高等代数

重要习题详解

杨尚骏　　林家寿

谢　敏　王肇华　方均尧　　编演

安徽省教学学会

安徽大学数学系

序　言

高等代数是大学数学专业的重要基础课之一，其理论严密，观点抽象，应用普遍。特别是随着计算技术的日益普及和概率统计方法的广泛使用，它已成为许多科学工作者和工程技术人员的必备知识。

高等代数以其独特的理论体系和解题技巧而引人入胜，但欲透彻掌握而达到运用自如却非易事。就以习题和试题而言，有些往往貌似平易，而解题时稍有不慎就会陷入困境。目前出版物中可供借鉴者也较少。据此，我们编写这本小书。

全书共分两部分：第一编包括近年来各高等院校研究生入学考试中部分代数题，这可使读者了解考题涉及范围，有助考生复习迎考，也可供拟题者参考。同时还编入美国攻考硕士、博士学位试卷中的部分线性代数题，虽则数量不多，却可见其特殊风格，以收开阔思路之效。第二编主要选自И.В.Проскуряков所著《线性代数习题集》（中译本由北京师范大学出版社出版）。这是一部名著，其安排由浅入深，循序渐进，内容丰富，自成体系，深度广度均远远超过一般教科书。初学者从中可获必要的基本知识和解题方法，有一定基础的读者可籍此加深理解和掌握技巧，对从事高等代数教学的教师来说，也是一本不可缺少的工具书。我们选解了原书大部分证明题和一些有代表性的计算题，同时还选入我

们在教学科研中所编演的习题，俾使不同情况的对象都能开卷有益。

我们衷心感谢安徽省数学学会和安徽大学数学系对编写本书的热忱关怀和大力支持，使本书得以完成和出版。我们衷心感谢许义生、郑祖庥、朱钧陶以及几何代数教研室的同志们对本书所贡献的许多宝贵意见。我们衷心感谢安徽大学数学系的一些同学，他们帮助收集了不少试题，并讨论了部分题目的解法。

在出版此书的过程中，得到安徽大学印刷厂大力支持，特致谢意。

限于我们的水平，不妥及谬误之处，万望不吝指正。

编　者

一九八二年三月

目　录

第一编　历届研究生入学试题及其它重要习题选辑

一、多项式……………………………………………………（ 1 ）

二、行列式与线性方程组……………………………………（ 9 ）

三、矩阵……………………………………………………（ 15 ）

§ 1 矩阵的秩……………………………………………（ 15 ）

§ 2 特征值与特征向量……………………………………（ 18 ）

§ 3 矩阵的相似 标准形……………………………………（ 28 ）

§ 4 正定矩阵………………………………………………（ 37 ）

§ 5 其他……………………………………………………（ 39 ）

四、二次型…………………………………………………（ 43 ）

五、线性空间与线性变换……………………………………（ 50 ）

六、欧氏空间与酉空间………………………………………（ 66 ）

第二编　线性代数习题选

一、行列式…………………………………………………（ 71 ）

二、矩阵……………………………………………………（116）

三、二次型…………………………………………………………（167）
四、线性空间……………………………………………………（201）
五、欧氏空间与酉空间………………………………………（210）
六、线性变换……………………………………………………（255）
七、欧氏空间与酉空间中的线性变换………………………（290）

第一编　历届研究生入学试题及其它重要习题选辑

一、多 项 式

1.1 令$f(x)$，$g(x)$是数域F上的一元多项式，

$$g(x)=p^m(x)g_1(x),\quad m\geqslant 1$$

而$(p(x),g_1(x))=1$。证明：

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{p^m(x)}+\frac{f_1(x)}{p^{m-1}(x)g_1(x)}$$

其中$r(x)$的次数小于$p(x)$的次数（注：多项式0的次数定义为$-\infty$）。

证：由带余除法

$$f(x)=q_0(x)p(x)+r_0(x)$$

$r_0(x)$的次数$<p(x)$的次数。

因$(p(x),g_1(x))=1$，故存在多项式$u(x)$，$v(x)$使

$$1=u(x)p(x)+v(x)g_1(x)$$

进而　$r_0(x)=r_0(x)u(x)p(x)+r_0(x)v(x)g_1(x)$

另外再由带余除法

$$r_0(x)v(x)=q(x)p(x)+r(x)$$

$r(x)$的次数$<p(x)$的次数。

利用上述各式可得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{q_0(x)p(x)+r_0(x)}{p^m(x)g_1(x)}$$

$$=\frac{q_0(x)p(x)+r_0(x)u(x)p(x)+(q(x)p(x)+r(x))g_1(x)}{p^m(x)g_1(x)}$$

$$=\frac{r(x)}{p^m(x)}+\frac{q_0(x)+r_0(x)u(x)+q(x)g_1(x)}{p^{m-1}(x)g_1(x)}$$

$$=\frac{r(x)}{p^m(x)}+\frac{f_1(x)}{p^{m-1}(x)g_1(x)}$$

其中 $f_1(x)=q_0(x)+r_0(x)u(x)+q(x)g_1(x)$。

1.2 设$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$为实系数多项式，它们适合下列关系：

$$(x^2+1)h(x)+(x-1)f(x)+(x-2)g(x)=0 \quad (*)$$

$$(x^2+1)h(x)+(x+1)f(x)+(x+2)g(x)=0 \quad (**)$$

证明：$f(x)$，$g(x)$都能被x^2+1整除。

证：从（**）式减去（*）式得

$$f(x)=-2g(x)$$

（**）式再加（*）式得

$$(x^2+1)h(x)=-x(f(x)+g(x))=xg(x)$$

即$(x^2+1)|xg(x)$。但$(x^2+1,\ x)=1$，故$(x^2+1)|g(x)=\frac{1}{2}f(x)$。所以$f(x)$，$g(x)$都能被$x^2+1$整除。

1.3 判定多项式 $f(x)=x^3+x^2-4x-1$ 和 $g(x)=x^2+2x-1$ 互素，并求多项式$a(x)$，$b(x)$使

$$a(x)f(x)+b(x)g(x)=1$$

解：我们有

$$f(x)=(x-1)g(x)-(x+2)$$

$$g(x)=x(x+2)-1$$

因此 $(f(x),\ g(x))=1$

又 $1=x(x+2)-g(x)=x[(x-1)g(x)-f(x)]-g(x)$

$$=-xf(x)+(x^2-x+1)g(x)$$

令$a(x)=-x$，$b(x)=x^2-x+1$，则

$$a(x)f(x)+b(x)g(x)=1$$

1.4 $f(x)$和$g(x)$是有理系数多项式，不全为零。假设$f(x)$与$g(x)$互素。求 $\varphi(x)=(x^3-1)f(x)+(x^3-x^2+x-1)g(x)$ 和 $\psi(x)=(x^2-1)f(x)+(x^2-x)g(x)$ 的最大公因式.

解：$\varphi(x)=(x-1)[(x^2+x+1)f(x)+(x^2+1)g(x)]$
$=(x-1)\overline{\varphi}(x)$

$$\psi(x)=(x-1)[(x+1)f(x)+xg(x)]$$

$=(x-1)\overline{\psi}(x)$

令 $d(x)=(\overline{\varphi}(x),\ \overline{\psi}(x))$，且

$$\overline{\varphi}(x)=(x^2+x+1)f(x)+(x^2+1)g(x)=u(x)d(x)\quad(*)$$

$$\overline{\psi}(x)=(x+1)f(x)+xg(x)=v(x)d(x)\quad(**)$$

从($*$)式减去x与($**$)式的乘积得

$$f(x)+g(x)=(u(x)-xv(x))d(x)$$

即 $d(x)|(f(x)+g(x))$.($**$)式给出$f(x)=v(x)d(x)-x(f(x)+g(x))$，故又有 $d(x)|f(x)$。进而$d(x)|g(x)$. 但$f(x)$与$g(x)$互素，所以$d(x)=(\overline{\varphi}(x),\ \overline{\psi}(x))=1$ 最后得

$$(\varphi(x),\ \psi(x))=(x-1)\ (\overline{\varphi}(x),\overline{\psi}(x))=x-1$$

1.5 试求以$\sqrt{2}+\sqrt{3}$为根的有理系数的不可约多项式。

解：所求多项式为

$$(x-(\sqrt{2}+\sqrt{3}))\ (x+(\sqrt{2}+\sqrt{3}))(x^2-5+2\sqrt{6})$$
$$=(x^2-5-2\sqrt{6})(x^2-5+2\sqrt{6})$$
$$=x^4-10x+1.$$

1.6 已知 $f(x)=x^4+4x^3+10x^2+12x+9$ 有重根，求此多项式的所有根.

解：不难求得 $f(x)$ 与 $f'(x)=4(x^3+3x^2+5x+3)$的

最大公因式为 x^2+2x+3。于是 $f(x)=(x^2+2x+3)^2$。所以$f(x)$ 有两个二重复根 $-1\pm\sqrt{2}i$。

1.7 设α，β是实系数多项式 $f(x)$的两个实根，$\alpha<\beta$，λ是任意实数。证明 $f'(x)+\lambda f(x)$ 必有一个满足条件：$\alpha<\gamma<\beta$的实根γ。

证：若 $f(x)=0$，则结论显然成立。

若 $f(x)\neq 0$，令 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)g(x)$，则 $g(x)\neq 0$。 记 $\phi(x)=f'(x)+\lambda f(x)=(x-\alpha)g(x)+$ $+(x-\beta)g(x)+(x-\alpha)(x-\beta)(g'(x)+\lambda g(x))$。

反设结论不成立，即 $\phi(x)$在开区间(α,β)内没有根，因而$\phi(x)$在 (α,β) 内保持同一符号。 又因 $\phi(\alpha)=$ $=(\alpha-\beta)g(\alpha)$，$\phi(\beta)=(\beta-\alpha)g(\beta)$，所以 $g(x)$在 (α,β)内必须变号，进而$g(x)$在(α,β)内有一个根δ_1。但 $g(x)$ 的根也是 $f(x)$的根，故对 $f(x)$而言，在两根α，β之间存在第三个根δ_1，$\alpha<\delta_1<\beta$。

同理，在α，δ_1之间又存在新的根δ_2，$\alpha<\delta_2<\delta_1$。依此类推，多项式$f(x)$有无穷多个根，这是一个矛盾。

1.8 令λ_1，λ_2，λ_3是多项式 $f(x)=x^3+x^2+x+2$ 的根。求一个有理系数多项式 $p(x)$，使得 $g(\lambda_1)$，$g(\lambda_2)$，$g(\lambda_3)$是它的根，其中$g(x)=x^2+x+1$。

解：按谢邦杰著《线性代数》第四章 § 4 定理 4：在复数域上，若矩阵A的特征值为λ_1，…，λ_n，则对任意多项式 $g(\lambda)$，$g(A)$的特征值恰为$g(\lambda_1)$，…，$g(\lambda_n)$。因此，若能找到一个有理矩阵A有特征多项式为$f(\lambda)$，则矩阵 $g(A)$ 的特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 一定是有理系数多项式，而且 $g(\lambda_1)$，$g(\lambda_2)$，$g(\lambda_3)$恰为它的根。取 $p(x)=\varphi(x)$ 即为所求。

不难看出

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

的特征多项式 $|\lambda E-A|=f(\lambda)$。

因为 $g(A)=A(A+E)+E$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

所以 $p(x)=\begin{vmatrix}x-1 & -1 & 0\\ 0 & x-2 & 0\\ -1 & 1 & x-2\end{vmatrix}=(x-1)(x-2)^2$

$$=x^3-5x^2+8x-4.$$

〔注〕本题也可采用根与系数的关系来解，但计算较繁。

1.9 设 $f(x)=a_0+a_1x\cdots+a_{2n+1}x^{2n+1}$是一整系数多项式，且存在一个素数 p 满足

$p|a_k \quad k=2n,\ 2n-1,\ \cdots,\ n+1$

$p^2|a_k \quad k=n,\ n-1,\ \cdots,\ 0$

$p^3\nmid a_0,\ p\nmid a_{2n+1}$

求证：f(x)在有理数域上不可约。

证：设 f(x) 已分解为较低次数的整系数多项式之积：

$$f(x)=(b_hx^h+b_{h-1}x^{h-1}+\cdots+b_0)(c_mx^m+c_{m-1}x^{m-1}+\cdots+c_0) \qquad (*)$$

$$(h,\ m<2n+1,\ h+m=2n+1)$$

因为$p^2|a_0=b_0c_0$，所以p整除 b_0或c_0，不妨设 $p|b_0$。但 $p\nmid a_{2n+1}$，故 p 不能整除所有的 $b_i(i=1,\ \cdots,\ h)$。设 $p|b_i\ (i=1,\ \cdots,\ s-1)$ 但 $p\nmid b_s$，$0<s\leqslant h\leqslant 2n$。等式

$$a_s = b_s c_0 + b_{s-1} c_1 + \cdots + b_0 c_s \qquad (**)$$

中除$b_s c_0$一项外，各项都能被p整除，因此 $p|b_s c_0$，又因素数p不整除b_s，所以$p|c_0$。

同理，对 $a_{s+1} = b_{s+1} c_0 + b_s c_1 + \cdots + b_0 c_{s+1}$ 的讨论给出 $p|b_s c_1$，进而 $p|c_1$。依此继续得 $p|c_2$，…，$p|c_{2n-s}$。但 $p\nmid c_{2n-s+1}$（对应于$p|a_{2n}$与$p\nmid a_{2n+1}$）。

分两种情形讨论如下：

情形 Ⅰ：$s \leqslant n$。

此时等式（**）的各项除 $b_s c_0$ 一项外全被p^2 整除，故有 $p^2|b_s c_0$。进而 $p^2|c_0$。于是 $p^3|b_0 c_0 = a_0$，与题设矛盾。

情形 Ⅱ：$s>n$，$t = 2n - s + 1 \leqslant n$。

等式 $a_t = c_t b_0 + c_{t-1} b_1 + \cdots + c_0 b_t$ 的各项除 $c_t b_0$一项外全被p^2整除，故有 $p^2|c_t b_0$，进而 $p^2|b_0$，也与$p^3\nmid a_0$的假设相矛盾。

所以，无论哪种情形，f(x) 都不能有形如（*）的分解式，因此 f(x)在有理数域上不可约。

1.10 设 $f(x) = x^3 - 10x + 5$。证明：

（1）f(x)在有理数域上不可约。

（2）f(x)有3个实根。

证：（1）若 f(x) 在有理数域上可约，即 f(x) 有根r/s，则整数 s，r 满足 $s|1$ 和 $r|5$。换句话说，f(x) 的根只可能是±1和±5。但简单验算表明 f(±1)，f(±5)都不等于0，这是矛盾。

(2) 用多项式的连续性。因 $f(-\infty) = -\infty < 0$，$f(0) = 5 > 0$，$f(1) = -4 < 0$，$f(+\infty) = +\infty > 0$，故 f(x) 有3个实根分别落在 $(-\infty, 0)$，$(0, 1)$，$(1, +\infty)$之中。

1.11 α，β分别为m，n次本原单位根，$(m,n)=1$。证明：α，β是mn次本原单位根。

证：我们知道下列三个命题是等价的：

(i) α是m次本原单位根；

(ii) $\alpha^m=1$且对小于m的一切正整数i，$\alpha^i\neq 1$；

(iii) $\alpha^k=1 \Longleftrightarrow m|k$。

现在 $$(\alpha\beta)^{mn}=(\alpha^m)^n(\beta^n)^m=1$$

设$1=(\alpha\beta)^i=\alpha^i\beta^i$，则 $\alpha^{in}=\beta^{-in}=1$，因此 $m|in$。又因$(m,n)=1$，所以 $m|i$。同理可证 $n|i$。进而 $mn|i$，即对小于 mn 的一切正整数 i，$(\alpha\beta)^i\neq 1$。所以$\alpha\beta$是mn次本原单位根。

1.12 设$g(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$，$a_i\in Z$，p是素数，有两个整数$0\leqslant h$，$k\leqslant n$，使$p\nmid a_h$，$p^2\nmid a_k$，$p|a_i$，$i\neq h$，$0\leqslant i\leqslant n$。证明：

（1）如果 $g(x)$在 $Q[x]$ 上可约，$g(x)=\phi(x)\psi(x)$，那么有$\partial(\phi(x))\geqslant|h-k|$，或$\partial(\psi(x))\geqslant|h-k|$。

（2）如果$n-|h-k|<s<|h-k|$，那么$g(x)$不能有s次有理因子。如果$n=|h-k|$，那么$g(x)$在$Q[x]$上不可约。

证：（1）因$g(x)$在$Q[x]$上可约，故在$Z[x]$上可约，即存在整系数多项式

$$\phi(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

$$\psi(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$$

使得 $g(x)=\phi(x)\psi(x)$成立。

由艾森斯坦因判别法知，$h=n$和$k=0$不可能同时成立。为此分三种情况讨论：

1° $h<n$，$k=0$。此时有$p^2\nmid a_0$，而已知$p|a_0=b_0c_0$。于是，或$p|b_0$，$p\nmid c_0$或$p\nmid b_0$，$p|c_0$。

不妨设 $p|b_0$，$p\nmid c_0$ （另一情况可同法讨论）。因$p\nmid a_h$，所以p不能整除所有的$b_k(k=0,\cdots,m)$，设$\phi(x)$中最后一个不能被p整除的系数为b_i，那么在

$$a_i=b_ic_0+b_{i-1}c_1+\cdots+b_0c_i$$

中，除第一项外，都能被p整除，因此$p\nmid a_i$。从而$i=h$。因此$m\geqslant h=h-k$。

2° $n\geqslant h>k>0$。如果$p^2\nmid a_0$（此时$h<n$），可如1°讨论，故可设 $p^2|a_0=b_0c_0$。此时或 $p|c_0$，或 $p\nmid c_0$。如果$p|c_0$，那么$p|b_0$，由于$p\nmid a_h$，因此$\phi(x)$和$\psi(x)$的系数不可能都被p整除。不妨设$\phi(x)$和$\psi(x)$，最后一个不能被p整除的系数分别为b_i，c_j，于是在

$$a_{i+j}=b_0c_{i+j}+\cdots+b_ic_j+\cdots+b_{i+j}c_0$$

中，除b_ic_j处，其余各项都能被p整除，因此 $p\nmid a_{i+j}$，从而$i+j=h$。又，k不可能同时小于i和j，否则由

$$a_k=b_kc_0+b_{k-1}c_1+\cdots+b_1c_{k-1}+b_0c_k$$

推出$p^2|a_k$的矛盾。故不妨设$k\geqslant i$，从而$m\geqslant j\geqslant h-k$。

如果$p\nmid c_0$，此时不可能同时有 $p\nmid b_0$，因而又回到情况1°。

3° $k>h$。先考虑

$$f(y)=a_0y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}y+a_n$$

在 $f(y)$ 中，$p\nmid a_h$，$p^2\nmid a_k$，$p|a_i$，$0\leqslant i\leqslant n$，$i\neq h$。而$f(y)=\phi_1(y)\psi_1(y)$。$\phi_1(y)$，$\psi_1(y)$分别是m，n次整系数多项式。记 $d_i=a_{n-i}$，$f(y)=d_ny^n+d_{n-1}y^{n-1}+\cdots+d_1y+d_0$，于是，$p\nmid d_{n-h}$，$p^2\nmid d_{n-k}$，且 $n-h>n-k$。由2°就得$m\geqslant(n-h)-(n-k)=k-h$，即$\partial(\phi_1(y))\geqslant k-h$。

令$x^t = y^{n-t}$，$g(x)$化成$f(y)$：

$$g(x) = a_n + a_{n-1}y + \cdots + a_1 y^{n-1} + a_0 y^n = f(y),$$

由上知，$f(y) = \phi_1(y)\psi_1(y)$，且$\partial(\psi_1(y)) \leqslant n-(k-h)$。因此相应地 $g(x) = \phi(x)\psi(x)$，其中

$$\partial(\psi(x)) = n - \partial(\psi_1(y)) \geqslant k-h$$

综上所述，有$\partial(\phi(x)) \geqslant |h-k|$或$\partial(\psi(x)) \geqslant |h-k|$。

（2）如果$n-|h-k| < s < |h-k|$，则对$g(x)$的上述任一分解式，不妨设$\partial(\phi(x)) \geqslant |h-k|$。那么

$$\partial(\psi(x)) \leqslant n-|h-k| < s$$

因此$g(x)$不含s次有理因子。如果$n=|h-k|$，由$g(x)$的上述分解式得 $\partial(\phi(x)) = n$，$\partial(\psi(x)) = 0$ 或 $\partial(\phi(x)) = 0$，$\partial(\psi(x)) = n$。即$g(x)$在有理数域上不可约。

二、行列式与綫性方程組

2.1 证明元素为0，1的三级行列式之值只能是0，±1，±2。

证：设 $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$a_{ij}$ 取值 0 或 1。若Δ的第一列元素全为零，则$\Delta=0$，结论成立。否则，第一列至少有一个非零元，不失一般性，设$a_{11} \neq 0$。通过减去第一行的适当倍把a_{21}，a_{31}变为零得：

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}$$

其中$b_{ij} = a_{ij}$ 或$b_{ij} = a_{ij} - a_{1j}$。因 $|b_{ij}| \leqslant 1$，所以 $|\Delta| \leqslant 2$。

2.2 计算2n级行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$$

解：对第n，n+1行按拉普拉斯定理展开，得

$$D_{2n}=(a^2-b^2)D_{2n-2}$$

其中D_{2n-2}为2n－2级D_{2n}型行列式。因为$D_2=a^2-b^2$，由递推关系可得$D_{2n}=(a^2-b^2)^{n-1}D_2=(a^2-b^2)^n$。

2.3 计算n级行列式

$$\triangle_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^n \end{vmatrix}$$

解：在$\triangle_n$中，把第n行减去第 n-1行，第 n-1 行减去第 n-2行，……，第 2 行减去第 1 行之后，再利用公式

$$C_k^i-C_{k-1}^i=C_{k-1}^{i-1}\text{及}C_k^k=C_{k-1}^{k-1}=1$$

得

$$\triangle_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_3^1-C_2^1 & C_3^2-C_2^2 & C_3^3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & C_n^1-C_{n-1}^1 & C_n^2-C_{n-1}^2 & C_n^3-C_{n-1}^3 & \cdots & C_n^{n-1}-C_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & C_2^1 & C_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}=\Delta_{n-1}$$

同理，$\Delta_{n-1}=\Delta_{n-2}$，$\Delta_{n-2}=\Delta_{n-3}$，…，最后得，$\Delta_n=\Delta_1=1$。

2.4 计算n级行列式

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解：可通过对n 用归纳法证明来得到此行列式的值。因$\Delta_1=2$，$\Delta_2=3$。可假定对一切$k\leqslant i$，$\Delta_k=k+1$。则把Δ_{i+1}按第一行展开得

$$\Delta_{i+1}=2\Delta_i-\Delta_{i-1}=2(i+1)-i=i+2$$

所以对任意正整数n都有 $\Delta_n=n+1$。

2.5 计算下列行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

解：

$$\Delta=(-1)^{n+(n-1)+\cdots+1}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a & a-1 & \cdots & a-n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1}\\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{0\le j<i\le n}\Big((a-i)-(a-j)\Big)$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{0\le j<i\le n}(j-i)$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}1^n2^{n-1}\cdots(n-1)^2n$$

$$=2^{n-1}3^{n-2}\cdots(n-1)^2n$$

2.6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x\end{vmatrix}$$

解 这是n+1级行列式，令右下角的元素$x=(x-a_n)+a_n$。可把原行列式D分写成两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix}x & a_1 & a_2 & \cdots & 0\\ a_1 & x & a_2 & \cdots & 0\\ a_1 & a_2 & x & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x-a_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$