赠送2003年硕士研究生
入学考试试题2套

高等学校数学学习辅导教材

GAODENG XUEXIAO SHUXUE XUEXI FUDAO JIAOCAI

高等数学课程过关强化试卷

高等数学教学研究组／组编
国 涓／编著

微积分（下）

（经管类）

真正的一线教师力作
针对性强 信息超值
考点覆盖率 100%
考试成功率 100%
保你轻松过关得高分

ISBN 7-5611-2290-X
9 787561 122907 >
ISBN 7-5611-2290-X 定价:18.00元(本册9.00元)
大连理工大学出版社
责任编辑/刘 杰 赵 静 封面设计/王福刚

高等学校数学学习辅导教材

高等数学课程过关强化试卷

微积分(下)

(经管类)

高等数学教学研究组　组编

编著　国　涓

主审　李　彤　张培荣

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学课程过关强化试卷:微积分(下) / 国涓编著. 一大连:大连理工大学出版社,2003.4
ISBN 7-5611-2290-X

Ⅰ.微…　Ⅱ.国…　Ⅲ.微积分—高等学校—习题　Ⅳ.O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 022470 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河　邮政编码:116024
电话:0411-4708842　传真:0411-4701466　邮购:0411-4707961
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　印张:7.25　字数:156 千字
印数:1 ~ 8 000
2003 年 4 月第 1 版　2003 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑:刘　杰　赵　静　责任校对:安　雪
封面设计:王福刚

定　价:18.00 元(本册 9.00 元)

前　言

《高等数学》是大学理工科、经济学、管理学等门类各专业学生必修的基础课,也是硕士研究生入学考试的一门必考科目,同时高等数学又是在校大学生感到比较难学的一门课程。针对目前高等数学课时减少,学生学习困难,期末考试难以过关的实际问题,我们根据财政部制定的财经类院校财经类专业核心课程教学大纲和国家教育委员会制定的高等学校财经类专业核心课程教学大纲,以四川人民出版社出版的龚德恩编著的高等学校财经类专业核心课程教材《经济数学基础》和人大版赵树嫄编著的微积分为基础,按照教育部 2003 年制定的"全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲"的要求,编写了这本融期末复习与考研前期辅导热身为一体的《高等数学课程过关强化试卷》(经管类)。本书也可以作为财经类高等院校高等数学教师的教学参考书。

本书具有以下特点:

一、题型齐全,覆盖面广,难度适中

试卷以财经类高等院校期末考试要求为标准,所选的题目类型齐全。每套试题基本题占 65 分左右,中等难度题占 20 分左右,综合题占 15 分左右。注重基本概念、基本理论、基本计算和基本应用。综合题可以帮助学生提高分析问题和解决问题的能力,激发学生学习数学的兴趣,培养应用意识与创新意识。学生通过试卷测试,可以将高等数学的知识有机地联系在一起,温故知新,加深对知识点的理解,期末考试不仅可以顺利过关,而且成绩可以获得优秀。

二、层次清晰,针对性强

在试卷中,我们分别编写了 A 卷和 B 卷两种类型的试卷。其中 A 卷适用于各高等财经院校本、专科学生,达到 A 卷水平,可以使你顺利通过期末考试;B 卷难度有所增加,范围更广,不但使你期末考试取得好成绩,而且还为考研打下坚实的基础。因为在本书的编写过程中,我们不仅选取了基本题,而且选取了往届的考研试题。

三、展开解题思路,突出解题方法,传授解题技巧

我们对每一套试题都作了详尽的解答,使读者做完每套题后有所对照,了解自己的真实水平。为了开拓思路,对一些题作了一题多解,充分展示解题思路、解题方法与解题技巧,使你充分感受学习数学的乐趣。

本书由国涓编著,东北财经大学李彤副教授、张培荣教授担任主审。

尽管编者从事高等数学教学近二十个年头,有着丰富的教学经验,但限于编者水平,加之时间仓促,错漏不当之处在所难免。如果你发现了本书的不足,希望你能告诉我们,如果你感到本书对你确有帮助,使你在期末考试时稳操胜券,请你把书留给你的学弟学妹们。

编　者

2003 年 3 月

班级__________ 姓名__________ 得分__________

试卷一 （A 卷）

（时间 110～120 分钟）

一、填空题(每小题 2 分,共 10 分)

1. $\frac{d}{dx}\int_0^x \ln(1+t^2)dt =$ __________。

2. 方程 $z = x^2 + y^2$ 在空间直角坐标系下所表示的图形是__________。

3. 设 f 可微,若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0-\Delta x,y_0)}{\Delta x} = A$,则 $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} =$ ________。

4. 设 $D: x^2 + y^2 = by(b > 0)$,则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 在极坐标系下的累次积分为________。

5. 若幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{2p-1}}$ 条件收敛($p \neq 1$),则 p 满足的条件是________。

二、单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

1. 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(x) > 0$,则方程 $\int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)}dt = 0$,在开区间$(a,b)$内的根有(　　)。

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 无穷多个

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = 0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$(　　)。

A. 条件收敛　　B. 发散

C. 可能收敛也可能发散　　D. 收敛

3. 过 z 轴及点 $M(1,-2,3)$ 的平面方程是(　　)。

A. $3x + z = 0$　　B. $2x + y = 0$

C. $3y + 2z = 0$　　D. $x - 2y + 3z = 0$

4. 设 $D: 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$,则二重积分 $\iint\limits_D dxdy =$(　　)。

A. π　　B. 4π　　C. 3π　　D. 15π

5. 微分方程 $2yy'' + (y')^3 + y^4 = 0$ 的阶数为(　　)。

A. 1 阶　　B. 2 阶　　C. 3 阶　　D. 4 阶

三、计算题(每小题 7 分,共 56 分)

1. 设 $z = x^2y$,求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$。

2. 设 $z = f(x^2 - y^2, xy)$,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

3. 求定积分 $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$。

4. 求二重积分 $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$,其中 $D: x^2 + y^2 \leqslant 25$。

5. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{na^n}(a>0)$ 的收敛域。

6. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^n}$ 的敛散性。

7. 设 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}$，且 $f(0)=1$，求 $f(x)$。

8. 求微分方程 $xy' - y = x^2 e^x$ 满足初始条件 $y\big|_{x=1} = 1$ 的特解。

四、应用题(8 分)

求曲线 $y=\ln x$ 在区间(2,6)内的一点，使该点的切线与直线 $x=2$，$x=6$ 以及 $y=\ln x$ 所围成的平面图形面积最小。

五、应用题(10 分)

某工厂生产甲、乙两种产品，销售单价分别为 100 元和 80 元，已知生产 x 件甲种产品和 y 件乙种产品的总费用为 $C=C(x,y)=10000+40x+30y+0.1(x^2+y^2)$，如果要求两种产品共生产 1000 件，问甲、乙两种产品各生产多少件时，所得利润最大。

六、证明题(6 分)

设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 $f(u)$ 为可导函数，求证：$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$。

班级________ 姓名________ 得分________

试卷二 （A 卷）

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=$ ________。

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy^2}{y^2}=$ ________。

3. 若 $e^z=x-y+z$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________。

4. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$ 的和 $S=$ ________。

5. 若 D 是圆形区域：$x^2+y^2\leqslant 4$，利用二重积分的性质估计 $\iint\limits_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$ 积分值的范围________。

二、单项选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. $\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx=$（　　）。

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

2. 函数 $z=y^x$ 在点 $(1,1)$ 处的全微分 $dz\Big|_{\substack{x=1\\ y=1}}=$（　　）。

A. $dx+dy$　　B. dx　　C. dy　　D. 0

3. 下列级数中绝对收敛的是（　　）。

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

4. 若 D 是由 $|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1$ 围成的正方形区域，则 $\iint\limits_D y^2dxdy=$（　　）。

A. 0　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{4}{3}$

5. 微分方程 $\begin{cases}xy'+y=3\\ y\big|_{x=1}=0\end{cases}$ 的解是（　　）。

A. $y=3\left(1-\frac{1}{x}\right)$　　B. $y=3(1-x)$

C. $y=1-\frac{1}{x}$　　D. $y=1-x$

三、计算题（每小题 7 分，共 56 分）

1. $\int_0^8\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx$。

2. $\int_1^e x\ln x dx$。

3. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx$。

4. 设 $z=(x+2y)^x$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}$，$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,0)}$。

5. 将 $f(x)=\frac{1}{4-x}$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数，并确定收敛区间。

6. 求 $(1.04)^{2.02}$ 的近似值。

7. 求 $\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}\sigma$，其中 σ 是由直线 $y=x-4$ 与抛物线 $y^2=2x$ 所围成的区域。

8. 求微分方程 $xy''-3y'=x^2$ 的通解。

四、应用题(8 分)

设 $D: x^2+y^2\leqslant a^2(a>0)$，求 a 的值使 $\iint\limits_{D}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$。

五、应用题(10 分)

设某公司的甲、乙两个厂生产同一种产品，月产量分别是 x(千件) 和 y(千件)，甲厂的月生产成本是 $C_1=x^2-x+5$(千元)，乙厂的月生产成本是 $C_2=y^2+2y+3$(千元)，若要求每月总产量为 8 千件，并使总成本最小，求每个厂的最优产量和相应的最小成本。

六、证明题(6 分)

设 $z=f(x^2+y^2)$，且 f 可微。证明：$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$。

班级__________ 姓名__________ 得分__________

试卷三 （A 卷）

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. $f(x)$ 为可积的奇函数，则$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x =$ __________。

2. 设 $z = y^{x^2} + e^{xy}$，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} =$ __________。

3. 过 y 轴上的点$(0,1,0)$且平行于 xOz 平面的方程是__________。

4. 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n+1}}$的收敛域是__________。

5. $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的通解是__________。

二、单项选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 下列广义积分发散的是（　　）。

A. $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

C. $\int_e^{+\infty} \dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x$

2. 设 $u = e^{xyz}$，则 $\mathrm{d}u =$（　　）。

A. $yze^{xyz}\mathrm{d}x$　　B. $xze^{xyz}\mathrm{d}y$

C. $xye^{xyz}\mathrm{d}z$　　D. $e^{xyz}[yz\mathrm{d}x + zx\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z]$

3. 设函数 $z = f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处可微且 $f'_x(x_0,y_0) = 0, f'_y(x_0,y_0) = 0$，则函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处（　　）。

A. 必有极大值

B. 可能有极值，也可能无极值

C. 必有极小值

D. 必无极值

4. 由麦克劳林公式，函数 $f(x) = \sqrt{1+x}$ 按 x 幂展开式的前三项是（　　）。

A. $1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}x^2$　　B. $1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}x^2$

C. $1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2$　　D. $1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{8}x^2$

5. 微分方程$\dfrac{\mathrm{d}x}{y} + \dfrac{\mathrm{d}y}{x} = 0$满足$\left.y\right|_{x=3} = 4$的特解是（　　）。

A. $x^2 + y^2 = 25$　　B. $3x + 4y = c$

C. $y^2 + x^2 = c$　　D. $y^2 - x^2 = 7$

三、计算题（每小题 7 分，共 56 分）

1. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\mathrm{d}x$。

2. $\int_0^1 \dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$。

3. 设 $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ 所确定的 z 为 x、y 的函数，求它在$(1,2,-1)$处的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$。

4. 判断交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\frac{n^2+1}{n^2}$的敛散性(若收敛,指出是条件收敛还是绝对收敛)。

5. 将函数$f(x)=\frac{x}{2+x}$展开成x的幂级数,并写出收敛区间。

6. 求$\iint\limits_D(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D$是由$x=0,y=0,x+y=1$所围区域。

7. 求$\iint\limits_D\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D$为$x^2+y^2=1,x^2+y^2=4$和直线$y=x$,及$x$轴所围在第一象限的区域。

8. 求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3$的通解。

四、应用题(8分)

设D是由$y=\ln x$,曲线在点(e,1)处的切线及x轴所围区域。

求:(1) 区域D的面积。

(2)D绕x轴旋转一周所生成立体之体积。

五、应用题(10分)

设某种产品的产量是劳动力x和原料y的函数:$f(x,y)=60x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$,假设每单位劳动力花费100元,每单位原料花费200元,现有30000元资金用于生产,应如何安排劳力和原料,才能得到最多的产品。

六、证明题(6分)

设$z=f[x+\varphi(y)]$,其中φ为可微函数,f是二阶可微函数,求证:$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

班级__________ 姓名__________ 得分__________

试卷四 (B 卷)

(时间 110 ~ 120 分钟)

一、填空题(每小题 2 分,共 10 分)

1. $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} e^t \sin^2 t dt =$ __________。

2. 函数 $z = \ln(x - y) - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ 的定义域是__________。

3. 设 $z = xyf\left(\frac{y}{x}\right)$, $f(u)$ 可导,则 $xz_x' + yz_y' =$ __________。

4. $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,σ 是 D 的面积,则在 D 上至少存在一点 (ξ,η) 使__________。

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$ 发散,则有__________。

二、单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调递增函数,且 $f(x) > 0$,则 $\int_a^b f(x)dx$( )。

A. $< f(b)(b-a)$　　B. $> f(b)(b-a)$

C. $= f(b)(b-a)$　　D. $< f(a)(b-a)$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 的和函数是 $f(x) =$ ( )。

A. e^{-x^2}　　B. e^{x^2}　　C. $-e^{-x^2}$　　D. $-e^{x^2}$

3. 设 $x = \ln \frac{z}{y}$,则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ ( )。

A. 1　　B. e^x　　C. ye^x　　D. y

4. 设 $D: 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$,则 $\iint_D 2dxdy =$ ( )。

A. 3π　　B. 4π　　C. 6π　　D. 30π

5. $y'' = e^{-x}$ 的通解为 $y =$ ( )。

A. $-e^{-x}$　　B. e^{-x}

C. $e^{-x} + c_1x + c_2$　　D. $-e^{-x} + c_1x + c_2$

三、计算题(每小题 7 分,共 56 分)

1. 设 $f(2x+1) = xe^x$,求 $\int_3^5 f(t)dt$。

2. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$。

3. 设 $z = (x^2 + y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$,求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

4. 计算 $\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3}$ 的近似值。

5. 将函数 $f(x)=\ln(x^2+3x+2)$ 展开为 x 的幂级数，并求其收敛区间。

6. 求由 $y=|\ln x|$ 与 $x=0, x=10, y=0$ 所围成图形的面积。

7. 求 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 x^2 e^{-y^2} \mathrm{d}y$。

8. 求微分方程 $xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$ 满足条件 $y\big|_{x=e}=2e$ 的特解。

四、应用题(8 分)

讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$ 在 $0<a<1, a=1$ 和 $a>1$ 三种条件下的敛散性。

五、应用题(10 分)

设生产 x 个产品的边际成本为 $C_m=0.2x-10$，其固定成本为 10000 元，产品单价为 190 元，问生产量为多少时利润最大，并求最大利润(设产销平衡)。

六、证明题(6 分)

设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续且 $f(x)<1$，又 $F(x)=(2x-1)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，证明：$F(x)$ 在 $(0,1)$ 内只有一个零点。

班级＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿ 得分＿＿＿＿＿＿

试卷五 （B 卷）

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设$\int_0^1 \frac{e^t}{t+1}dt = k$，则$\int_0^1 \frac{e^t}{(1+t)^2}dt =$ ＿＿＿＿＿＿。

2. 对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，如果$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$，则$\lim_{n\to\infty} a_n =$ ＿＿＿＿＿＿。

3. 若极限$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + 2\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = A$，则$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} =$ ＿＿＿＿＿＿。

4. 设$z = e^{\sin(xy)}$，则 $dz =$ ＿＿＿＿＿＿。

5. 方程 $y' = e^{2x-y}$ 满足 $y\big|_{x=0} = 0$ 的特解是＿＿＿＿＿＿。

二、单项选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 $f(x)$ 连续，则$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2 - t^2)dt =$（　　）。

A. $xf(x^2)$　　B. $-xf(x^2)$　　C. $2xf(x^2)$　　D. $-2xf(x^2)$

2. $z = e^{-\sin^2(xy^2)}$，则$\frac{\partial z}{\partial y} =$（　　）。

A. $-e^{-\sin^2(xy^2)}$　　B. $-e^{-\cos^2(xy^2)}$

C. $-2xy\sin(2xy^2)e^{-\sin^2(xy^2)}$　　D. $-4xy\sin(xy^2)$

3. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散，则（　　）。

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ 必发散　　B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 必发散

C. $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ 必发散　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ 必发散

4. 若 D 是单位圆 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 在第一象限的部分，则$\iint_D f(x,y)dxdy =$（　　）。

A. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dy$　　B. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dx$

C. $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$　　D. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

5. 在下列函数中，能够是微分方程 $y'' + y = 0$ 的解的函数是（　　）。

A, $y = 1$　　B. $y = x$　　C. $y = \sin x$　　D. $y = e^x$

三、计算题（每小题 7 分，共 56 分）

1. $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$。

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$。

3. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$ 的收敛区间。

4. 已知 $f(x,y) = x^2\arctan\frac{y}{x} - y^2\arctan\frac{x}{y}$，求$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$。

5. 求函数 $z = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x - 3y - 6$ 的极值。

6. 设 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leqslant x\}$，求 $\iint\limits_D \sqrt{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

7. 求由抛物面 $z = 5 - x^2 - y^2$ 与平面 $z = 1$ 所围成的立体的体积。

8. 求方程 $y'' + 5y' + 6y = 3\mathrm{e}^{-x}$ 的通解。

四、应用题(8 分)

某工厂生产 A、B 两种产品的联合成本函数为 $C = 4.5q_A^2 + 3q_B^2$，需求函数分别为 $q_A^2 = 30 - p_A$，$q_B^2 = 45 - p_B$，其中 p_A, p_B, q_A, q_B 分别表示 A、B 两种产品的价格和需求量，两种产品各生产多少时利润最大？

五、应用题(10 分)

设直线 $y = ax$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围成图形的面积为 S_1，它们与直线 $x = 1$ 所围成的图形面积为 S_2，并且 $a < 1$。

(1) 试确定 a 的值，使 $S_1 + S_2$ 达到最小，并求出最小值。

(2) 求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

六、证明题(6 分)

变量 x, y 是由方程组 $\begin{cases} x^2 - y^2 + 2r = 0 \\ xy - s = 0 \end{cases}$ 所确定的 r, s 的函数，试证明：$\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial x}{\partial s} = \dfrac{y - x}{x^2 + y^2}$。

班级____________ 姓名____________ 得分____________

试卷六 （B 卷）

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 $f(x)$ 连续，且$\int_0^{x^3-1} f(t)\mathrm{d}t = x^4$，则 $f(26) =$ ________。

2. e^{-x} 的麦克劳林级数为________________。

3. 设 $z = x^2 \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$，则 $\mathrm{d}z =$ ____________。

4. $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 在极坐标下的累次积分为____________，其中 $D: x^2 + y^2 = 4$ 围成的区域。

5. 微分方程 $y'' + 4y = x^3 + x$ 的一个特解为____________。

二、单项选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 广义积分（　　）收敛。

A. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$　　B. $\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

C. $\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$　　D. $\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$

2. 设 $f(x+y, x-y) = x^2 - y^2$，则 $f(x,y) =$（　　）。

A. $x^2 - y^2$　　B. $x^2 + y^2$　　C. $(x-y)^2$　　D. xy

3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n^2}$ 是（　　）。

A. 发散的　　B. 条件收敛的

C. 绝对收敛的　　D. 既非条件收敛也非绝对收敛

4. 设 $u = f(x+y, xz)$ 有二阶连续偏导数，则$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} =$（　　）。

A. $f_2' + xf_{11}'' + (x+z)f_{12}'' + xzf_{22}''$　　B. $xf_{12}'' + xzf_{22}''$

C. $f_2' + xf_{12}'' + xzf_{22}''$　　D. xzf_{22}''

5. 微分方程 $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ 的一个特解是（　　）。

A. $y = x^3 + 1$　　B. $y = (x+2)^3$

C. $y = (x+c)^2$　　D. $y = c(x+1)^3$

三、计算题（每小题 7 分，共 56 分）

1. 求$\int_0^3 x\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$。

2. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^3}$ 是否收敛，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛。

3. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ 展成 $x - 6$ 的幂级数。

4. 设 $z = yf\left(\frac{x}{y}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 f, g 具有二阶连续导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

5. **求函数** $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ **的极值。**

6. **计算二重积分** $I = \iint_D \frac{1}{y}\sin y \mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $y^2 = \frac{\pi}{2}x$ 与 $y = x$ 所围成的区域。

7. **求方程** $y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$ **的通解以及** $y(1) = 2$ **时的特解。**

8. **已知** $f(x)$ **连续，**$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t = 1 - \cos x$，**求**$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ **的值。**

四、应用题(8 分)

某产品的总成本 C(万元) 的变化率(边际成本)$C' = 1$，总收益 R(万元) 的变化率(边际收益) 为产量 x(百台) 的函数 $R' = R'(x) = 5 - x$。

(1) 求生产量等于多少时，总利润为最大？

(2) 从利润最大的生产量又生产了 100 台，总利润减少了多少？

五、应用题(10 分)

计算二重积分 $I = \iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 x 轴、y 轴与曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ 所围成的区域($a > 0, b > 0$)。

六、证明题(6 分)

若 $z = f(ax+by)$，则 $b\frac{\partial z}{\partial x} = a\frac{\partial z}{\partial y}$。

班级__________ 姓名__________ 得分__________

试卷七 （B 卷）

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{\sqrt{x}}(1-\cos t^2)\mathrm{d}t}{x^{5/2}}=$__________。

2. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\ln 3)^n}{2^n}$ 的和为__________。

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$ 确定，则函数 z 的驻点是__________。

4. 交换累次积分的次序 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=$ __________。

5. 微分方程 $xy'+y-\mathrm{e}^x=0$ 的通解为__________。

二、单项选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 $f(x)$ 连续，且 $\Phi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)\mathrm{d}t$，则 $\Phi'(x)=$（　　）。

A. $xf(x^2)$　　B. $2x^2f(x^2)$

C. $\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t+xf(x^2)$　　D. $\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t+2x^2f(x^2)$

2. 当常数 $p>0$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n^p}$ 在其收敛区间的右端点是（　　）。

A. 条件收敛的

B. 绝对收敛的

C. 当 $0<p\leqslant 1$ 为条件收敛，$p>1$ 为绝对收敛

D. 当 $0<p\leqslant 1$ 为绝对收敛，$p>1$ 为条件收敛

3. 偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$ 存在是函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续的（　　）。

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 既不充分又不必要条件　　D. 充分必要条件

4. 设 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant x\leqslant a\}$ 上连续，则 $\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=$（　　）。

A. $\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^a\mathrm{d}y\int_a^y f(x,y)\mathrm{d}x$

C. $\int_0^a\mathrm{d}y\int_y^a f(x,y)\mathrm{d}x$　　D. A，B，C 均不对

5. 微分方程 $xyy''+x(y')^3-y^4y'=0$ 的阶数是（　　）。

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 2

三、计算题（每小题 7 分，共 56 分）

1. $\int_1^{e^3}\dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$。

2. 设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，求 $\int_0^1[xf'(x)+1]\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x$。

3. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$ 的敛散性。

4. 不需写出幂级数的展开式，直接确定 $f(x)=\frac{1}{2+3x}$ 展成形如 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的幂级数的收敛区间，并说明理由。

5. $z=\arctan(xy)$，求 dz。

6. 设 $z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

7. 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}d\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}(a>0)$ 和直线 $y=-x$ 围成的区域。

8. 求微分方程 $x\frac{dy}{dx}-y\ln y=0$ 的通解。

四、应用题(8 分)

设平面图形是由 $y=\frac{3}{x}$ 和 $x+y=4$ 围成。

(1) 求此图形的面积；

(2) 求此图形绕 x 轴旋转所生成的旋转体的体积。

五、应用题(10 分)

某公司通过电台及报纸两种方式做销售某种商品的广告，根据统计资料，销售收入 R(万元)与电台广告费用 x_1(万元)及报纸广告费用 x_2(万元)之间有如下关系式：$R=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2$

(1) 在广告费用不限的情况下，求最优广告策略；

(2) 若提供的费用为 1.5 万元，求相应的最优广告策略。