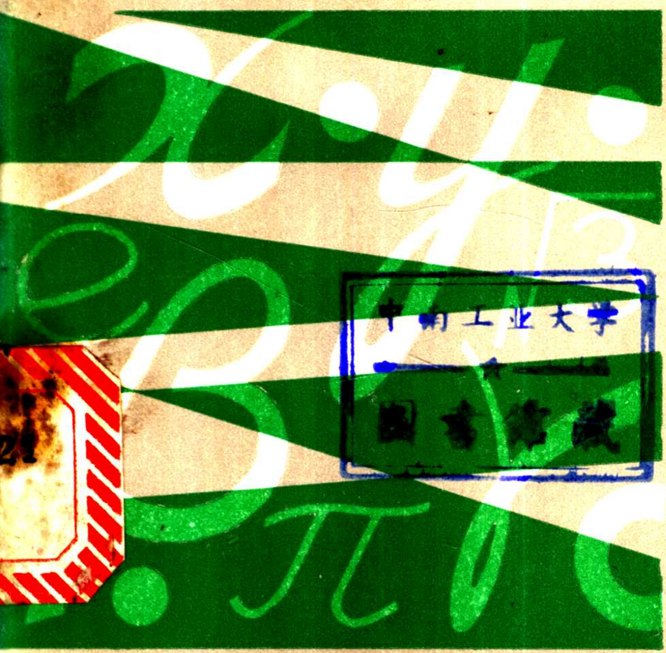
中学数学丛书

因式分解及其应用

天津市数学会编



天津科学技术出版社

中学数学丛书

因式分解及其应用

牛继武　张　羽　张　寅

天津市数学会编

天津科学技术出版社

责任编辑：黄立民

中学数学丛书

因式分解及其应用

天津市数学会　编

·

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道130号

天津新华印刷四厂印刷

新华书店天津发行所发行

·

开本 787×1092毫米 1/32 印张 5.5 字数 115000

1988年1月第1版

1988年1月第1次印刷

印数：1—8 400

ISBN 7-5308-0147-3/O·12　定价：1.30元

编者的话

《中学数学丛书》是献给中学生和自学青年的礼物，希望它们成为中学数学爱好者的良师益友。

编写本丛书的目的在于帮助读者学好数学基础知识、提高运算能力、思维能力和空间想象能力，以及扩大数学知识领域。在编写过程中，力求把中学不同年级，不同阶段学过的代数、几何、三角、解析几何等方面的知识纵横联系，融会贯通，并对中学数学中某些问题或某种数学解题方法进行专题介绍，从而使读者在阅读这些小册子之后，能够比较系统、深入地掌握一些规律，学会一些方法，提高数学水平。

我们希望数学工作者、大中学数学教师和广大读者对本套丛书提出宝贵意见。

天津市数学会

1986年10月

目　　录

因式分解是数学中恒等变形的一种重要的方法，它在初等数学乃至高等数学中，都有广泛的应用。这本小册子准备从因式分解的理论、方法和应用三个方面对它进行阐述。其中有关因式分解的理论，因为本书是为已经具备高中数学基础知识的读者而写，因此对于一般因式、数域、公因式等的定义都没有另行叙述而直接采用。对于有关的定理，我们都尽量给出证明。

一、多项式因式分解的概念

（一）什么是多项式的因式分解

通常把一个多项式分解为几个不能再分的因式的乘积，称做这个多项式的因式分解。

这里讲不能再分，指的是相对于系数所在的数域而言的。当指定的数域不同，则不能再分的意义也不同。

例如分解x^4-4的因式：

在有理数域中，它的分解式是：$(x^2+2)(x^2-2)$，分解到这里就不能再继续分解，不然的话，分解式的系数将超出有理数的范围。

在实数域中，它的分解式是：

$$(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}).$$

分解到这里，就不能再继续分解。

在复数域中，它的分解式是：

$$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i).$$

由此可见，对多项式因式分解必须先明确系数的数域，其不能再分才有确切的含义。

（二）因式分解定理

这一节我们讨论多项式因式分解定理（有关定理的证明可以参看附录）。

首先要弄清不可约多项式的概念。

定义1　在某个数域上次数$n\geqslant 1$的多项式$P(x)$，如果它不能表示成这个数域上两个次数比$P(x)$低的多项式乘积，我们称多项式$P(x)$为这个数域上不可约多项式。

按照定义，一个多项式$P(x)$是否可约，是依赖于它的系数域的。当系数域改变后，它的可约与否就可能改变。比如多项式x^2+2在实数域是不可约的，而在复数域它是可约的。

一个一次多项式总是不可约的，因为在任何数域上，一次多项式不能写成两个零次多项式的乘积。

关于不可约多项式有以下的定理：

定理1　某数域上次数$n\geqslant 1$的多项式$P(x)$不可约的充分必要条件是它的因式只有两种：非零常数或$P(x)$的非零整数倍$cP(x)$（$c\neq 0$）。

根据定义1，我们称多项式$P(x)$的非零常数因式和$P(x)$

的非零整数倍因式为$P(x)$的当然因式，除当然因式外的其他因式为非当然因式。

由此我们得出不可约多项式的等价定义：

定义2　在某个数域上次数$n\geqslant 1$的多项式$P(x)$，如果除了当然因式外，别无其他因式，那么$P(x)$就是这个数域上的不可约多项式。

定理2　若$P(x)$为不可约多项式，$f(x)$为任一多项式，则$P(x)$与$f(x)$的关系只有两种：或者$p(x)$整除$f(x)$，或者$P(x)$与$f(x)$的最大公因式是1。

定理3　设$f(x)$是某数域上次数$n\geqslant 1$的多项式，那么$f(x)$一定有一个不可约因式。

定理4　如果$P(x)$是不可约多项式，那么对于任意两个多项式$f(x)$、$g(x)$，由$P(x)$整除$f(x)\cdot g(x)$一定得到$P(x)$整除$f(x)$或者整除$g(x)$。

定理5　（因式分解的存在唯一性定理）在某个数域上次数$n\geqslant 1$的多项式$f(x)$，都可以唯一地分解成这个数域上一些不可约多项式的乘积，所谓唯一性是说，如果有两个分解式$f(x)=P_1(x)P_2(x)\cdots P_m(x)$及$f(x)=Q_1(x)Q_2(x)\cdots Q_n(x)$，那么必有$m=n$，并且适当排列因式的顺序后，有$P_1(x)=C_1Q_1(x)$，$P_2(x)=C_2Q_2(x)$，$\cdots$，$Q_n(x)=C_nQ_n(x)$。其中$C_1$、$C_2$，$\cdots C_n$是非零常数。

（三）多项式的重因式

在因式分解中，我们经常遇到分解式中出现某一个因式的幂，这一节中，我们讨论多项式的重因式，从理论上回答重因式存在的充分必要条件。

定义3　设 $P(x)$ 是某数域上不可约多项式，$f(x)$是这个数域上任意多项式，如果$P^K(x)$能够整除$f(x)$，而$P^{K+1}(x)$不能整除$f(x)$ 那么$P(x)$ 即为$f(x)$ 的k重因式。

如果$k=0$，那么$P(x)$ 根本不是$f(x)$ 的因式；如果$k=1$，$P(x)$ 叫做$f(x)$ 的一个单因式；如果$k>1$，$P(x)$叫做$f(x)$ 的重因式。

比如多项式$x^5+x^3+x^2-1=(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$，其中因式$x+1$是$x^5+x^3+x^2-1$的二重因式，$x-1$是它的单因式。

定义4　设$f(x)$ 是某数域上的多项式，以下形式称$f(x)$的标准分解式：

$f(x)=C\overset{n_1}{P_1}(x)\overset{n_2}{P_2}(x)\cdots\overset{n_t}{P_t}(x)$，其中$P_i(i=1,2,\cdots,t)$ 是不可约多项式，$n_i(i=1,2,\cdots,t)$ 是正整数。

当指数$n_i=1$时，$P_i(x)$ 是单因式，当指数$n_i>1$时，$P_i(x)$ 是重因式。

为了判断一个给定的多项式有没有重因式，需要引入多项式的导数。

定义5　设多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ (n\geqslant1,$$

$a_n\neq0$）则多项式

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$$ 叫做多项式$f(x)$ 的一阶导数。

必须指出，这样一种规定采用形式定义，它来源于数学分析。例如：

$$f(x)=10x^5-5x^4+2x^3-7x^2+2x+1,$$

则$f'(x)=50x^4-20x^3+6x^2-14x+2$。

通过直接验证，可以得到以下的基本公式：

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x);$$

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$

$$(cf(x))'=cf'(x);$$

$$[f^m(x)]'=mf^{m-1}(x)f'(x).$$

和数学分析中相类似，可以得到高阶导数的概念。称一阶导数$f'(x)$的导数为$f(x)$的二阶导数即

$$(f'(x))'=f''(x).$$

以此类推，$f(x)$的$m-1$阶导数的导数，称为$f(x)$的m阶导数，记为$f^{m}(x)$。

下面我们利用多项式导数建立判断多项式有没有重因式的定理。

定理6　如果多项式$f(x)$有k重因式$P(x)$ $(k\geqslant1)$，那么$P(x)$是$f'(x)$的$(k-1)$重因式。

推论1　如果$P(x)$是$f(x)$的$k(k\geqslant1)$重因式，那么$P(x)$分别是$f'(x)f''(x)\cdots f^{(K-1)}(x)$的$k-1$，$k-2,\cdots,2$，1重因式，而不是$f^{(K)}(x)$的因式。

定理7　不可约多项式$P(x)$是$f(x)$的k重因式$(k>1)$的充分必要条件是$P(x)$为$f(x)$和$f'(x)$的公因式。

定理8　多项式$f(x)$没有重因式的充分必要条件是$f(x)$与$f'(x)$的最大公因式是1。

定理8给出了判断一个多项式有无重因式的实际方法，即只要求出$f(x)$与$f'(x)$的最高公因式，便可知道$f(x)$是否有重因式。

（四）余 数 定 理

（1）多项式带余除法定理．在整数论中我们知道，对于任意整数a，b（$b>0$），一定存在着唯一的一对整数Q和r使得

$$a=bQ+r,\ 并且0\leqslant r<b.$$

这个定理叫做整数的带余除法定理，与这个定理相类似，多项式也有多项式的带余除法。

定理9（带余除法定理）　设$f(x)$、$g(x)$是某数域上的任意两个多项式，其中$g(x)\neq0$，那么存在着唯一的一对多项式$q(x)$及$r(x)$，使得

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x).$$

其中$r(x)=0$或者$r(x)$的次数低于$g(x)$的次数。

例如：$f(x)=x^4+3x^3-2x^2+5x-1$，$g(x)=x+2$，那么由$f(x)$除以$g(x)$所得的商式和余式，可以求得$q(x)=x^3+x^2-4x+13$，$r=-27$。这就是

$$x^4+3x^3-2x^2+5x-1$$
$$=(x+2)(x^3+x^2-4x+13)-27.$$

（2）综合除法．已知某数域上的多项式$f(x)$和$g(x)$，为了求出$q(x)$和$r(x)$，就要用到多项式除以多项式的方法．求得的商是$q(x)$，余式是$r(x)$。

做多项式除法时，如果除式$g(x)$是关于x的一次二项式，就是$g(x)=ax+b$（$a\neq0$），可以有一种简便的方法进行除法运算，这种方法叫做综合除法。下面我们将从两种情况，介绍这种方法。

首先设除式$g(x)$的一次项系数是1，即$g(x)=x-a$时，

多项式的除法。

我们先举一个实例：

设 $f(x)=2x^4+14x+4-7x^3$，

$g(x)=(x-2)$。

求$q(x)$和$r(x)$。

利用多项式除以多项式的方法有

$$
\begin{array}{rl}
2x^4-7x^3+\quad+14x+4 & \left|\ x-2\right. \\
-)\ 2x^4-4x^3\qquad\qquad & \left|\ \overline{2x^3-3x^2-6x+2}\right. \\
\hline
-3x^3\qquad\qquad & \\
-)\ -3x^3+6x^2\qquad & \\
\hline
-6x^2+14x\quad & \\
-)\ -6x^2+12x\quad & \\
\hline
2x+4 & \\
2x-4 & \\
\hline
8 &
\end{array}
$$

由此得商式$q(x)=2x^3-3x^2-6x+2$，余数$r=8$。

在做上面除法时，需要把被除式$f(x)$及除式$g(x)$一律按x的降幂排列，缺项的位置留出来，仔细地观察，可以发现运算的过程以及所得的商式、余式仅仅和$f(x)$及$g(x)$的系数有关。假如在运算中把字母x去掉，只依次写出各项的系数，缺项补“0”，那么由各数字所在的位置，便能指出它是哪一项的系数。于是，上面的除法可以写成如下的形式：

$$
\begin{array}{rl}
2-7+0+14+4 & \left|\ 1-2\right. \\
-)\ 2-4\qquad\qquad & \left|\ \overline{2-3-6+2}\right. \\
\hline
-3+0\qquad &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
-)\ -3+6\qquad\qquad \\
\hline
-6+14\quad \\
-)\ -6+12\quad \\
\hline
2+4 \\
-)\ 2-4 \\
\hline
8
\end{array}
$$

所以所得的商式$q(x)=2x^3-3x^2-6x+2$，余数$r=8$。

我们看到，这样的除法比一般的多项式除法简便，但是仍然有重复多余之处，例如每一次用商的数字与除式的第一个数字相乘的积总等于被除式的第一个数字或所得余式中的第一个数字，当然这个数字可以省略，又如被减式与减式的系数相隔较远，可以把它们紧结起来，从而把上面的除法写成如下的形式：

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 2-7+0+14+4 & \underline{1\ -2} \\
-) & -4+6+12-4 & 2\ -3-6+2 \\
\hline
 & -3-6+2+8 &
\end{array}
$$

以上所做的除法仍然可以进一步简化，因为除式第一项系数是1，某项除以1，它的商仍是这个数，所以除式中的第一项系数1可以省去不写．又因为商式第一项系数2等于被除式第一项的系数，商式第二项系数等于第一余式的第一项系数等等，所以把被除式第一项系数2写在下面以后，商式在做减法的过程中，已经写出来了，这样除法便写成下面形式：

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 2-7+0+14+4 & -2 \\
-) & -4+6+12-4 & \\
\hline
 & 2-3-6+2+8 &
\end{array}
$$

所以$q(x)=2x^3-3x^2-6x+2$，$r=8$。

在以上的运算过程中，把减法再改成加法为此把除式中-2改成2，这样除法成为：

$$\begin{array}{rl|l} & 2-7+0+14+4 & 2 \\ +) & -4+6+12-4 & \\ \hline & 2-3-6+2+8 & \end{array}$$

以上这种形式的除法叫做综合除法，当除式是$x-a$时，运算起来很方便。

【例 1】 求x^4-1除以$x+3$所得的商式和余式。

解：

$$\begin{array}{rl|l} & 1+0+0+0\quad -1 & -3 \\ +) & -3+9-27+81 & \\ \hline & 1-3+9-27+80 & \end{array}$$

$\therefore\ q(x)=x^3-3x^2+9x-27$，$r=80$。

【例2】 求$x^4-4xy^3+3y^4$除以$x+y$所得的商式和余式。

解：

$$\begin{array}{rl|l} & 1+0+0-4+3 & -1 \\ +) & -1+1-1+5 & \\ \hline & 1-1+1-5+8 & \end{array}$$

$\therefore\ q(x)=x^3-x^2y+xy-5y^3$，$r(x)=8y^4$。

下面再研究除式的一次项系数不是 1 的情况，即设$g(x)=ax+b(a\neq 0,1)$，用$g(x)$去除$f(x)$所得的商式是$Q(x)$，余式是$R(x)$，于是必有

$$f(x)=(ax+b)Q(x)+R(x)$$

$$=a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R(x)$$

$$=(x+\frac{b}{a})aQ(x)+R(x)$$

这就是说用$x+\frac{b}{a}$去除$f(x)$时，所得的商是用$ax+b$去除$f(x)$所得商的a倍，而余式不变．这样用$ax+b$去除多项式$f(x)$，可以先用$x+\frac{b}{a}$去除$f(x)$，将所得的商除以a，就得到用$ax+b$除$f(x)$的商，而余式不变．

【例 3】 求$4x+3$去除$4x^3-5x^2+6x+3$所得的商式和余式．

解：先求$x+\frac{3}{4}$去除$4x^3-5x^2+6x+3$的商式和余式．

$$\begin{array}{rl} 4-5+6+3 & \Big| -\frac{3}{4} \\ +)\quad -3+6-9 & \\ \hline 4-8+12-6 & \end{array}$$

即商式是$4x^2-8x+12$．余数是-6．

再将商式除以4，就得到用$4x+3$除$4x^3-5x^2+6x+3$所得的商．$(4-8+12)\div 4=1-2+3$

所以商$Q(x)=x^2-2x+3$，余数$r=-6$．

（3）余数定理．用$x-a$去除多项式$f(x)$所得的余数，可以不通过综合除法去求，我们有下面的重要定理做保证．

定理10（余数定理）用$x-a$去除多项式$f(x)$，所得的余数是$f(a)$．

例如求$x-1$去除多项式$f(x)=x^5-3x+1$所得的余数．

解：因为$f(1)=-1$，所以余数$r=-1$．

由余数定理可以得到以下因式定理，它在因式分解中起着重要的作用。

定理11（因式定理）　$x-a$能够整除多项式$f(x)$的充分必要条件是$f(a)=0$。

【例4】　当k为何值时，多项式$f(x)=5x^4-kx+2x+2k+1$能够被$x-1$整除

解：由因式定理，多项式$f(x)$能够被$x-1$整除的充要条件是$f(1)=0$。

由　$f(1)=5-k+2+2k+1=k+8$

得　$k+8=0$

$k=-8$

所以当$k=-8$时，有$f(x)$能够被$x-1$整除。

如果$f(x)$在$x=a$时，有$f(a)=0$，就称$x=a$是$f(x)$的一个根。

由因式定理可以推出以下推论。

推论1　$x=a$是多项式$f(x)$的根的充分必要条件是$x-a$是$f(x)$的一个因式。

推论2　设$f(x)$是一个n次多项式，那么它的一次因式最多有n个。（$n\geqslant1$）

（4）多项式的恒等。

定义6　某数域上的两个多项式$f(x)$和$g(x)$，如果不论用这个数域中任何数a代替x，都有$f(a)=g(a)$，那么多项式$f(x)$和$g(x)$叫做恒等，记为

$$f(x)\equiv g(x)。$$

判断两个多项式的恒等有以下的定理：

预备定理　某数域中n次多项式（$n\geqslant1$），在这个数域

中的根，最多有n个，重根按重数计算。

定理12　如果多项式$f(x)$和$g(x)$都是某数域中的n次多项式，且它们对$n+1$个不同的数ai（$i=1, 2, 3, \cdots, n+1$）有相同的值，即$f(ai)=g(ai)$，$i=1, 2, \cdots, n+1$，那么$f(x)\equiv g(x)$。

在实数域中多项式恒等有以下定理：

定理13　对于一切x的实数值，多项式$f(x)$恒等于零的充要条件是它的一切系数都等于零，即如果$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\equiv 0$，那么有$a_n=a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_1=a_0=0$。反之也成立。

定理14两个实系数多项式恒等的充要条件是它们的对应项系数相等。

（五）不可约多项式的判定

在分解因式时，往往会遇到把一个多项式分解到某个程度以后，还能不能继续再分下去的问题，而这个问题又是很难解决的，现在我们专来研究这个问题。

多项式的因式分解，主要讨论两个基本问题：

1）怎样判断一个给定的多项式是否可约？

2）如果一个多项式可约，如何分解？

第二个问题属于多项式因式分解的方法，在二去解决，在这里我们讨论第一个问题。

在一般的数域中讨论第一个问题，是比较困难的，就是说没有一个一般的方法判断在一般数域中，多项式是否可约，我们只在复数域、实数域和有理数域中讨论这个问题。

（1）复数域定理15　复数域上任何次数$n\geqslant 1$的多项