 2p,\ 4p,\ 8p,\cdots\}$（$p$为奇数）等。

Z：现行中学课本中用Z表示整数集。N是Z的子集。借助函数$f(x)=[x]$，$x\in R$，（这里$[x]$表示不超过实数x的那个最大整数。例如$[-1]=-1$，$[-\pi]=-4$，$[\lg1234]=3$，$[\sin30^\circ]=0$等）可把整数集写成$Z=\{\alpha|\alpha=[x],\ x\in R\}$。非负整数的集合$\{0,1,2,3,\cdots\}$可以表示成$\{k-1,\ k\in N\}$。

Q：表示有理数集。N、Z都是Q的子集。用描述法表示的有理数集就是

$$Q=\left\{x\,|\,x=\frac{p}{q},\ p,q\in Z,\ q\neq0,\ p,\ q\text{互质}\right\}.$$

R：表示实数集。N、Z、Q都是R的子集。实数集与数轴上的点集间可建立一一对应，这两个集合具有类比关系。

数轴上的点集是实数集R的形的表现。研究数集时，如果把实数集作为全集，那么无理数集可用$\overline{Q}$表示。除去N，Z,Q,$\overline{Q}$这些重要的子集外，实数集还有些常用子集。例如正实数集R^+，负实数集R^-，非正实数集$\overline{R^+}$，非负实数集$\overline{R^-}$，正有理数集Q^+，负有理数集Q^-等，与数轴上的线段对应的实数集的子集通常用区间表示。例如

$[-1, 2]$　　表示　$\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，

$(-1, +\infty)$　表示　$\{x|-1<x\}$，

$(-\infty, 2]$　　表示　$\{x|x\leqslant 2\}$，

$[2k\pi, (2k+1)\pi](k\in Z)$

表示　$\{x|2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi, k\in Z\}$等。

除上述字母具有特定意义外，还有些具有特定意义的符号。例如：

$\varnothing$：表示空集。

$\in$：表示元素与集合的从属关系，如$\sqrt{2}\in\overline{Q}$。

$\cap$：表示集合间取交的运算关系，如

$\{x|-1<x\leqslant 5\}\cap\{x|x\leqslant 3\}=\{x|-1<x\leqslant 3\}$。

$\cup$：表示集合间取并的运算关系，如

$\{x|-1<x\leqslant 2\}\cup\{x|0\leqslant x\leqslant 5\}=\{x|-1<x\leqslant 5\}$。

$\overline{}$：表示在全集给定的条件下，对横线下面的集合取补的运算。如设$A=\{x|x^2+x-2\geqslant 0\}$，$I=R$，则

$\overline{A}=\{x|x^2+x-2<0\}=\{x|-2<x<1\}$。

$\subseteq$：表示集合间的包含关系。例如，若对任何一个$x\in A$，都有$x\in B$，则有$A\subseteq B$。

$=$：等集符号。表示它两端的两个集合的元素彼此相同。例如$\{2n-1, n\in Z\}=\{4k\pm 1, k\in Z\}$。

今后，大家还将不断学习新的具有特定意义的字母或符

号。准确使用、识别这些符号，能提高我们对数学语言的表达、理解能力。

2．集合的数学表示法

列举法：把集合的元素一一列出的办法是列举法。列举时，不必考虑元素的顺序，元素不得重复，元素之间用分隔符号“，”隔开。如果某集合的元素数目较多，且元素间有明显的规律性，则可用省略号“…”或使用参数。下面是用列举法表示的集合的例子：

$\{0\}$，$\{1, 2, 3\}$，$\{(0, 1), (-2, 3)\}$，$\{(1, 2, 3)\}$，$\{0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, \cdots, 399\}$，$\{(-1)^k\sqrt{R}, k\in N\}$等。

描述法：给出集合中元素的代表符号，然后用数学语言对该集合中元素的特性加以说明的办法叫描述法。描述中应注意元素的代号要前后一致，多层描述时对各参数应分别说明．要正确使用逻辑关联词“且”，“或”等，描述的语句力求简练，层次分明。例如：

$A\cap B=\{x|x\in A, 且x\notin B\}$，

$\bar{A}\cup\bar{B}=\{x|x\in\bar{A}或x\in\bar{B}\}=\{x|x\notin A\cap B, x\in I\}$

$\{\alpha|\sin\alpha=-1\}=\left\{\alpha|\alpha=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}, k\in Z\right\}$，

$\{a+\sqrt{2}b|a, b\in Q\}$，

$\{(x, y)|x^2+y^2\geqslant 4, x, y\in Z\}$等。

3．映射、逆映射的概念

映射 f：$A\to B$ 表示集合 A 中任意一个元素按照对应法则 f 都有集合 B 中唯一的元素与之对应。A 中的元素叫该映

射的原象，B中与之对应的元素叫象。这里的“A中任意一个元素”好比是原料，由A到B的对应法则f就象是对原料加工的过程，加工后的唯一产物应在B中。如果对A中的某元素（原料）不能加工，或者加工后的产物不唯一或者产物不在B中，这个对应就不是由A到B的映射。例如$A=\overline{R^-}$，$B=R$，由A到B的对应法则f是“取对数”，这个对应就不是由A到B的映射，因为A中元素0“无法加工”。若把A改成R^+，这时f就是由A到B的映射了。又如$A=\overline{R^-}$，$B=R^+$，由A到B的对应法则是“求平方根”，这个对应也不是由A到B的映射，原因是A中元素0经过“求平方根”这种“加工”后，产物不在B中，若把B换成R，集合A和由A到B的对应法则不变，它也不是由A到B的映射，因为A中任一个非零元素a在这种“加工”下，产物是$\sqrt{a}$，$-\sqrt{a}$，可见产物不唯一。若在$A=\overline{R^-}$，$B=R$的条件下，把由A到B的对应法则改成“求算术根”，这时就形成了由A到B的映射。

映射f：$A\to B$如果进一步具有下列特性：

① 原象不同，象也不同；

② B中任何元素都是A中某元素的象，那么这个映射f：$A\to B$就确定了另一个映射f^{-1}：$B\to A$，它的对应法则是“寻找映射f：$A\to B$这个过程中的原象”。（想一想：为什么这个由B到A的对应是映射？）我们把这后一个映射叫做映射f：$A\to B$的逆映射，记为f^{-1}：$B\to A$。应当注意：f：$A\to B$与f^{-1}：$B\to A$互为逆映射。逆映射不能脱离原来的映射而单独存在（指孤立地自称逆映射）。

具有上述两个特性的映射叫一一映射。只有一一映射，我们才谈它的逆映射。

例如$A=[-1,0]$，$B=[0,1]$，由A到B的对应法则f

使得A中任一元素x与B中的元素$y=\sqrt{1-x^2}$对应，这个映射是由$A\to B$的一一映射。它的逆映射是由B到A对应法则为f^{-1}的映射。f^{-1}使得B中任一元素y与A中的元素$x=-\sqrt{1-y^2}$相对应。

4. 函数、反函数的概念

函数是数学研究的重要对象。函数是数集间的映射。设A，B是两个数集，那么任意一个映射f：$A\to B$就确定了一种函数关系，A叫定义域。如果映射f：$A\to B$使得B中的每一个元素都在A中有原象，我们就把B称为函数的值域，否则B就不能叫函数的值域。所以函数是由定义域、值域以及定义域到值域上的对应法则三部分构成的特殊的映射。一般说来定义域和对应法则能确定值域。习惯上，定义域中的元素用x表示，值域中的元素用y表示，这时由映射f：$A\to B$形成的函数就记为

$$y=f(x),\quad x\in A.$$

如果函数$y=f(x)$，$x\in A$是由$A\to B$的一一映射，这个映射的逆映射也形成(另一个)函数。后一个函数的定义域是B，值域是A。如果仍然把定义域中的元素用x表示，值域中的元素用y表示，这个新的函数就是

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in B.$$

函数$y=f^{-1}(x)$，$x\in B$称作函数$y=f(x)$，$x\in A$的反函数。容易看出：

函数$y=f^{-1}(x)$，$x\in B$与函数$y=f(x)$，$x\in A$互为反函数。反函数不能脱离原来的函数而单独存在（指孤立地自称反函数）。

一对互反的函数的定义域、值域互换，对应法则互逆。

因此，求给定解析式的函数 $y=f(x)$，$x\in A$ 的反函数时，一般需要三个步骤：

① 反解：即解关于x的方程$y=f(x)$，达到用 y 表示 x 的目的；

② 交换：把上一步得到的用y表示x的关系式中的x、y对调，即把y改写成x，把原来的x改写成y；

③ 求出并注明反函数的定义域。（它是已知函数的值域）

［例 1］ 已知函数$y=x^4$，$x\in[-2,-1]$，求它的反函数。

解：$y=x^4$，$x\in[-2,-1]$的值域是$y\in[1,16]$。可见反函数的定义域是[1，16]。

$\because\ x<0$，$\therefore\ x=-\sqrt[4]{y}$。

交换x、y就得到 $y=-\sqrt[4]{x}$。

所求的反函数是 $y=-\sqrt[4]{x}$，$x\in[1,16]$。

有些函数是经过较多层次的映射最终形成函数的，例如$y=\lg u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$。这时函数 $y=f(x)$ 就是 $y=\lg\sqrt{x^2+1}$。这样的函数叫复合函数。一般地，由函数 $y=f(u)$，$u=v(x)$形成的复合函数记为 $y=f[v(x)]$。这个复合函数的对应法则是对“原料”x逐次进行“v”和“f”两次“加工”，即把x“加工”成$v(x)$，再把$v(x)$当做“原料”按f这个法则“加工”成$f[v(x)]$。特别地，$v(x)$也可以是$f(x)$，这时形成的复合函数就是$y=f[f(x)]$。例如当$f(x)=\sqrt{1-x}$时，$f[f(x)]=f(\sqrt{1-x})=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$。因为函数 $f[v(x)]$与函数 $y=f(x)$ 是两个不同的函数，所以它们的定义域一般来说不相同。