

复合型断裂准则

孟宪纲 秦守雍 著

学苑出版社

前 言

近二十年来,断裂力学不仅在理论方面日趋完善,而且在工程应用方面得到迅速发展。由于实际构件中的裂纹都处于复杂受力状态,因此复合型断裂准则的研究就引起了各国力学工作者的极大兴趣。我国的力学工作者也提出了很多新的复合型断裂准则。为了便于理论上的进一步研究和工程上的广泛应用,深感有必要对复合型断裂准则做一简要总结。一方面对现有理论归纳、整理,使其完善和系统化;另一方面结合实验资料加以分析比较,对其做出初步评价。同时为其应用做一些基础性的工作。这里也包括了作者的一些工作。由于作者才疏学浅,其中难免有疏漏谬误之处,敬请读者指正。

作 者

1994年2月

目 录

前言

第 1 章 绪论

- 1.1 裂纹尖端附近的应力场 (1)
- 1.2 应变能密度和应变能密度因子 (3)
- 1.3 用复应力函数计算应力强度因子公式 (6)
 - 1.3.1 I、II 型裂纹 (6)
 - 1.3.2 III 型裂纹 (11)
- 1.4 裂纹扩展的能量释放率 (13)
- 1.5 平面裂纹问题的一般级数解 (15)
 - 1.5.1 I 型裂纹 (17)
 - 1.5.2 II 型裂纹 (19)

第 2 章 几种基本的复合型断裂准则

- 2.1 最大周向正应力准则 ($\sigma_{\theta_{max}}$ 准则) (22)
- 2.2 应变能密度因子准则 (S 准则) (26)
- 2.3 能量释放率准则 (G 准则) (30)
 - 2.3.1 纯 III 型裂纹 (31)
 - 2.3.2 I—III 复合型断裂 (40)
 - 2.3.3 I—II 复合型断裂 (41)
 - 2.3.4 I—II—III 全复合型断裂准则 (43)
- 2.4 对三个基本复合型断裂准则的讨论 (44)
 - 2.4.1 和实验资料的比较 (44)

2.4.1.1	初始断裂角	(44)
2.4.1.2	开裂载荷和临界状态曲线	(46)
2.4.2	关于三种基本复合型断裂准则的讨论	(51)
第 3 章 复合型断裂准则研究的进展		
3.1	等应变能密度线上最大应力准则	(53)
3.2	其他复合型断裂准则简述	(60)
3.2.1	广义应力强度因子准则	(60)
3.2.1.1	广义应力强度因子的基本概念	(61)
3.2.1.2	广义应力强度因子断裂准则	(62)
3.2.2	剪应力强度因子准则	(63)
3.2.3	等 W 线上最大应变准则	(66)
3.3	复合型断裂的一些新思想	(74)
3.3.1	滑开型断裂的复合型脆断判据	(74)
3.3.1.1	径向应力判据	(75)
3.3.1.2	最大剪应力判据	(78)
3.3.2	金属材料复合型裂纹的扩展阻力	(80)
第 4 章 在压缩载荷下的复合型断裂		
4.1	$(\sigma_\theta)_{\max}$ 准则在压缩情形下的结果	(91)
4.2	S 准则在压缩情形下的结果	(95)
4.3	等应变能密度线上最大应力准则 在压缩情形下的结果	(97)
4.4	与实验资料的比较	(101)
4.5	关于压缩情形下复合型断裂准则 的一些新想法	(104)
4.5.1	在应力场中考虑非奇异项	(104)
4.5.2	对于 $K_I < 0$ 的分析	(108)

4.5.3 修正后的 $(\sigma_\theta)_{\max, x}$ 准则	(107)
第5章 复合型断裂准则在工程中的应用	
5.1 薄壁受压容器	(110)
5.1.1 最大周向应力准则	(111)
5.1.2 应变能密度准则	(112)
5.1.3 等应变能密度线上 $(\sigma_\theta)_{\max, x}$ 准则	(112)
5.2 受扭薄壁圆管	(114)
5.2.1 最大周向应力准则	(117)
5.2.2 S 准则	(118)
5.2.3 等 W 线上 $(\sigma_\theta)_{\max}$ 准则	(118)
5.2.4 和实验资料比较	(118)
5.3 复杂应力状态下的圆盘状裂纹	(122)

参考文献

第1章 绪论

阅读本书的读者应具备断裂力学的一些基础知识, 为便于读者查找, 现将其主要内容简述如下。

1.1 裂纹尖端附近的应力场

大家知道, 按其受载方式划分, 裂纹主要有三种基本类型(图 1.1), 分别称为张开型(I 型, 单向拉伸); 滑开型(II 型, 横向剪切); 撕开型(III 型, 纵向剪切)。其中张开型是最危险

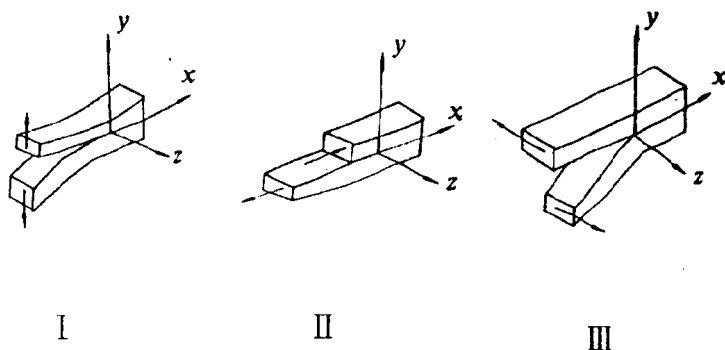


图 1.1 裂纹的三种基本类型

的,是产生低应力脆断的主要原因。一般说来,实际物体中的裂纹可以是一个空间曲面,裂纹前缘可以是一条空间曲线。但在工程实际问题中遇到的大多是平面裂纹,或者可近似看成平面裂纹。这种裂纹数学上也容易处理。因此本书主要研究平面裂纹。下面写出这三种裂纹尖端附近的应力场,其推导过程在任何一本断裂力学教材中均可查到。

I 型 (张开型, 单向拉伸)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ u &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\kappa - 1 + 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ v &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[\kappa + 1 - 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \right\} (1.1)$$

在极坐标下,有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (3 - \cos \theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \end{aligned} \right\} (1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{K_{\perp}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\alpha - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ u_{\theta} &= \frac{K_{\perp}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[-(2\alpha + 1) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \right\} (1.1)$$

II 型 (滑开型, 横向剪切)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{K_{\parallel}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_{\parallel}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{\parallel}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ u &= \frac{K_{\parallel}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[1 + \alpha + 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ v &= \frac{K_{\parallel}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \alpha + 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \right\} (1.2)$$

在极坐标下, 有:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{K_{\parallel}}{2\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} (3\cos\theta - 1) \\ \sigma_{\theta} &= -\frac{K_{\parallel}}{2\sqrt{2\pi r}} 3\cos \frac{\theta}{2} \sin\theta \\ \tau_{\theta} &= \frac{K_{\parallel}}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (3\cos\theta - 1) \\ u_r &= \frac{K_{\parallel}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[-(2\alpha - 1) \sin \frac{\theta}{2} + 3\sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ u_{\theta} &= \frac{K_{\parallel}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[-(2\alpha + 1) \cos \frac{\theta}{2} + 3\cos \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \right\} (1.2)$$

以上两种类型都属于弹性力学中的平面问题, 对于平面应变, 有:

$$\varepsilon = 3 - 4\nu, \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (1.3)$$

对于平面应力, 有:

$$\varepsilon = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad \sigma_z = 0$$

III 型(撕开型, 纵向剪切)

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (1.4)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (1.5)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$u = v = 0$$

$$w = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2}$$

在柱坐标 (r, θ, z) 下, 有:

$$\tau_{xz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (1.5)'$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{r\theta} = 0$$

$$u_r = u_\theta = 0$$

$$w = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2}$$

其中, ν 为材料的 Poisson 比, μ 为剪切模量; ε 由 (1.3) 和

(1.4)式确定; u, v, w 分别表示在 x, y, z 三个方向上的位移; K_I, K_{II}, K_{III} 为三种基本类型裂纹尖端附近的应力强度因子, 其力学意义这里不再赘述。

1.2 应变能密度和应变能密度因子

由弹性力学知道, 弹性体在外力作用下平衡时, 外力对弹性体所做的功等于物体所储存的应变能 U , 而单位体积的应变能称为物体的应变能密度。记为:

$$w = \frac{dU}{dV} \quad (1.6)$$

应变能密度的计算公式为:

$$w = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2\mu} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \quad (1.7)$$

其中 E 为材料的杨氏模量。

对于在 I、II、III 型加载方式下的复合型平面裂纹, 按照弹性力学的叠加原理, 把 (1.1) - (1.5) 式代入 (1.7), 并加以整理, 可得如下结果:

$$w = \frac{1}{r} (a_{11}k_1^2 + 2a_{12}k_1k_2 + a_{22}k_2^2 + a_{33}k_3^2) \quad (1.8)$$

其中

$$k_1 = \frac{K_I}{\sqrt{\pi}}, k_2 = \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi}}, k_3 = \frac{K_{III}}{\sqrt{\pi}} \quad (1.9)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{16\mu} (1 + \cos\theta)(\kappa - \cos\theta) \\ a_{12} &= \frac{1}{16\mu} \sin\theta [2\cos\theta - (\kappa - 1)] \\ a_{22} &= \frac{1}{16\mu} [(\kappa + 1)(1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)] \\ a_{33} &= \frac{1}{4\mu} \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{平面应变} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{平面应力} \end{cases} \quad (1.11)$$

由式(1.8)看出,在裂纹尖端附近,当 $r \rightarrow 0$ 时,应变能密度具有 $\frac{1}{r}$ 级的奇异性。如果令

$$S = a_{11}k_1^2 + 2a_{12}k_1k_2 + a_{22}k_2^2 + a_{33}k_3^2 \quad (1.12)$$

那么 S 正好是这一奇异性强度的度量,因此我们称 S 为应变能密度因子。(1.8)式可写为

$$W = \frac{S}{r} \quad (1.8)'$$

1.3 用复应力函数计算应力强度因子的公式

1.3.1 I、II 型裂纹

按照 Н.И.Мусхелишвили^[1],弹性力学的平面问题归结为求两个解析函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$,它们和应力、位移的关系为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\operatorname{Re}\varphi'(z) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \\ u + iv &= 2\mu[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}] \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

公式(1.13)最先由 Колосов 导出, 因此它有时也被称为 Колосов 公式。对于不同的问题, $\varphi(z)$ 、 $\psi(z)$ 还必须满足相应的边界条件。

一般说来, 在求得 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 后, 须分开实部和虚部求出有关应力分量, 然后才能按公式

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y|_{\theta=0} \\ K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy}|_{\theta=0} \end{aligned} \quad (1.14)$$

求出应力强度因子。这样做很不方便。下边推导直接用函数 $\varphi(z)$ 求应力强度因子的公式。

把由(1.1)式和(1.2)式表示的应力叠加起来, 得:

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{2}{\sqrt{2\pi r}} \left(K_I \cos \frac{\theta}{2} - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

记: $K = K_I - iK_{II}$, $Z = re^{i\theta}$, 有:

$$\sigma_x + \sigma_y = \operatorname{Re} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi Z}} K \right]$$

在裂纹尖端附近, 当 $Z \rightarrow 0$ 时, 有

$$\sigma_x + \sigma_y = \operatorname{Re} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi Z}} K \right] = \lim_{Z \rightarrow 0} 4 \operatorname{Re} \varphi'(Z)$$

$$\therefore K = \lim_{Z \rightarrow 0} 2\sqrt{2\pi Z} \varphi'(Z)$$

一般情况, 裂纹尖端不一定在坐标原点 $Z=0$, 而是在 Z 平面上的 Z_0 点, 这时有:

$$K = \lim_{Z \rightarrow Z_0} 2\sqrt{2\pi(Z-Z_0)} \varphi'(Z) \quad (1.15)$$

当然, 严格地讲, 要使上述公式成立, 还应证明:

$$I_n \left[\sqrt{\frac{2}{\pi Z}} K \right] = \lim_{Z \rightarrow 0} 4 I_n [\varphi'(Z)]$$

这可以从下面的推导中予以证实。

如图 1.2 所示, 一无限大平面中间有一长为 $2a$ 的穿透型裂纹, 在无限远处同时受到单轴拉伸和横向剪切的作用, 易知它的复应力函数为(参看文献[4]):

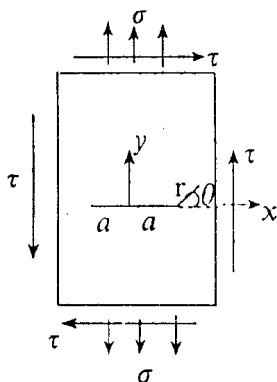


图 1.2

$$\begin{aligned} \varphi(z) = & \frac{1}{4} (2\tau i - \sigma)Z \\ & + \frac{1}{2} (\sigma - \tau i) \sqrt{Z^2 - a^2} \end{aligned}$$

在裂纹尖端附近, 记

$$z = re^{i\theta}, \text{ 有}$$

$$Z = z + a = re^{i\theta} + a$$

$$Z^2 - a^2 = r^2 e^{2i\theta} + 2rae^{i\theta} \approx 2az$$

$$\therefore \varphi'(z) \approx \frac{(\sigma - \tau i)a}{2\sqrt{2az}} = \frac{K_I - iK_{II}}{2\sqrt{2\pi z}}$$

把 z 换成 $Z - Z_0$, 就得到公式 (1.15)。

虽然以上推导是从一个特殊问题出发的, 但由于公式 (1.1) 和 (1.2) 具有普遍意义, 即任何裂纹尖端附近的应力场都由 (1.1) 和 (1.2) 表达, 所以公式 (1.15) 也是普遍适用的。

公式 (1.15) 仅当裂纹平行于 x 轴时才是正确的。对于位于任意方向的裂纹, 需要用座标变换的方法加以修正。(参看文献 5)。

如图 1.3 所示, 设 Z 平面
逆时针旋转 α_1 角构成 Z_1 平面,
相应的坐标变换公式为

$$Z_1 = e^{-i\alpha} Z \quad (1.16)$$

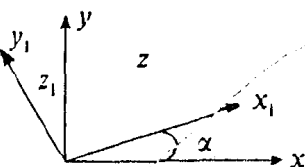


图 1.3

值得注意的是, Airy 应力函数 $F(x, y)$ 是坐标变换的不变量。因为它的物理意义是: 边界点的应力函数值等于加在起点与该点间边缘弧线上的载荷对此点所取之力矩, 即 (参看图 1.4):

$$F(x, y) = - \int_0^s [(x - x^*) F_{ny} - (y - y^*) F_{nx}] ds$$

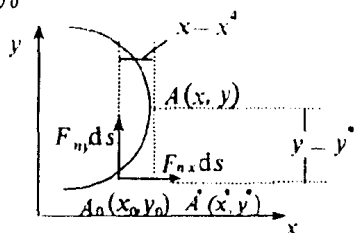


图 1.4

而力矩显然与坐标系的选择无关。即有:

$$F_1(x_1, y_1) = F(x, y) \quad (1.17)$$

从 (1.16) 式知道,

$$u_1 + iv_1 = (u + iv) e^{-i\alpha}$$

注意

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \sin \alpha$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} = - \frac{\partial F}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos \alpha$$

$$\text{有 } \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + i \frac{\partial F_1}{\partial y_1} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + i \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) e^{-i\alpha}$$

从 Airy 应力函数的物理意义知道

$$-P_y + iP_x = \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y}$$

其中 P_x, P_y 是加在边缘 AP 段上的外载荷的主向量在 x 和 y 轴上的投影。注意

$$\varphi(z) = \frac{E}{4} (u + iv) + \frac{1+\nu}{4} (-P_y + iP_x) \quad (1.18)$$

最终得到:

$$\varphi_1(z_1) = \varphi(z) e^{-i\alpha} \quad (1.19)$$

设在 Z_1 平面沿 x_1 轴有一裂纹, 裂纹尖端在 z_{10} 点 (在 z 平面中记为 z_0 点), 那么有

$$z_{10} = z_0 e^{-i\alpha}$$

$$z_1 = z e^{-i\alpha}$$

$$\varphi_1(z_1) = \varphi(z) e^{-i\alpha}$$

$$\varphi_1'(z_1) = \varphi'(z) e^{-i\alpha} \frac{dz}{dz_1} = \varphi'(z)$$

把这些表达式代入公式 (1.15), 得

$$\begin{aligned} K &= K_I - iK_{II} = \lim_{z_1 \rightarrow z_{10}} 2\sqrt{2\pi(z_1 - z_{10})} \varphi_1'(z_1) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} 2\sqrt{2\pi(z - z_0)} e^{-i\alpha/2} \varphi'(z) \end{aligned} \quad (1.20)$$

此即已知复应力函数 $\varphi(z)$ 计算应力强度因子的一般公式。裂纹与 x 轴夹角为 α , 裂纹尖端在 z_0 。

下面我们导出经过保角映射 $z = \omega(\zeta)$, 在 ζ 平面上计算 K 之公式。记 ζ_0 为 Z_0 之映象,

$$\phi[\omega(\zeta)] = \Phi(\zeta)$$

(1.20) 式变为:

$$K = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} 2\sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)}}{\omega'(\zeta)} e^{-i\alpha/2} \Phi'(\zeta)/\omega'(\zeta)$$

$$\text{记 } t = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{\sqrt{\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)}}{\omega'(\zeta)}$$

$$\text{则 } t = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{\omega'(\zeta)}{2\omega''(\zeta)\sqrt{\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)}} = \frac{1}{2\omega''(\zeta_0)t}$$

$$\therefore t = \frac{1}{\sqrt{2\omega''(\zeta_0)}}$$

$$\therefore K = K_I - iK_{II} = \frac{2\sqrt{\pi} \Phi'(\zeta_0)}{\sqrt{e^{\alpha}\omega''(\zeta_0)}} \quad (1.21)$$

1.3.2 III 型裂纹

纵向剪切问题中剪应力 τ_{xy}, τ_{yz} 与位移 W 的关系为

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial W}{\partial x}, \tau_{yz} = \mu \frac{\partial W}{\partial y} \quad (1.22)$$

代入平衡方程

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

$$\text{得 } \mu \Delta W = 0 \quad (1.23)$$

引入复位移函数

$$\phi(z) = W + iW_c \quad (1.24)$$

其中 $z = x + iy$, W_c 是 W 的共轭函数。

由哥西-黎曼定理, 得

$$\phi'(z) = \frac{\partial W}{\partial x} + i \frac{\partial W_c}{\partial x} = \frac{\partial W_c}{\partial y} - i \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{1}{\mu} (\tau_{xz} - i\tau_{yz})$$

另一方面,在裂纹尖端附近,由(1.5)式,有

$$i(\tau_x - i\tau_y) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi z}}$$

这里 $z = re^{i\theta}$

$$\therefore K_{III} = i\mu\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{z} \varphi'(z)$$

如果裂纹尖端不在原点,而在 z_0 点,则有

$$K_{III} = i\mu\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow z_0} \sqrt{z - z_0} \varphi'(z) \quad (1.25)$$

(1.25) 式仅适用于裂纹与 x 轴平行时的情况。

当 z 平面发生坐标平移和旋转时,由于 W 是 Z 方向位移,所以复位移函数 $\varphi(z)$ 不变,即

$$\varphi_1(z_1) = \varphi(z)$$

注意(1.16)式,有

$$\varphi_1'(z_1) = \varphi'(z) \frac{dz}{dz_1} = \varphi'(z) e^{i\alpha} \quad (1.26)$$

设在 z_1 平面平行于 x_1 轴有一裂纹,尖端在 z_{10} 点,根据(1.25)式,有

$$K_{III} = i\mu\sqrt{2\pi} \lim_{z_1 \rightarrow z_{10}} \sqrt{z_1 - z_{10}} \varphi_1'(z_1)$$

把(1.16)式和(1.26)式代入上式,最后得

$$K_{III} = i\mu\sqrt{2\pi} e^{i\alpha/2} \lim_{z \rightarrow z_0} \sqrt{z - z_0} \varphi'(z) \quad (1.27)$$

比即用复位移函数直接计算 III 型应力强度因子的一般公式,其中 α 为裂纹方向与 x 轴方向的夹角。 z_0 为裂纹尖端点。