计算方法丛书

有理函数逼近及其应用

王仁宏　朱功勤　著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书系统介绍有理函数逼近的理论、方法及其应用.内容包括:有理逼近中的连分式方法,有理插值及向量值有理插值,Padé 逼近与 Padé 型逼近,基于广义逆的向量值、矩阵值、函数值的 Padé 逼近,有理 Tchebyshev 逼近、有理样条函数,以及有理逼近在图象处理、微分方程数值解法和几何设计中的应用.

本书可作为高等院校计算数学、应用数学和计算机科学专业的研究生及高年级大学生的教材,也可供工程技术人员阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

有理函数逼近及其应用/王仁宏,朱功勤著. —北京:科学出版社,2004
(计算方法丛书)
ISBN 7-03-011538-4

Ⅰ.有… Ⅱ.①王… ②朱… Ⅲ.有理函数逼近
Ⅳ.0174.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 045505 号

责任编辑: 陈玉琢 刘嘉善 /责任校对: 宋玲玲
责任印制: 钱玉芬 /封面设计: 王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004 年 1 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2004 年 1 月第一次印刷 印张:27 1/4
印数:1—3 000 字数:523 000

定价: 55.00 元
(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　言

在自然科学与技术科学领域中存在着大量的需要解决的非线性问题，它们已成为科学技术研究的热点和主攻方向之一.

诚如英国著名哲学家与数学家罗素(Bertrand Russell)所说:“所有精确的科学都受到逼近的思想所支配.”确实，所有的非线性科学也已受到、并将继续受到非线性逼近的思想的渗透和影响.多年来作为非线性逼近的典型之一的有理函数逼近，愈来愈引起人们的关注.因为有理函数仍属于简单函数类.它虽然比多项式要复杂，但用它来近似表示函数时，却比用多项式更灵活、有效，且能反映函数的一些固有特性，如奇性等.所以，近年来人们在数值与函数逼近，计算机辅助几何设计中常常偏爱有理函数.

由于有理函数逼近的实现比多项式逼近要复杂得多，使得它的应用受到了影响.但由于计算机的出现，过去难于实现的问题变成了可能，所以关于有理逼近的理论研究和应用研究仍有着巨大的发展潜力.遗憾的是，至今国际上尚无一本系统介绍有理逼近理论与方法的著作供我们采用.

早在二十多年前，本书作者之一曾出版过一本名为《数值有理逼近》的著作，为在我国开展有理逼近研究起了一点推动作用.十多年前徐献瑜、李家楷和徐国良曾出版了一部名为《Padé 逼近概论》的著作，该书就有理逼近中的十分重要的领域 Padé 逼近作了详细而有趣的论述.本书后一作者领导的研究集体长期系统地研究了有理逼近中的多个有关题材，在国家自然科学基金的资助下，取得了一系列有价值的研究成果，并培养了一批硕士、博士研究生.为适应科学技术发展和广大读者的需要，我们撰写了这本书.由于近年来国际上关于有理逼近的研究成果十分丰富，所以本书只能介绍最基本的理论与方法.全书共有七章.第一彰介绍有理逼近中的连分式方法，主要介绍连分式向后三项递推算法及其应用、向量连分式与矩阵连分式、连分式的加速收敛以及分叉连分式等的基本理论与方法；第二章介绍有理插值的存在性及各种算法；第三章介绍向量值函数有理插值的基本理论与各种算法，着重介绍基于广义逆矩阵有理插值及分叉连分式插值的基本理论与算法及误差估计；第四章论述关于 Padé 逼近与 Padé 型逼近的理论.由于已有前面已提及的著作《Padé 逼近概论》，所以我们只侧重介绍 Padé 逼近及 Padé 型逼近的定义与算法，Tchebyshev-Padé 逼近，Padé 型逼近的性质及收敛性，基于广义逆的向量 *Padé* 逼近与矩阵 Padé 逼近，Newton-Padé 逼近，多元 Padé 型逼近的算法与收敛性等；第

五章介绍一元与二元有理样条的基本理论及一类新的 Padé 样条等；第六章简要介绍最佳有理逼近中的通常有理 Tchebyshev 逼近，权函数具有零点的和插值约束的有理逼近，以及 Newton-Padé 逼近与最佳有理逼近等. 最后一章以举例的方式介绍向量函数有理逼近及连分式插值方法在图象压缩与重构中的应用，函数值 Padé 逼近在积分方程数值解中的应用，矩阵指数函数的一种新算法，以及向量有理插值在计算机辅助几何设计(CAGD)中的应用等.

在本书的撰写过程中，檀结庆教授、顾传青教授、朱晓临博士、赵欢喜博士等提供了一些有价值的资料，我们表示衷心的感谢. 由于我们的水平有限，在题材的取舍和处理上可能会有不妥，甚至谬误之处，恳请广大读者批评指正.

作者由衷地感谢中国科学院科学出版基金资助本书的出版. 作者还要感谢国家自然科学基金委员会多年来的资助，感谢大连理工大学和合肥工业大学的一贯支持，第一作者还要感谢广东省自然科学基金和中山大学的资助与支持. 如果没有以上各方面的支持与帮助，本书是难以面世的. 科学出版社的吕虹、刘嘉善、毕颖等同志为本书的出版付出了辛勤的劳动，在此谨向他们表示衷心的感谢.

大连理工大学　王仁宏
合肥工业大学　朱功勤
2002 年 12 月 18 日

目 录

第一章　有理逼近中的连分式方法

连分式是一个古老的数学分支,随着科学技术的迅速发展,它的应用范围不断扩大,特别是以连分式为工具的数值逼近方法已引起人们的关注.连分式由数量形式推广到向量形式及矩阵形式的研究出现了大量的结果,为研究各种形式的有理逼近提供了有效的工具.有关连分式理论及其应用已有许多专著(参见文献[152]).本书不打算介绍连分式理论及其应用的各个方面,而只介绍与有理插值逼近的有关结果,例如连分式向后三项递推算法及其应用,向量连分式与矩阵连分式以及连分式的加速收敛等.为了便于阅读,在本章的开头扼要介绍连分式的基本概念及有关性质.

§1　基本概念及有关性质

连分式的一般形式为

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\ddots}}},\tag{1.1}$$

其中 a_i,b_i 称为连分式的元素,或部分分子和部分分母,通常为实数、复数或函数. a_i/b_i 称为连分式(1.1)的第 i 节.为了书写方便,常将式(1.1)写成紧凑形式:

$$b_0+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\cdots,\tag{1.2}$$

或

$$b_0+\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\frac{a_3|}{|b_3}+\cdots=b_0+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i|}{|b_i},\tag{1.3}$$

或

$$b_0+K(a_i/b_i).\tag{1.4}$$

称

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \tag{1.5}$$

为连分式(1.1)的第 n 阶渐近分式,记为 c_n,即

$$c_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}. \tag{1.6}$$

显然渐近分式序列为

$$c_0 = b_0, \quad c_1 = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1},$$

$$c_2 = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{b_0(b_1 b_2 + a_2) + a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2}, \tag{1.7}$$

$$\cdots\cdots$$

$$c_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_n(b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n)}{Q_n(b_1, b_2, a_2, \cdots, a_n, b_n)}.$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ 存在,则称连分式(1.1)是收敛的,c 称为连分式(1.1)的值;否则连分式(1.1)称为发散的.

一、基本性质

首先给出式(1.7)中 P_n, Q_n 的递推关系.

定理 1.1　设 $P_{-1}=1, P_0=b_0, Q_{-1}=0, Q_0=1$,则对 $n\geqslant 1$ 有

$$\begin{cases} P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \\ Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}. \end{cases} \tag{1.8}$$

证明　用数学归纳法证明.

显然

$$c_1 = P_1/Q_1 = \frac{b_0 b_1 + a_1 \cdot 1}{b_1 + a_1 \cdot 0},$$

假设 $n=k$ 时式(1.8)成立,即

$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2}}{b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2}}.$$

注意到 $c_{k+1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \cdots + \frac{a_k}{b_k} + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$,从$\frac{P_k}{Q_k}$变到$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$应以 $b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$代替 b_k,所

以

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{\left(b_k + \dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)P_{k-1} + a_k P_{k-2}}{\left(b_k + \dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)Q_{k-1} + a_k Q_{k-2}}$$

$$= \frac{b_{k+1}(b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2}) + a_{k+1} P_{k-1}}{b_{k+1}(b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2}) + a_{k+1} Q_{k-1}}$$

$$= \frac{b_{k+1} P_k + a_{k+1} P_{k-1}}{b_{k+1} Q_k + a_{k+1} Q_{k-1}}.$$

故 $n = k+1$ 时式(1.8)也成立,由归纳法原理知,定理结论成立. □

若 $Q_n Q_{n-1} \neq 0$,则由归纳法可以证明

$$c_n - c_{n-1} = (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{Q_n Q_{n-1}}. \tag{1.9}$$

定理 1.2 设对 $1 \leqslant i \leqslant n$ 时,$Q_i \neq 0$,则

$$c_n = b_0 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{a_1 \cdots a_i}{Q_{i-1} Q_i}. \tag{1.10}$$

证明 由式(1.9)有

$$\frac{P_n}{Q_n} = \left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right) + \left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}\right) + \cdots + \left(\frac{P_1}{Q_1} - \frac{P_0}{Q_0}\right) + \frac{P_0}{Q_0}$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{a_1 \cdots a_n}{Q_n Q_{n-1}} + (-1)^n \frac{a_1 \cdots a_{n-1}}{Q_{n-1} Q_{n-2}} + \cdots + \frac{a_1}{Q_1 Q_0} + b_0. \quad \square$$

显然式(1.10)为级数

$$b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{a_1 \cdots a_i}{Q_{i-1} Q_i} \tag{1.11}$$

的前 $n+1$ 项的部分和,称式(1.11)为 Euler-Minding 级数. 这样建立了级数与连分式之间的联系,即级数(1.11)的前 $n+1$ 项部分和等于连分式(1.1)的第 n 阶渐近分式. 因此可把对级数的一些已知结果应用到连分式的理论上去.

下面介绍连分式的等价变换. 令 $P_i \neq 0 (i \geqslant 0)$,将连分式(1.1)写成

$$b_0 + \frac{P_1 a_1|}{|P_1 b_1} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{P_{i-1} P_i a_i|}{|P_i b_i}. \tag{1.12}$$

容易验证,式(1.1)与(1.12)有相同的渐近分式. 故称式(1.12)为式(1.1)的等价连分式,将式(1.1)变为式(1.12)的变换称为等价变换. 这样,利用等价变换一个连分

式可以重新写成规定的形式.例如连分式(1.1),当 $a_i \neq 0(i \geqslant 1)$时,取$P_1=\frac{1}{a_1}$,$P_i=\frac{1}{a_iP_{i-1}}(i \geqslant 2)$,则可以写成

$$d_0+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1|}{|d_i}. \tag{1.13}$$

如果令 $e_1=\frac{a_1}{b_1}$,$e_n=\frac{a_n}{b_{n-1}b_n}(n \geqslant 2)$,则连分式(1.1)便可写成

$$b_0+\frac{e_1|}{|1}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{e_i|}{|1}. \tag{1.14}$$

在[152]中证明了等价连分式的特征定理.

定理 1.3　连分式 $K(a/b)$和 $K(a^*/b^*)$是等价的,当且仅当存在一个非零常数序列$\{r_i\}$使得

$$\begin{aligned} a_i^* &= r_ir_{i-1}a_i, \\ b_i^* &= r_ib_i, \end{aligned} \qquad i=1,2,\cdots.$$

再来看一下连分式的收缩与扩张问题.在实际问题中经常会遇到这样的问题:假设给定一个互不相同的序列$\{c_n\}$,要求构造一个连分式,使得 c_n 为该连分式的第 n 阶渐近分式.

定理 1.4　设 $c_n \neq c_{n-1}(n \geqslant 1)$,令 $b_0=c_0$,$a_1=c_1-c_0$,$b_1=1$,$a_i=(c_{i-1}-c_i)/(c_{i-1}-c_{i-2})$,$b_i=(c_i-c_{i-2})/(c_{i-1}-c_{i-2})$,$i \geqslant 2$.则连分式 $b_0+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i|}{|b_i}$ 的渐近分式为序列$\{c_n\}$的元素.

利用连分式的等价变换,对 $n \geqslant 2$,由定理 1.4 中 a_i,b_i 的表示式,连分式可以写为

$$c_0+\frac{c_1-c_0|}{|1}+\frac{c_1-c_2|}{|c_2-c_0}+\sum_{i=3}^{\infty}\frac{(c_{i-2}-c_{i-3})(c_{i-1}-c_i)|}{|c_i-c_{i-2}}. \tag{1.15}$$

设有两个连分式 $b_0+K(a_n/b_n)$和 $b_0^*+K(a_n^*/b_n^*)$,如果 $b_0+K(a_n^*/b_n^*)$的渐近分式序列$\{P_n^*/Q_n^*\}$为 $b_0+K(a_n/b_n)$的渐近分式序列$\{P_n/Q_n\}$的子序列,则称连分式 $b_0^*+K(a_n^*/b_n^*)$为 $b_0+K(a_n/b_n)$的收缩(压缩),或称 $b_0+K(a_n/b_n)$为

$b_0^* + K(a_n^*/b_n^*)$的扩张.

考虑渐近分式序列$\{c_n\}$的连分式,所谓连分式的偶收缩部分是渐近分式序列为$\{c_{2n}\}$的一个连分式,奇收缩部分是渐近分式序列为$\{c_{2n+1}\}$的一个连分式. 显然我们可以利用定理 1.4 构造一个连分式的奇、偶收缩部分.

事实上,设$b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i|}{|b_i}$,其渐近分式序列$\{P_n/Q_n\}$,它的偶收缩部分为$b_0^* + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_n^*|}{|b_n^*}$,其渐近分式序列为$\{c_n^*\}$,由定义知$c_n^* = P_{2n}/Q_{2n}$. 于是

$$b_0^* = c_0^* = P_0/Q_0, b_1^* = 1, a_1^* = c_1^* - c_0^* = P_2/Q_2 - P_0/Q_0.$$

当 $i \geqslant 2$ 时

$$a_i^* = \frac{c_{i-1}^* - c_i^*}{c_{i-1}^* - c_{i-2}^*} = \left[\frac{P_{2(i-1)}}{Q_{2(i-1)}} - \frac{P_{2i}}{Q_{2i}}\right] \Big/ \left[\frac{P_{2(i-1)}}{Q_{2(i-1)}} - \frac{P_{2(i-2)}}{Q_{2(i-2)}}\right],$$

$$b_i^* = \frac{c_i^* - c_{i-2}^*}{c_{i-1}^* - c_{i-2}^*} = \left[\frac{P_{2i}}{Q_{2i}} - \frac{P_{2(i-2)}}{Q_{2(i-2)}}\right] \Big/ \left[\frac{P_{2(i-1)}}{Q_{2(i-1)}} - \frac{P_{2(i-2)}}{Q_{2(i-2)}}\right].$$

故得偶收缩部分连分式为

$$\frac{P_0}{Q_0} + \frac{(P_2/Q_2 - P_0/Q_0)|}{|1} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i^*|}{|b_i^*}.$$

再利用连分式的等价变换及类似于式(1.9)的等式,便可得到偶收缩部分连分式为

$$b_0 + \frac{a_1 b_2|}{|b_1 b_2 + a_2} - \frac{a_2 a_3 b_4|}{|(b_2 b_3 + a_3) b_4 + b_2 a_4} + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{-a_{2i-2} a_{2i-1} b_{2i-4} b_{2i}|}{|b_{2i}(b_{2i-2} b_{2i-1} + a_{2i-1}) + b_{2i-2} a_{2i}}, \tag{1.16}$$

以同样的方法,可得奇收缩部分连分式为

$$\frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2 b_3 / b_1|}{|(b_1 b_2 + a_2) b_3 + b_1 a_3} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{-a_{2i} a_{2i-1} b_{2i-3} b_{2i+1}|}{|(b_{2i} b_{2i+1} + a_{2i+1}) b_{2i-1} + a_{2i} b_{2i+1}}. \tag{1.17}$$

二、构造连分式的方法

由于连分式有很好的递推算法,对于给定的数或函数构造连分式是很有意义的. 而构造方法也有很多,这里仅介绍几个较典型的方法,即逐次代换法、等价变换法和 Viscovatov 方法等.

设 f 为给定的一个数或函数. 记 $T_0=f$,按下列格式计算 $T_1,T_2,\cdots,T_{n+1}$:

$$T_0 = b_0 + T_1,$$

$$T_1 = \frac{a_1}{b_1 + T_2},$$

$$T_i = \frac{a_i}{b_i + T_{i+1}}, \quad 2 \leqslant i \leqslant n,$$

其中 b_0,a_i,b_i 为自由选取的数或函数. 由此方式便得

$$f = T_0 = b_0 + T_1 = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + T_2} = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + T_3}} = \cdots$$

$$= b_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i \rfloor}{\lceil b_i} + \frac{a_n \rfloor}{\lceil b_n + T_{n+1}}.$$

继续上面的逐次代换法,便得到形如式(1.1)的连分式

$$f = b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \rfloor}{\lceil b_i}.$$

如果级数 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} d_i$ 的部分和 $D_n = \sum\limits_{i=0}^{n} d_i$ 与连分式 $b_0 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \rfloor}{\lceil b_i}$ 的第 n 阶渐近分式 $c_n = b_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i \rfloor}{\lceil b_i}$ 相等, 称级数与连分式等价. 而连式(1.1)与 Euler-Minding 级数是等价的,由式(1.15)及 $c_n = \sum\limits_{i=0}^{n} d_i$ 可把一个给定的幂级数变成一个等价连分式

$$d_0 + \frac{d_1 \rfloor}{\lceil 1} + \frac{-d_2 \rfloor}{\lceil d_1 + d_2} + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{-d_{i-2}d_i \rfloor}{\lceil d_{i-1} + d_i}. \tag{1.18}$$

而 Viscovatov 方法可把两个幂级数的商展开成一个连分式. 显然,若 $f(x)$是一个有理分式函数,用这种方法可以展开为连分式. 下面介绍这种方法.

设

$$f(x) = \frac{d_{10} + d_{11}x + d_{12}x^2 + \cdots}{d_{00} + d_{01}x + d_{02}x^2 + \cdots}. \tag{1.19}$$

则

$$f(x) = \frac{1}{\dfrac{d_{00}}{d_{10}} + \dfrac{d_{00} + d_{01}x + d_{02}x^2 + \cdots}{d_{10} + d_{11}x + d_{12}x^2 + \cdots} - \dfrac{d_{00}}{d_{10}}}$$

$$= \frac{d_{10}}{d_{00} + x\dfrac{(d_{10}d_{01} - d_{00}d_{11}) + x(d_{10}d_{02} - d_{00}d_{12})x + \cdots}{d_{10} + d_{11}x + d_{12}x^2 + \cdots}}.$$

令 $d_{2i} = d_{10}d_{0i+1} - d_{00}d_{1i+1}(i \geqslant 0)$,上式便可写成

$$f(x) = \frac{d_{10}}{d_{00} + x\dfrac{d_{20} + d_{21}x + d_{22}x^2 + \cdots}{d_{10} + d_{11}x + d_{12}x^2 + \cdots}}.$$

继续重复上面过程,并令

$$d_{k,i} = d_{k-1,0}d_{k-2,i+1} - d_{k-2,0}d_{k-1,i+1} \quad (k \geqslant 2, i \geqslant 0), \tag{1.20}$$

最后得

$$f(x) = \frac{d_{10}|}{|d_{00}} + \frac{d_{20}x|}{|d_{10}} + \frac{d_{30}x|}{|d_{20}} + \cdots. \tag{1.21}$$

把上面的系数排成下表,按式(1.20)计算是很方便的.

$$\begin{array}{ccccc}
d_{00} & d_{01} & d_{02} & d_{03} & \cdots \\
d_{10} & d_{11} & d_{12} & d_{13} & \cdots \\
d_{20} & d_{21} & d_{22} & d_{23} & \cdots \\
d_{30} & d_{31} & d_{32} & d_{33} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

第三行元素按表中所示方法求出,第四行元素由第二行与第三行元素求出(类似求第三行元素方法),余类推.

若 $d_{20} = 0$,则

$$f(x) = \frac{d_{10}}{d_{00} + x^2\dfrac{d_{21} + d_{22}x + \cdots}{d_{10} + d_{11}x + d_{12}x^2 + \cdots}}.$$

像前面的方法一样展开分式

$$\frac{d_{21} + d_{22}x + \cdots}{d_{10} + d_{11}x + d_{12}x^2 + \cdots},$$

便导出恒等式

$$f(x)=\frac{d_{10}|}{|d_{00}}+\frac{d_{21}x^2|}{|d_{10}}+\frac{d_{31}^1x|}{|d_{21}}+\frac{d_{41}^1x|}{|d_{31}^1}+\cdots, \tag{1.22}$$

其系数可按下列格式计算：

$$\begin{array}{llllllll}
d_{00} & d_{01} & d_{02} & \cdots & & & \\
d_{10} & d_{11} & d_{12} & \cdots & & & \\
0 & d_{21} & d_{22} & \cdots & & & \\
d_{21} & d_{22} & d_{23} & \cdots & d_{31}^1 & = & d_{21}d_{11}-d_{10}d_{22}, \\
d_{31}^1 & d_{32}^1 & d_{33}^1 & \cdots & d_{32}^1 & = & d_{21}d_{12}-d_{10}d_{23} \\
 & & & & & \vdots & \\
d_{41}^1 & d_{42}^1 & d_{43}^1 & \cdots & d_{41}^1 & = & d_{31}^1d_{22}-d_{32}^1d_{21} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

一般地，如果 $d_{k,0}=0$ 也可采用上面方法处理.

例 1　将有理分式函数 $f(x)=\dfrac{1-3x^3}{1-x^2-4x^4}\left(x^2<\dfrac{\sqrt{17}-1}{8}\right)$展开成连分式.

解　将有理分式函数系数排成二行

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & -1 & 0 & -4 \\
1 & 0 & 0 & -3 & 0
\end{array}$$

$$d_{20}=1\cdot0-1\cdot0=0, d_{21}=1\cdot(-1)-1\cdot0=-1, d_{22}=1\cdot0-1\cdot(-3)=3,$$

$$d_{23}=1\cdot(-4)-1\cdot0=-4.$$

此时第三行元素为 $0,-1,3,-4,0$，然后将第三行元素左移一个位置便得到第四行，即得数表为：

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & -1 & 0 & -4 \\
1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\
0 & -1 & 3 & -4 & 0 \\
-1 & 3 & -4 & 0 & 0
\end{array}$$

然后由第三行、第四行元素按求第三行元素方法，便可求得第五行元素为：$-3,4,3,0,0$. 再由第四行与第五行元素按上面方法可求出第六行元素为：$-5,15,0,0,0$.

类似地可求出第七行元素为:25,-15,0,0,0.第八行元素为:300,0,0,0,0,最后一行元素为-4500.

将这些系数代入式(1.22)得

$$f(x)=\frac{1|}{|1}+\frac{-x^2|}{|1}+\frac{-3x|}{|-1}+\frac{-5x|}{|-3}+\frac{25x|}{|-5}+\frac{300x|}{|25}+\frac{-4500x|}{|300}$$

$$=\frac{1|}{|1}-\frac{x^2|}{|1}+\frac{3x|}{|1}-\frac{5x|}{|3}-\frac{5x|}{|1}+\frac{12x|}{|5}-\frac{3x|}{|1}.$$

三、连分式的收敛性

上面介绍了数或函数展开为连分式,都是从代数角度出发形式上导出的,并没有涉及展开式的收敛性.由于连分式的收敛性是比较复杂的理论问题,但有关连分式的收敛性成果是十分丰富的,限于篇幅我们不可能作详细介绍,只能简要地叙述一些古典收敛准则.

定理 1.5 若 $i\geqslant 1$ 时,$b_i>0$,则连分式 $b_0+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1|}{|b_i}$ 收敛充分必要条件是级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_i$ 发散.

定理 1.6 若 $|b_i|\geqslant|a_i|+1(i\geqslant 1)$,则连分式 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{a_i|}{|b_i}$ 收敛,且对第 n 阶渐近分式 c_n 而言,当 $n\geqslant 1$ 时有 $|c_n|<1$.

定理 1.7 设对所有 $i=0,1,\cdots,a_i,b_i$ 大于零,且 $b_i\geqslant a_i$,则连分式 $b_0+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{a_i|}{|b_i}$ 收敛.

定理 1.8 若 $|a_i|\leqslant\frac{1}{4}(i\geqslant 2)$ 时,则连分式 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{a_i|}{|1}$ 收敛.

定理 1.9 如果连分式 $b_0+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{a_iz|}{|1}$ 对任何非零 z 值收敛,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_2a_4\cdots a_{2n}}{a_1a_3\cdots a_{2n-1}}\right| \text{或} \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_1a_3\cdots a_{2n-1}}{a_2a_4\cdots a_{2n}}\right|$$

必发散.

有关这些定理的证明请参阅文献[152].

§2　极限循环连分式的加速收敛

连分式的加速收敛也是一个古老的课题，但早期的研究仅局限于某个特殊的连分式.随着科学技术的发展，特别是数值逼近方法在工程技术中的广泛应用，自上个世纪 80 年代以来，人们对连分式的加速收敛研究产生了浓厚的兴趣，得到了一些好的结果.本节针对一类重要的极限循环连分式介绍加速收敛的方法.

对于连分式

$$K(a_n/b_n) = \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty}(a_n/b_n) = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} + \cdots, \tag{2.1}$$

它的第 n 阶渐近序列为

$$f_n = S_n(0) = \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n}(a_i/b_i) = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}. \tag{2.2}$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f(x)$ 存在，则称连分式(2.1)收敛，记作 $f = K(a_n/b_n)$，它的余项序列为

$$f^{(n)} = \mathop{\mathrm{K}}_{i=n+1}^{\infty}(a_i/b_i), \quad f^{(0)} = f. \tag{2.3}$$

显然有

$$f^{(n)} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1} + f^{(n+1)}}, \quad n = 0,1,2,\cdots. \tag{2.4}$$

将渐近分式序列(2.2)写成便于计算的分式形式

$$f_n = P_n/Q_n = S_n(0),$$

其中 P_n, Q_n 满足式(1.8).

连分式

$$K(a_n/1) = \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty}(a_n/1) = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \cdots + \frac{a_n}{1} + \cdots \tag{2.5}$$

称为极限循环的，当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 存在，如果 $a \notin (-\infty, -\frac{1}{4}]$，则连分式(2.5)收敛，且 $\mathop{\mathrm{K}}\limits_{n=1}^{\infty}(a_1/1) = x_1$，而 $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4a}}{2}$.

一、选取加速收敛因子方法

在极限循环连分式(2.5)收敛的条件下，为了加速收敛，引入因子 ω_n，并将它

的渐近分式序列改写为

$$S_n(\omega_n) = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \cdots + \frac{a_n}{1+\omega_n}. \tag{2.6}$$

如果选取的 ω_n 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega_n) - f}{S_n(0) - f} = 0 \quad (f \neq \infty), \tag{2.7}$$

则说 $S_n(\omega)$收敛于 f 的速度比 $S_n(0)$收敛于 f 的速度快,并称 ω_n 为加速收敛因子.

L. Jacobsen 在文献[153]中证明了.

定理 1.10 设 $K(a_n/1)\to f$(有限), $a_n\to 0$, 取 $\omega_n = \sqrt{a_{n+1}+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$, $\mathrm{Re}\sqrt{a_{n+1}+\frac{1}{4}} \geqslant 0$,则

(i) $\left|\dfrac{S_n(\omega_n)-f}{f_n - f}\right| \to 0 \quad (n\to\infty)$;

(ii) $\left|\dfrac{S_n(\omega_n)-f}{f_{n+1} - f}\right| \to 0, \Leftrightarrow \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \to 1$;

(iii) $\left|\dfrac{S_n(\omega_n)-f}{f_{n+2} - f}\right| \to 0 \quad \Leftrightarrow \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)/a_n \to 0$;

(iv) $\left|\dfrac{S_n(\omega_n)-f}{f_{n+3} - f}\right| \to 0 \quad \Leftrightarrow \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)/a_n^2 \to 0$.

为了加速极限循环连分式的收敛,可以选取各种各样的加速收敛因子,自然要问,加速收敛因子是否具有某种特征? 下面给出加速收敛因子的特征定理.

定理 1.11[190] 设极限循环连分式为 $K(a_n/1)$, $a_n \to a\ (n\to\infty)$, $a \notin (-\infty, -\frac{1}{4}]\setminus\{0\}$,则

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n(\omega_n)-f}{f_n - f} = 0 \Leftrightarrow \exists\,\{\omega_n\}$ 满足 $\omega_n \to x_1\ (n\to\infty)$, 其中 $x_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{1+4a}}{2}$.

由定理 1.11 可知,只要选取的加速收敛因子 ω_n 满足 $\omega_n \to x_1$,就能使极限循环连分式得到加速.

定理 1.12[154] 令 $K(a_n/1)$满足 $a_n \to a$, $\left|\arg\left(a+\frac{1}{4}\right)\right| < \pi$,则 $\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n \to t \in c$, 当且仅当 $\delta_{n+1}/\delta_n \to t \in c$,其中 $\varepsilon_n = f^{(n)} - x_1$, $\delta_n = a_n - a$.