jxjh

jiexijihe
jietifa

解析几何
解题法

张泰安

武汉大学出版社

解析几何解题法

武汉大学出版社

内容简介

本书精选了355个典型例题，采取题组的形式编写的。

本书的特点是以解题方法贯穿整个内容，引导读者夯实基础知识，提高运算技能，掌握解题的规律和方法，提高分析问题和解决问题的能力。全书的内容包括：曲线方程；轨迹；解析法证题；解析计算；极值问题；综合题六个部分，并对解题思路和解题方法进行了总结阐明。

解析几何解题法

张泰安　编

责任编辑　陈礼琀

*

武汉大学出版社出版发行

（武昌　珞珈山）

孝感报社印刷厂印刷

*

787×1092毫米　1/32　12.875印张　285千字

1986年10月第1版　1986年10月第1次印刷

印数：1—5,000

统一书号：7279·83　定价：2.15元

前　言

为了帮助高中学生、青年工人和知识青年深入理解和掌握平面解析几何的基础知识，提高分析问题和解题能力，开拓思路，发展智力，参照现行普通中学教材，编写成这本《解析几何解题法》，可供高中学生平时学习和复习参考使用，也可供青年工人和知识青年学习和提高之用。

本书是以解析几何的主要内容，按解题方法进行编写的．用范例配备问题构成题组的形式．每一题组中的题目内容虽不同，但解题思路与方法都是相同的，以期达到读后能巩固基础知识，提高基本技能，开拓解题思路，掌握解题方法的效果．少数题组则是按知识特征编排的，以利于归纳与提高．

由于水平有限，本书必有不少缺点和错误，敬请读者批评指正。

在本书的编写中，熊大寅副教授提出了不少宝贵意见，并进行了认真审阅，特此表示衷心感谢。

编　者　　1984.10

目　　录

一、曲 线 方 程

根据已知条件求出表示平面曲线的方程是平面解析几何研究的主要问题之一．下面介绍几种常用的求曲线方程的方法。

（一）待定系数法

如果题中所求的曲线已指明是某种曲线时，可根据题中条件设所求曲线方程，然后求出有关的数，代入所设曲线的方程中，从而得到所求的曲线方程，这种方法叫做待定系数法。

〔**范例 1**〕 求过抛物线$y=-3x^2+18x-23$的顶点，且和直线$y=2x-5$相交成45°的角的直线方程．

分析　根据题意，可求出所求直线上的一点及斜率，因此设直线方程的点斜式可建立其方程．

解　设所求直线方程为　$y-b=k(x-a)$．

抛物线$y=-3x^2+18x-23$即$y=-3(x-3)^2+4$的顶点为（3，4）。

又　$$\frac{|2-k|}{1+2k}=\mathrm{tg}45°,$$

$\therefore\quad k_1=\frac{1}{3},\quad k_2=-3.$

故所求的直线方程为

$$y-4=\frac{1}{3}(x-3)\ \text{和}\ y-4=-3(x-3)$$

即 $\qquad x-3y+9=0\qquad$ 和 $3x+y-13=0$。

说明　由于所求直线可以看做交角45°的始边，也可以看做交角的终边，所以本例应有两解。若本例指明所求直线到直线$y=2x-5$成45°的交角，即把所求直线作为交角的始边，则只有一解$x-3y+9=0$。反之，亦然。

（问题1）　已知直角三角形ABC的斜边AB所在直线的方程为　$y=3x-5$，直角边AC所在直线的方程为$x+y-3=0$，B点的横坐标为4，求斜边上的高CD所在直线的方程。

略解　设点$C(a,\ b)$和所求直线CD的方程为

$$y-b=k(x-a).$$

因B点在已知直线AB上，且其横坐标为4，故可求出B点坐标为(4，7)。

由已知直角边AC和点B(4，7)可求出另一直角边BC的方程为$x-y+3=0$，于是可求出AC、BC交点C(0，3)。

因$CD\perp AB$，可求出CD的斜率$k=-\frac{1}{3}$。

所求直线方程CD为　$y-3=-\frac{1}{3}(x-0)$

即 $\qquad x+3y-9=0$。

（问题2） 平行四边形的两邻边在$y=|x-3|$的图象上，其对角线交于点$M(5, 4)$，求它的另外两边所在的直线方程。

分析 根据题设可写出平行四边形两已知邻边的方程为$y=x-3\ (x\geqslant 3)$和$y=-x+3\ (x<3)$，并求出一顶点的坐标为（3，0）。

由平行四边形对边平行可求出所求直线的斜率，又由平行四边形的对角线互相平分及点（3，0）和$M(5, 4)$，可求出相对顶点的坐标，所求直线通过此定点。

于是由点斜式可求出直线方程为$x-y+1=0$和$x+y-15=0$。

〔**范例**2〕 已知三角形ABC的顶点A（－7，1），角B的平分线BD：$x-y=0$，AB上的高CE：$5x+y-8=0$，求此三角形三边所在的直线方程。

分析 如图1-1，已知点A（-7，1）和已知直线CE⊥AB，用点斜式可建立AB边的方程。

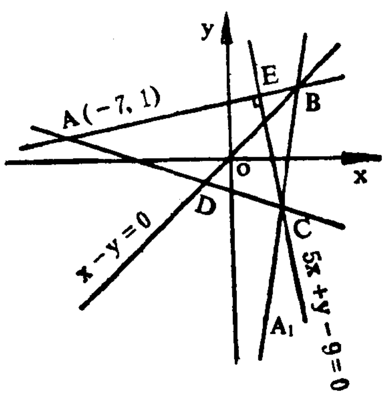

图 1—1

由AB、BD可求出交点B的坐标．因BD是角B的平分线，故A点关于直线BD的对称点A_1必在直线BC上，用直线方程的两点式可建立BC的方程。

求出CB和CE的交点C，用两点式可建立AC的方程。

解 设AB：$y-1=k(x+7)$。

$\because$ AB⊥CE， $\therefore$ $k=\dfrac{1}{5}$，

得直线AB的方程为

$$y-1=\frac{1}{5}(x+7) \quad 即 \quad x-5y+12=0$$

解方程组 $\begin{cases} x-5y+12=0; \\ x-y=0, \end{cases}$

得交点B(3，3)。

以BD为对称轴A点的对称点A_1的坐标为(1，-7)，由直线方程的两点式得

$$BC: \frac{y+7}{3+7}=\frac{x-1}{3-1} \quad 即 \quad 5x-y-12=0.$$

解方程组 $\begin{cases} 5x-y-12=0; \\ 5x+y-8=0, \end{cases}$

得交点C(2，-2)，由直线方程的两点式得

$$AC: \frac{y+2}{1+2}=\frac{x-2}{-7-2} \quad 即 \quad x+3y+4=0.$$

说明 (1)点A(-7，1)关于以l：$x-y=0$为对称轴的对称点A_1(x，y)的求法：根据AA_1与l垂直且AA_1的中点在l上，列出方程组

$$\begin{cases} \dfrac{y-1}{x+7}\times 1=-1; \\ \dfrac{x-7}{2}-\dfrac{y+1}{2}=0, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=1; \\ y=-7. \end{cases}$

（2） BC边所在直线的方程也可用点斜式建立。

$\because\quad k_{AB}=\dfrac{1}{5}$，$k_{BD}=1$，且BD平分∠ABC，

$$\therefore\qquad \frac{1-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}}=\frac{k_{BC}-1}{1+k_{BC}},$$

解得 $k_{BC}=5$。

故BC的方程为$y-3=5(x-3)$

即 $$5x-y-12=0.$$

（问题3） 已知三角形ABC的一个顶点$A(2,-4)$及$\angle B$、$\angle C$的平分线l_1：$x+y-2=0$，l_2：$x-3y-6=0$，求这个三角形三边所在的直线方程。

分析 因为内角平分线是该角的两条边的对称轴。找出以l_1为对称轴A点的对称点$A_1(6,0)$和以l_2为对称轴A点的对称点$A_2\left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$，则直线$A_1A_2$的方程就是$BC$边所在的直线方程。用直线方程的两点式即可求得各边的方程，AB：$7x+y-10=0$，BC：$x+7y-6=0$，AC：$x-y-6=0$。

（问题4） 已知三角形ABC的顶点A的坐标为

（1,3），AB、AC边上的中线方程分别为$x-2y+1=0$和$y-1=0$，求各边的方程。

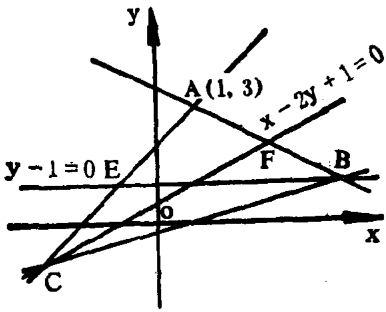

图 1—2

略解 如图1-2，设$B(x_1, 1)$、$C(x_2, y_2)$，AB的中点$F(x_3, y_3)$，AC的中点$E(x_4, 1)$且AB：

$$\frac{y-3}{y_3-3}=\frac{x-1}{x_3-1}.$$

$$\because\quad y_3=\frac{1}{2}(3+1)=2,$$

$$x_3-2\times2+1=0,$$

$$\therefore\quad x_3=3,$$

故AB：$\dfrac{y-3}{2-3}=\dfrac{x-1}{3-1}$ 即

$$x+2y-7=0.$$

同理可求，AC：$x-y+2=0$，BC：$x-4y-1=0$。

〔**范例3**〕 三角形的顶点是$A(3, 2)$、$B(6, 6)$、$C(-5, 8)$，求$\triangle ABC$的$\angle A$的平分线方程。

解一 设$D(x_1, y_1)$，$\angle A$平分线为AD：

$$\frac{y-2}{y_1-2}=\frac{x-3}{x_1-3}$$，如图1-3。

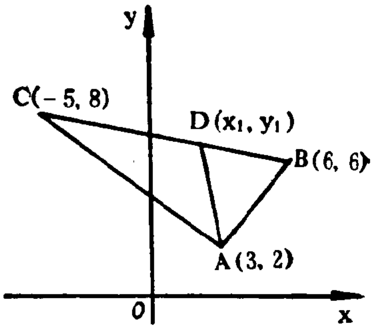

图 1—3

$$\because |AB|=\sqrt{(6-3)^2+(6-2)^2}=5,$$

$$|AC|=\sqrt{(-5-3)^2+(8-2)^2}=10.$$

由三角形内角平分线的性质得

$$\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{|CD|}{|DB|}=\frac{10}{5}=2,$$

$$\therefore \frac{CD}{DB}=2.$$

由定比分点坐标公式，得

$$x_1=\frac{-5+2\times 6}{1+2}=\frac{7}{3},$$

$$y_1=\frac{8+2\times 6}{1+2}=\frac{20}{3}.$$

所求直线AD：

$$\frac{y-2}{\frac{20}{3}-2}=\frac{x-3}{\frac{7}{3}-3}$$

即 $$7x+y-23=0.$$

解二　设AD：$y-2=k(x-3)$，

$\because$ $$k_{AB}=\frac{6-2}{6-3}=\frac{4}{3},$$

$$k_{AC}=\frac{8-2}{-5-3}=-\frac{3}{4},$$

且AD平分$\angle BAC$，

$\therefore$ $$\frac{k-k_{AB}}{1+k\cdot k_{AB}}=\frac{k_{AC}-k}{1+k_{AC}\cdot k}$$

即 $$\frac{k-\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}k}=\frac{-\frac{3}{4}-k}{1-\frac{3}{4}k},$$

解得 $$k=-7 \quad 或 \quad k=\frac{1}{7}.$$

由图1-3知$k=\frac{1}{7}$是外角平分线的斜率，不合题意。得AD所在直线的方程为

$y-2=-7(x-3)$　即　$7x+y-23=0$.

解三　直线AB、AC的方程分别为

$$y-2=\frac{4}{3}(x-3) 和 y-2=-\frac{3}{4}(x-3)$$

即 $4x-3y-6=0$ 和 $3x+4y-17=0$。

设$P(x, y)$为角平分线AD上任一点。则P到AB、AC的距离相等，故有

$$\frac{|4x-3y-6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|3x+4y-17|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$4x-3y-6=\pm(3x+4y-17)$$

即 $x-7y+11=0$ 和 $7x+y-23=0$。

由图1-3知$x-7y+11=0$是外角平分线方程。

故内角平分线AD的方程为$7x+y-23=0$。

说明 （1） 图与式结合起来，能使思路清晰，解法简捷。本例的三种解法就是根据图形的几何性质导出的。

（2） 本例的解二和解三必须根据几何直观确定内、外角平分线。

（问题5） 抛物线$y^2=4x$中有一内接三角形，它的一个顶点是抛物线的顶点，它的垂心是抛物线的焦点，求此三角形三边所在直线的方程。

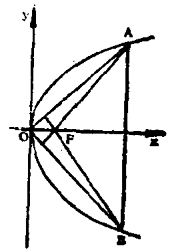

图 1—4

分析 根据题意，点A、B在抛物线$y^2=4x$上，且$AF\perp OB$，$BF\perp OA$，可求出点A、B的坐标，于是可由两点式求直线方程。

解 设三角形ABO的顶点为$A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$、$B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$，如图1-4。

抛物线$y^2=4x$的顶点O为原点，焦点$F(1, 0)$。

由三角形垂心的性质知

$AF\perp OB$，$BF\perp OA$，

$$\therefore \quad \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4}-1}\cdot\frac{y_2}{\frac{y_2^2}{4}}=\frac{y_2}{\frac{y_2^2}{4}-1}\cdot\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4}}=-1,$$

解得　　$y_1=2\sqrt{5}$，$y_2=-2\sqrt{5}$，

故$A(5，2\sqrt{5})$、$B(5，-2\sqrt{5})$.

$\therefore$ OA：$2x-\sqrt{5}y=0$，OB：$2x+\sqrt{5}y=0$，AB：$x=5$。

（问题6）　已知圆c'：$x^2+y^2+4x-10y+20=0$和一个以$O(0，0)$、$A(2，1)$、$B(6，8)$、$C(4，7)$为顶点的平行四边形$OABC$，直线l同时将圆和平行四边形的面积二等分，求l的方程。

分析　因为平分圆的面积的直线必过圆心，平分平行四边形面积的直线必过其中心，所以直线l为过圆心$(-2,5)$和平行四边形的中心$(3，4)$的一条直线，其方程为

$$x+5y-23=0.$$

［**范例4**］　已知圆$x^2+y^2=r^2$和直线l：$ax-by+c=0$，求与直线l垂直，且使圆内部分的长为m的直线方程。

分析　因所求的直线与直线l垂直，故可设其方程为$bx+ay+c'=0$.再根据此直线在"圆内部分的长为m"来确定待定系数c'，则其方程可定。

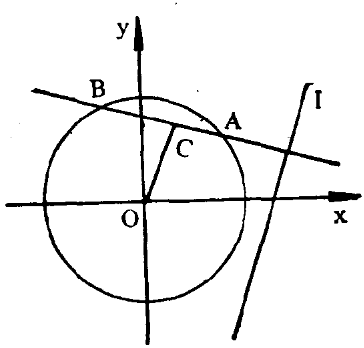

图　1—5

解一　设所求直线的方程为　$bx+ay+c'=0$（其中c'为待定系数）。

如图1-5，作$OC\perp AB$，由垂径定理知

$$|AC|=|BC|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}m.$$

由点到直线的距离公式得

$$|OC|=\frac{|b\times 0+a\times 0+c'|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{|c'|}{\sqrt{b^2+a^2}},$$

又 $\quad OC^2+AC^2=OA^2$

即 $$\frac{c'^2}{a^2+b^2}+\frac{m^2}{4}=r^2,$$

$$\therefore \quad c'=\pm\frac{\sqrt{(4r^2-m^2)(a^2+b^2)}}{2}.$$

故所求的直线方程为

$$bx+ay\pm\frac{\sqrt{(4r^2-m^2)(a^2+b^2)}}{2}=0.$$

解二 设所求直线与圆交于$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$两点，所求直线的方程为$bx+ay+c'=0$ 即

$$y=-\frac{b}{a}x-\frac{c'}{a},$$

代入$x^2+y^2=r^2$中，化简得

$$(a^2+b^2)x^2+2bc'x+(c'^2-a^2r^2)=0.$$

得 $$x_1+x_2=-\frac{2bc'}{a^2+a^2}, \qquad x_1x_2=\frac{c'^2-a^2r^2}{a^2+b^2}.$$

因直线$bx+ay+c'=0$在圆内的部分为m，故

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=m^2,$$

而$$y_1-y_2=-\frac{b}{a}x_1-\frac{c'}{a}-\left(-\frac{b}{a}x_2-\frac{c'}{a}\right)$$

$$=-\frac{b}{a}(x_1-x_2),$$