

形位误差测量技术

专 辑

下 集

《计量技术》编辑部编

内 容 提 要

本书是《计量技术》编辑部为厂矿企业基层计量人员、检验人员和检定人员贯彻形位误差国家标准而专门编辑出版的。书中介绍了一些具有实用价值的测试方法。其中包括导轨的直线度、任意方向上的直线度、圆环状工件的平面度、圆度、圆柱度、键槽对称度、平行度、垂直度和轮廓度等生产中经常遇到的测量、数据处理和精度分析方面的问题,可作为工作中的参考,或作为学习班的参考材料,也可供大专院校师生和科研系统的科技人员阅读。全书约30余万字,分上、中、下三集出版。

《形位误差测试技术》专辑

下集

内 部 发 行

编 辑:《计量技术》编辑部
出版者:国家计量局情报研究所
印刷者:北京通县建新印刷厂

1985年8月出版 定价:0.90元

形位误差测量技术

(专 辑)

一九八五年 下 集 目 录

形状误差

用电算技术代替圆度仪、圆柱度仪的精密调心机构的探讨.....	王丕承 (1)
圆柱度测量及应用最佳一致逼近论的评定方法.....	林洪桦 (5)
圆柱度误差测量中立柱导轨直线度误差的分离.....	梁荣茗 (13)
轴键槽对称度的检测.....	王 麒 (16)
一种面轮廓度误差的测量方法.....	董和昌 (18)

位置误差

未指定基准的孔组位置度误差的计算.....	米曾榜 (22)
直线对直线平行度的一种检测方法.....	石兴志 (26)
测量圆柱度误差时安装误差的分析和计算.....	梁荣茗 (27)
孔轴线任意方向平行度误差的测量.....	马志民 (34)
键槽对称度通用检具的原理与使用.....	王绍忠 姚定根 (38)
花键对称度的测量.....	陈 为 (40)
键槽对称度检测方法探讨.....	刘万海 (42)
轴键槽对称度的测量.....	王 麒 (45)
对《不对称度误差测量的探讨》一文看法.....	张毓诚 (47)
同轴度误差对交点尺寸的影响.....	李得德 (50)
大半径圆弧样板轮廓度误差的测量.....	朱 泉 (51)
大型圆柱体尺寸与形状误差的测量.....	王利生 孙凤山 孙宗文、薛虎生、包菊琴 (54)
形位公差反补偿的利用与检验.....	陈隆德 (59)
圆柱度误差的近似测量方法.....	陈庆华 (61)
用改制内径量表来测量孔的轴线与端面的垂直度.....	周蛟云 (64)
面对线平行度误差的测量.....	董和昌 (65)

用电算技术代替圆度仪、圆柱度仪 的精密调心机构的探讨

一、问题的提出

在圆度、圆柱的测试中,由于试件的评定中心与测量仪器的旋转中心不重合,将使测得的轮廓失真,带来较大的测量误差,这种因错误定心而造成的测量误差,美国在七十二年的国家标准中,给出了一组实验曲线^[1];英国泰勒中心计量室的一份圆度试验报告中也做了定性分析及一般数学推导^[1],我国秦惠明同志也做了这方面的工作^[2]。因此在各国的国家标准中的均规定了试件的评定中心要与测试仪器的旋转中心重合,这就促进了精密调心技术的发展^[3]。当仪器采用电算技术后,是否可找到修正该失真误差的数学模型从而达到省掉精密调心机构的目的呢?这是本文试图解决的主要向题。

二、失真误差的分析

设一个真圆试件,测试状况如图1。图中 C_1 表试件圆心; O_1 表旋转中心; $C_1M_1 =$

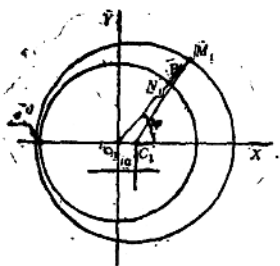


图 1

R (试件半径) $O_1C_1 = a$ (偏心量); $N_1M_1 = P$ (测头测得值); $R - O_1N_1 - a = e'$ (测头预置量)。

先求以 O_1 为极点, O_1M_1 的极坐标方程 (用最小二乘圆作为标定标准)。

由余弦定理得:

$$C_1M_1^2 = O_1M_1^2 + a^2 - 2aO_1M_1\cos\varphi$$

整理得:

$$O_1M_1 = \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\varphi} + a\cos\varphi \quad (1)$$

$O_1M_1 \approx R + a\cos\varphi$ (因 $a \ll R$, 故略去 $a^2\sin^2\varphi$ 项)

又因 $P = O_1M_1 - O_1N_1 = R + a\cos\varphi - O_1N_1$,

设 $e = a + e'$, 则,

$$P = a\cos\varphi + e \quad (2)$$

当 $e = a$ 时,

$$P = a(1 + \cos\varphi) \quad (3)$$

式 (2) 为巴斯喀尔的螺旋线, 式 (3) 为心形线。

再看记录图形上的情况。将 P 放大 K 倍后记录在与旋转轴同步旋转的图纸上, 如图2。图中 O 表记录图纸旋转中心; K 表

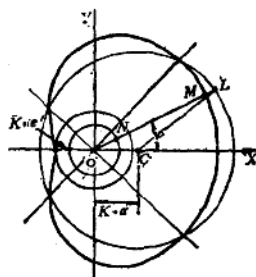


图 2

记录图纸放大倍数; C 表最小二乘圆圆心; LM 表失真误差值; $NM = KP$; $ON = r$ (记录图附加的半径)。此时记录笔尖到 O 的矢径 ρ 的方程为:

$$\rho = OM = K(a\cos\varphi + e) + r \quad (4)$$

由最小二乘原理圆得:

$$\begin{cases} l = \frac{\sum \rho_i}{n} \\ X_c = \frac{2\sum x_i}{n} = \frac{2\sum \rho_i \cos \varphi_i}{n} \\ Y_c = \frac{2\sum y_i}{n} = \frac{2\sum \rho_i \sin \varphi_i}{n} \end{cases}$$

由极坐标积分公式有:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\varphi \\ S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [K(a \cos \varphi + e) + r]^2 d\varphi \\ &= \pi(K^2 e^2 + \frac{1}{2} K^2 a^2 + 2Kre + r^2) \end{aligned}$$

且有 $S = \pi l^2$, 则

$$\begin{aligned} l^2 &= (Ke)^2 + \frac{1}{2} (Ka)^2 + 2Ker + r^2 \\ &= (r+Ke)^2 + \frac{1}{2} (Ka)^2 \\ l &= \sqrt{(r+Ke)^2 + \frac{1}{2} (Ka)^2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} X_c &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [K(a \cos \varphi + e) + r] \\ &\quad \times \cos \varphi d\varphi = Ka \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} Y_c &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [K(a \cos \varphi + e) + r] \\ &\quad \times \sin \varphi d\varphi = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

当设 C 为极心时, CM 的方程为:

$$\begin{aligned} CM^2 &= \rho^2 + (Ka)^2 - 2\rho \times Ka \times \cos \varphi \\ &= (r+Ke)^2 + (Kas \sin \varphi)^2 \end{aligned}$$

$$CM = \sqrt{(r+Ke)^2 + (Kas \sin \varphi)^2}$$

失真误差 Δ 为

$$\begin{aligned} \Delta &= CM - l \\ &= \sqrt{(r+Ke)^2 + (Kas \sin \varphi)^2} \\ &\quad - \sqrt{(r+Ke)^2 + \frac{1}{2} K^2 a^2} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{d\Delta}{d\varphi} = \frac{(Ka)^2 \sin 2\varphi}{2\sqrt{(r+Ke)^2 + (Kas \sin \varphi)^2}}$$

令 $d\Delta/d\varphi = 0$, 则只有 $(Ka)^2 \sin 2\varphi = 0$ 时, Δ 有极值 ($\varphi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$).

$$\begin{aligned} \Delta_{90^\circ} &= \Delta_{270^\circ} = \sqrt{(r+Ke)^2 + (Ka)^2} \\ &\quad - \sqrt{(r+Ke)^2 + \frac{1}{2} K^2 a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \Delta_{180^\circ} = \sqrt{(r+Ke)^2} \\ &\quad - \sqrt{(r+Ke)^2 + \frac{1}{2} K^2 a^2} \end{aligned}$$

由失真引起的误差值为:

$$\begin{aligned} \delta &= (\Delta_{90^\circ} - \Delta_0) / K \\ &= \sqrt{(r+Ke)^2 + K^2 a^2} - (r+Ke) \end{aligned} \quad (9)$$

当 $e=a$ 时,

$$\delta \approx [\sqrt{(r+Ka)^2 + (Ka)^2} - (r+Ka)] / K \quad (10)$$

由式 (10) 绘制 $K\delta$ 与 r 及 $K\delta$ 与 Ka 的曲线图分别如图 3、图 4 所示。

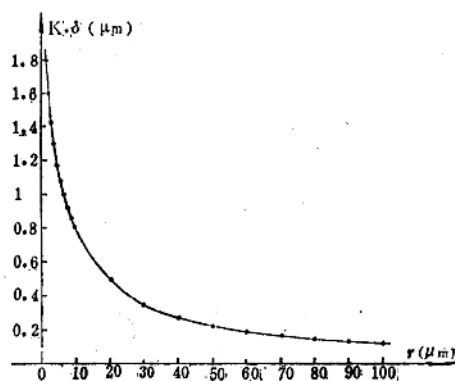


图 3

从图中可以看出, $K\delta$ 随 Ka 的增大而增大, 随 r 的增大而减小, 而 Ka 的影响是第一位的。因此欲提高测量精度, 最有效的办法是减小 a , 而这是很困难的事。

当采用电子计算机技术后, 我们可以用有效数字足够长的中小型计算机, 用增大 r 的办法提高测量精度, 但这种计算机是比较昂贵的。如果选用微处理机, 由于受字长的限制, r 不允许取远大于 a 的值 (调用多字节运算, 由于国内研究的用于最小区域圆评定标准的计算方法运算时间都比较长, 因此也不实用)。因此必须对失真误差进行修正。

表

试件号		1	2	3	4	5
测试项目						
$R_1=O_1M_1i$ (真实坐标值)	公称直径 (mm)	62	60	60	60	60
	$C_1M_{1max}-l$ (μm)	1.4259	1.7864	1.4647	1.6259	3.9363
	C_1M_{1max} 的相位	240°	0°	114°	324°	210°
	$C_1M_{1min}-l$ (μm)	-1.6963	-2.1839	-1.2599	-1.3718	-6.1910
	C_1M_{1min} 的相位	162°	168°	150°	48°	318°
	不圆度值 δ_1 (μm)	3.1219	3.9703	2.7246	2.9977	10.1273
$R_{2i}=R_1-R_{min}+5$ $-X_{C_i}\cos\psi_i-Y_{C_i}\sin\psi_i$	$R_{2max}-l_2$ (μm)	1.4270	1.7839	1.4567	1.6248	3.9377
	R_{2max} 的相位	240°	0°	114°	324°	210°
	$R_{2min}-l_2$ (μm)	-1.6955	-2.1835	-1.2594	-1.3725	-6.1919
	R_{2min} 的相位	162°	168°	150°	48°	318°
	不圆度值 δ_2 (μm)	3.1225	3.9674	2.7161	2.9973	10.1296
偏心量 a (μm)		7.664	13.422	32.680	3.695	12.454
最大失真误差 δ (μm)		2.1381	4.3712	12.1980	0.7524	3.9885
残存误差 ε (μm)		0.3×10^{-3}	2.9×10^{-3}	8.5×10^{-3}	0.4×10^{-3}	2.3×10^{-3}

四、采用小区域圆评定标准时的情况

当最小区域圆圆心与旋转中心偏离了 a 时 (见图7), 此时该两同心圆记录在图纸上的将是两个同心的巴斯咯尔的螺旋线 (见图8)。如果轮廓的极值点正好分别出现在 0° 、 180° 和 90° 、 270° 时, 将有最大失真误差。其关系仍可用式 (10) 来表示。

由于寻找最小区域圆圆心是困难的, 现有的仪器也只能将最小二乘圆圆心调整与仪器旋转中心大体重合, 又由于最小区域圆圆心到最小二乘圆圆心之距离与不圆度值的比值绝大多数小于 0.25, 平均比值为 0.11, 也就是以试件的最小二乘圆圆心进行调整,

而用最小区域圆进行评定时, 还有 $a \approx 0.11 \delta_1$ 的偏心存在。但此时之 a 远小于 r , 因此失真误差可以忽略不计。

同样道理可以处理最大内切圆及最小外接圆评定标准。

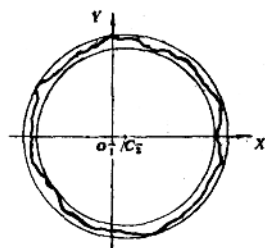


图 7

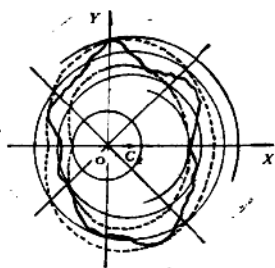


图 8

五、评定圆柱度时情况

当计算圆柱度误差时，通常测定 j 个接面，此时有

$$R_{ij} = P_{ij} - X_{ci} \cos \varphi_i - Y_{ci} \sin \varphi_i \quad (12)$$

分别以 X_{ci} 、 Y_{ci} 为极心，以 R_{ij} 为矢径描述圆柱体，再对该圆柱体计算圆柱度误差，也可达到高精度。

参 考 资 料

- [1] 形位误差测试技术资料汇编，P30。
- [2] 《计量技术》，1974，3，P14。
- [3] 电动量仪，P80，§11-3，哈尔滨工业大学编，1974年。

(北京市机电研究院光电室 王丕承)

圆柱度测量及应用最佳一致逼近论的评定方法

一、问题的提出

圆柱度是反映圆柱表面形状误差较全面而合理的指标。近年来各国都在研究圆柱度测量及其误差值的评定方法。这是由于不论 ISO 和 GB 等标准都规定采用使最大变动量为最小的形状误差评定原则，即应满足所谓最小条件。对圆柱度而言，即为包容实际圆柱表面的两同轴理想圆柱表面间的最小半径差。因而在圆柱度测量，尤其在其误差值的评定上，引起许多困难。致使至今圆柱度测量及其误差的评定方面仍未获得较为一致且成熟的结论，也影响了圆柱度公差的应用。

当前各国对圆柱测量的研究似可归纳为以下几个方面。一种是采用最小二乘原理评定圆柱度误差。然而它与按最小条件评定原则之间不存在确定性的对应关系，且随实际圆柱表面形状而异，当该形状较特殊时它们之间的差别较大。另一种是按最小条件找正测量法，即精确调整圆柱轴线的偏心与倾斜，

使之与量仪回转轴线重合，读出的圆柱度误差为最小。显然其调整找正很麻烦，效率很低。还有一种是采用最优化法评定圆柱度误差。这种方法可以避免精确调整轴线的偏心和倾斜，以及精确地表示出实际半径。却会使目标函数较复杂，数据处理也随之而困难些，特别是理论上还存在所谓多峰问题尚待解决。我国目前正在从事这方面一方面的研究，并已取得一定成果。总之，近来对圆柱度测量及其误差评定展开了多方面研究，又都存在一定问题尚待解决。尽管已取得相当成果，但却未达到一致满意的结果。

因此，本文拟从另一角度探讨圆柱度测量及其误差值评定方法。即根据作者在1977年底召开的全国形位误差测试技术交流会上所提出应用最佳一致逼近论评定形状误差的展成测量方案^[1]，沿圆柱表面的螺旋线作圆柱度的连续动态测量，并以残差最大绝对值为最小的曲线拟合法，按测量所记录的数据评定圆柱度误差值。这里既回避在测量前粗调整轴线偏心与倾斜，也不追求精确表达

实际半径，以使数据处理复杂化。而是在已有圆度仪测试技术经验的基础上，加以扩展应用，以期达到更为实用的目的。

二、基本设想

1、理想情况

若利用测头可作轴向位移的圆度仪来测量圆柱度，并假定在理想情况下经精确找正使理想圆柱轴线与回转轴线重合，即不存在偏心与倾斜时，则测头沿理想圆柱表面的螺旋线相对运动，在长形记录纸上所记录的应为一直线。因为这时半径处处相等而无变动量，如图 1 所示。

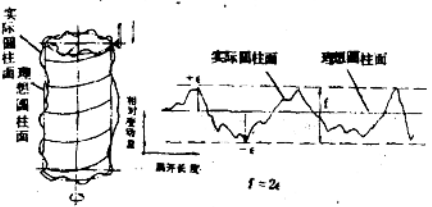


图 1

在上述理想情况下，如果测量的是实际圆柱表面，显然测头将偏离其理想圆柱表面，所记录的圆柱度误差曲线相应地将偏离反映该理想圆柱表面的直线。若假定理想圆柱表面是位于实际圆柱表面之中位，即其同轴包容的外、内理想圆柱表面的对称中点的理想圆柱表面（而非实体之外接触者）。则如图 1 所示，圆柱度误差曲线将围绕理想圆柱直线而波动，且最大偏离点 $+e$ 和 $-e$ 是对称分布的，即其偏离量 e 相同而符号相反。显然这时的圆柱度误差 $f=2e$ 。

在理想情况下，一些常见的典型测量度类型的误差曲线示于表 1。

表 1

锥度			弯曲度		
凸度			椭圆度		
凹度			棱圆度		

实际上，在测试中难以精确找正，即理想圆柱的轴线相对圆度仪回转轴线，既不免有偏心又会有倾斜。这时理想圆柱表面的测试记录就不再是一直线，而研究应以何种形式的函数曲线来描述一般情况下理想圆柱表面的测试记录，正是本文应论述的关键问题之一。

2、一般情况

一般情况是在测试调整中难免存在偏心与倾斜，不可能使理想圆柱轴线与圆度仪回转轴线完全重合。这时在测量理想圆柱表面中所记录的将是由直线而畸变的理想圆柱展成曲线，并设其可用函数 $g(x)$ 来描述。如图 2 所示。

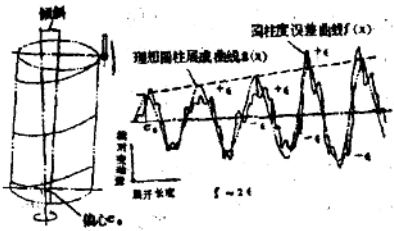


图 2

同理,在测量实际圆柱表面时,其测量度误差曲线 $f(x)$ 将围绕其理想圆柱展成曲线 $g(x)$ 上下波动,且最大偏离点 $+e$ 和 $-e$ 是对称分布于 $g(x)$,而圆柱度误差仍近似为 $f \approx 2e$ 。众所周知,这里的近似性主要由于轴线倾斜而引起的。然而,根据圆度仪多年来测试圆度的经验表明^[2],在适当找正下该轴线倾斜不至于很大,若其它方面处理得当,其影响相对而言可略之。

问题还在于据其确定圆柱误差 f 的理想圆柱展成曲线或函数 $q(x)$ 事先并非已知其参数取决于所调整的偏心和倾斜,也是在测量后待定者。测量所得仅为记录的圆柱度误差曲线 $f(x)$ 。需要根据 $f(x)$ 经适当数据处理在使 $f(x)$ 对 $g(x)$ 的最大偏离量 e 为最小的条件下,求得待定的 $g(x)$ 与 e 。然后才能最后确定圆柱度误差 $f \approx 2e$ 。

可见,不仅是拟定理想圆柱展成函数 $g(x)$ 的形式,而且选定较好的数据处理方法,按最小条件求得 $g(x)$ 的具体参数,是评定圆柱度误差的两大关键环节。

3、测量方案

按上述设想,可采用如下的圆柱度测量方案。所使用的量仪要求其测头相对被测圆柱能作等速回转和轴向位移,如测头可作轴向位移式的圆度仪,通常这类量仪都能对被测圆柱作偏心和倾斜的调整。因而在测量前要求找正被测圆柱一端的偏心及另一端的倾斜,当然并不要求精确找正,而只要保证一端的偏心量小于另一端,且均不很大即可。

测量时,测头沿被测圆柱表面的螺旋线运动,即作相对等速回转和等速轴向位移,这里不采用测量若干个等距截面轮廓曲线的方案,是为了便于连续动态测量,以提高测量效率。同时,也是采用最佳一致逼近论评定圆柱度误差的需要。而根据^[3]、^[4]中的分析表明,只要适当选定螺旋线的螺距,就可以不致过分损失圆柱度误差的信息,能获得良好结果。

沿螺旋线测得的实际圆柱表面的半径相对变动量宜采用长形记录纸来表示出其误差曲线。这里走纸方向本宜以展开长度标示,然而,由于转角与轴向位移量严格成正比,故为简便起见,可用转角 x 为横坐标,以测头的相对变动量为纵坐标,而表示出误差曲线 $f(x)$ 。此即该圆柱度测量方案所得的测试数据。下一步就是根据该测量数据 $f(x)$ 来评定圆柱度误差值 f 。

4、评定方案

在取得圆柱度误差的测试数据 $f(x)$ 后,可采用各种不同的方法来评定其误差值 f 。目前国内多应用最优化方法,如^[5]等。如前已述,由于求得理论上的精确而使目标函数过于复杂,更主要的是将遇到所谓多峰问题,使得所求的误差值有可能并非最小者。因此本文设想应用最佳一致逼近论评定误差值的方案。

当测得圆柱度误差曲线后,已知 $f(x)$ 的点点函数值。若已确定理想圆柱表面的展开函数 $g(x)$ 的形式,例如是某一广义多项式,而仅其参数待定。则按最小条件确定圆柱度误差值 f ,也就是要确定 $g(x)$ 的参数值,使得圆柱度误差曲线 $f(x)$ 对理想圆柱表面的展开函数 $g(x)$ 在测试范围 $[a, b]$ 内的最大偏离量 e 为最小,即

$$e = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = \min \quad (1)$$

于是, $f = 2e$ 。这样的圆柱度误差评定方案在数学上是以广义多项式 $g(x)$ 对函数 $f(x)$ 的最佳一致逼近或常称 Чебышев 逼近问题。

归纳^[6]中关于广义多项式的最佳一致逼近诸定理可知,设函数 $f(x)$ 及函数集 $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_s(x)\}$ 均在 $[a, b]$ 上连续,且满足 Haar 条件,即该函数集线性无关,或 x 任取几个相异值其 Vandermonde 行列式均非零。则广义多项式 $g_n(x) =$

$$\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \text{ 对 } f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上最佳一致逼近}$$

近存在且唯一的充要条件是至少要有 $n+1$ 正负交错的等最大偏离点 $\varepsilon_n = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g_n(x)|$ 。亦即 $f(x)$ 围绕 $g_n(x)$ 至少作 $n+1$ 次振幅为 ε_n 的振荡。由此可见, 只要所确定的理想圆柱表面展开函数 $g_n(x)$ 为满足 Haar 条件的广义多项式, 则其实际圆柱的误差曲线 $f(x)$ 的最佳一致逼近存在且唯一。亦即在理论上可以采用最佳一致逼近的方法唯一地确定符合最小条件的圆柱度误差值 f 。当然在实际应用中要实现最佳一致逼近还有一些具体条件应满足。并且与所采用的具体数据处理方法有关。

综上所述, 采用最佳一致逼近方法评定圆柱度误差值的方案可归纳如下:

①将所记录的实际圆柱表面展开曲线即圆柱度误差曲线 $f(x)$ 作等间隔条件, 令转角 x 离散化为 $x_i, i=1, 2, \dots, N$ 。于是得 N 个测试数据 $f_i=f(x_i), j=1, 2, \dots, N$ 。这样作便于数值计算。

②选定理想圆柱表面沿测试螺旋线的展开函数的形式, 即逼近 $f(x)$ 的广义多项式

$$g_n(x) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x) \quad (2)$$

式中 $\varphi_j(x), j=1, 2, \dots, n$ 应为满足 Haar 条件的连续函数, $a_j, j=1, 2, \dots, n$ 是与测试中调整偏心和倾斜有关的待定系数。并且也作相应的离散化, 即

$$g_{ni} = g_n(x_i) = \sum_{j=1}^n a_j x_j(x_i) \quad (3)$$

$i=1, 2, \dots, N$

注意, 在最佳逼近中, 不同的逼近多项式会得出不同的结果, 逼近值也各异。因此理想圆柱展开函数 $g(x)$ 是否选得恰当极为重要。

③以 $g_n(x)$ 对 $f(x)$ 作最佳一致逼近即 Чебышев 逼近, 则应使其最大偏离量为最小。即在最大残差绝对值。

$$\varepsilon_n = \max_i |f_i - g_{ni}| \quad (4)$$

为最小的条件下求得 $g_n(x)$ 的诸系数 $a_j, j=1, 2, \dots, n$ 及 ε_n 。显然这是极小极大曲线拟合的问题。当然不仅能通过极小极大曲线拟合的数据处理方法来实现, 也可以通过其它方法, 如最优法等求得。因此选择较简便的数据处理方法也是十分重要的。

④确定圆柱度误差 $f=2\varepsilon_n$ 。必要时, 根据残差曲线, 即将所求得的系数 $a_j, j=1, 2, \dots, n$ 代入(3)式求出理想圆柱展开函数值 g_{ni} 并以它减去测试数据 f_i 所得出的

$$r_i = f_i - g_{ni} \quad (5)$$

曲线。并参考表 1 所示出的典型情况, 作进一步的广义多项或回归分析。还可以分解出圆柱的各种典型误差, 以便于作出工艺分析。

三、理想圆柱展开函数的确定

在一般情况下, 圆柱度测试中难免存在轴的偏心和倾斜。要想在理论上求得该情况下理想圆柱表面沿螺旋线的展开函数 $g(x)$ 的精确表达式, 将使问题复杂化。在实践中似无此必要。因为在测试中不可避免的所谓布点误差就已不小。反之, 都要求尽可能简化数据处理, 尤其应确保评定圆柱度误差值的唯一性。同时希望能简明地反映出测试调整中的偏心和倾斜, 及有利于作出圆柱度方面的工艺分析。因此这里着重于求得能满足这些实际要求的近似表达式, 且为了能应用最佳一致逼近的方法而采用广义多项式的形式。

确定理想圆柱展开函数 $g(x)$ 的前提是测试中存在轴线偏心和倾斜, 但为了满足上述实际要求, 在测试中应经适当找正, 使偏心和倾斜均较小, 且两端的偏心方位相同。即按一端找正偏心至较小后, 使工作台向该偏心方位倾斜, 再调整至该倾斜减小, 可使另一端向同方位偏心, 如图 3 所示。此外, 半径变动量即按垂直于量仪器转轴线计, 由于理想圆柱轴线相对其倾斜很小, 故这样处理的影响甚微。

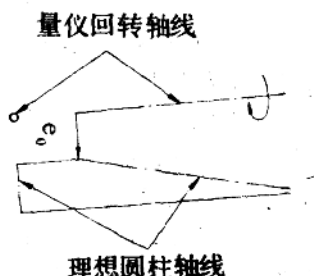


图 3

在上述前提下,理想圆柱轴线的偏心总是一端最小,设为 e_0 ,且渐向另一端作同方位的线性递增,其递增率取决于轴线倾斜率。众所周知,理想圆柱在偏心下回转,圆度仪测头所记录的将是正弦型曲线,其幅值即偏心量。因此该情况下沿理想圆柱表面螺旋线相对运动的测头所记录的将是幅值线性递增的正弦型曲线。其初始幅值为 e_0 ,又随转角 x 或轴向位移而按倾斜率而线性递增。其初相位 ϕ 取决于偏心 e_0 的方位,且保持不变。如图 2 中双点划线所示。

综上所述,沿圆柱表面的螺旋线测量圆柱度,并经适当找正使其一端的偏心与另一端的偏心同方位的条件下。由于转角 x 与轴向位移严格成正比,使得自变量可减至一个,设取为转角 x 。这样并不失其一般性,且是应用最佳一致逼近所必需的要求。因为二维以上的最佳一致逼近向题目前似尚有解法上的困难。于是在此种情况下理想圆柱展开函数 $g(x)$ 可采用幅值线性递增(或减)的正弦型函数来描述,并可展成如下的广义多项式,即

$$\begin{aligned} g(x) &= a_0 + (e_0 + \lambda x) \sin(x + \phi) \\ &= a_0 + a_1 \cos x + a_2 \sin x + a_3 x \cos x \\ &\quad + a_4 x \sin x \end{aligned} \quad (6)$$

式中 e_0 ——基本偏心量或最小偏心变化率;
 λ ——与轴线倾斜率有关的偏心变化率;

a_0 ——理想圆柱表面的位置系数;

a_1, a_2 ——与基本偏心 e_0 及其方位角 ϕ 有关的系数;

a_3, a_4 ——与轴线倾斜率及方位有关的系数。

应强调指出, (6) 式所描述的理想圆柱表面展开函数是有条件的即在图 3 所示的理想圆柱轴线两端偏心同方位的找正条件。而在一般的找正情况下则并不都满足此条件,通常理想圆柱轴线与量仪回转轴线是交叉的,或倾斜方向与基本偏心方位相同。如图 4 所示。这时交叉点处具有最小偏心 e_0 ,

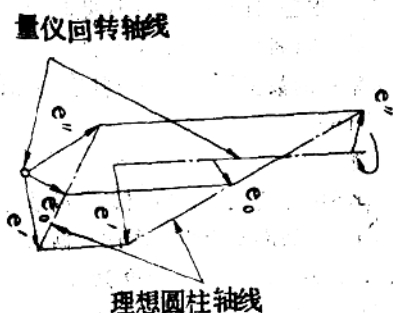


图 4

通常它并不在某一端,而沿轴线的偏心量将交叉点处向两端近似按二次幂函数递增,如图中 e' 和 e'' 。且偏心方位亦作相应地轴线倾斜率而近于线性变化。此种情况下理想圆柱展开函数 $g(x)$ 的形式较复杂。尤其是偏心方位渐变将使之难以展成较简的广义多项式表达,而只能利用更加近似的办法来处理,

因此,更一般的情况下,可近似地令

$$\begin{aligned} g(x) &= a_0 + (e + \lambda x + \eta x^2) \sin(x + (\phi + \alpha x)) \\ &\approx a_0 + a_1 \cos x + a_2 \sin x + a_3 x \cos x \\ &\quad + a_4 x \sin x + a_5 x^2 \cos x + a_6 x^2 \sin x \\ &\quad + a_7 x^3 \cos x + a_8 x^3 \sin x \end{aligned} \quad (7)$$

必要时还可增加更高次项。推导从略，以提高其准确度。由此可见，宁愿略增加找正的要求而采用(6)式描述理想圆柱展开函数 $g(x)$ ，也较之在一般找正下采用更为粗略的(7)式有利。所以本文采用(6)式。

四、数据处理方法

利用(6)式描述理想圆柱展开函数 $g(x)$ 来最佳一致逼近在两端偏心同方位的找正下实际圆柱表面沿螺旋线的测试数据 $f(x)$ ，其数据处理方法是多种的，且均非简易的。通常都需要作逐步逼近或逐次迭代等，也可采用各种最优化方法 [6]、[7]、[8]、[9] [10]。但应力求简便、尽量减少计算量、又满足所需要的精度，且着重顾及数据处理的主要目的和要求。这里则主要是确定圆柱度误差 f 或最佳一致逼近值 e_n 。需要进一步分析测试调整误差与圆柱度加工误差时，还要求得 $g(x)$ 即其各系数 $a_j, j=1, 2, \dots, n$ 。本文所采用的数据处理方法及其理论依据主要参考[6]。

1、问题实质

根据前述圆柱度误差评定方案，离散化后得实际圆柱表面沿螺旋线的测试数据为 $f_i, i=1, 2, \dots, N$ ，即相应于转角为 x_i 时的测得值。又选定以(6)式的广义多项式描述理想圆柱展开函数作相应离散化，则(3)式具体化为

$$g_{ni} = a_0 + a_1 \cos x_i + a_2 \sin x_i + a_3 x_i \cos x_i + a_4 x_i \sin x_i \quad (8)$$

$i=1, 2, \dots, N$

其中诸系数 $a_j, j=1, 2, \dots, n$ 待定。即 g_{ni} 为诸 a_j 的线性函数。于是反映圆柱度误差的(5)式亦为诸 a_j 的线性函数。若令

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0, \quad y_2 = a_1, \quad y_3 = a_2, \quad y_4 = a_3, \\ y_5 &= a_4; \quad A_{1i} = 1, \quad A_{2i} = \cos x_i, \\ A_{3i} &= \sin x_i, \quad A_{4i} = x_i \cos x_i, \\ A_{5i} &= x_i \sin x_i; \quad b_i = f_i \\ i &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (9)$$

则得

$$r_i(y) = \sum_{j=1}^n A_{ji} y_j - b_i, \quad i=1, 2, \dots, N > n \quad (10)$$

当希望圆柱度误差为零时即 $r_i=0$ ，则(10)式即为超定线性方程组，其变量 y 为矢量，即 $\{y_j\}, j=1, 2, \dots, n$ ，而方程数为 $N > n$ 。它不存在唯一精确解。

由此可见，按前述方案评定圆柱度误差实质上是求超定线性方程组。

$$\sum_{j=1}^n A_{ji} y_j - b_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, N > n \quad (11)$$

使 b_i 对 $\sum_{j=1}^n A_{ji} y_j$ 的最大离差为最小，即如同(4)使

$$e_n = \max_i \left| \sum_{j=1}^n A_{ji} y_j - b_i \right| \quad (12)$$

为最小的解 $y_j, j=1, 2, \dots, n$ ，可称之为极小极大解或 Чебышев 解。而圆柱度误差 $f = 2e_n$ 。

2、理论依据

根据逼近论与泛函分析中的若干定理 [6] 可归并而得如下一些本文所采用的数据处理方法的理论依据。

主要依据：超定线性方程组(11)式的极小极大解，只须适当选出其中 $n+1$ 个子方程组，以满足如下两个条件：

$$\textcircled{1} \sum_{j=1}^n A_{ji} y_j - b_i = s_i e_n, \quad s_i = \text{sgn } r_i(y),$$

即要求有 $n+1$ 个正负交错的等最大离差值；

$$\textcircled{2} 0 \in T \{s_i A_{ji} \mid |r_i(y)| = e_n\},$$

即当且仅当原点在 $(s_1 A_{11}, s_2 A_{12}, \dots, s_{n+1} A_{1, n+1})$ 且 $|r_i(y)| = e_n$ 的集合的凸包中，才使 e_n 达到最小。则条件①所示的 $n+1$ 个正方程组的精确解(因它的未知量 $\{y_j\}, j=1, 2, \dots, n$ 及 e_n 亦为 $n+1$ 个，这里 $s_j, j=1, 2, \dots, n+1$ 应已知)就是原超定线性方程组的极小极大解。

实际上, 条件①和②并非独立的而是一致的, 是从不同方面表明同一问题的条件。[6]中已阐明满足 Haar 条件的连续函数组 $\{\varphi_j(x)\}$, $j=1, 2, \dots, n$, 所形成的广义多项式对连续函数 $f(x)$ 作最佳一致逼近的充要条件亦将导致上述条件①和②。同时还表明其偏离量 (5) 式或相应的 (10) 式为凸函数, 其局部极小必为整体极小, 这点很重要。例如, 若采用最优化法确定 (11) 式的极小极大解就不会出现多峰问题。

根据 Caratheodory 定理, n 维线性空间中集合 $\{s_i A_{ji}\}$ 的凸包可表示为其 $n+1$ 个元素的凸线性组合。于是为保证条件②成立, 可要求线性方程组

$$\sum_{i=1}^{n+1} \theta_i A_{ji} = 0 \quad (13)$$

的一个非零解, 且令 $s_i = \text{sgn} \theta_i$, $i=1, 2, \dots, n+1$ 。由于 n 维线性空间中的 $n+1$ 个矢量 $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ 必然线性相关, 即

$$(13) \text{ 式必定成立, 亦即 } 0 = \sum_{i=1}^{n+1} (s_i \theta_i) (s_i A_i),$$

故满足条件②, 并可作为确定符号函数 s_i , $i=1, 2, \dots, n+1$ 的方法之一。

当上述 $n+1$ 个适当的子方程组已定时, 只要再确定 s_i , $i=1, 2, \dots, n+1$, 即可按条件①解出 e_n 及 A_j , $j=1, 2, \dots, n$, 即得到 (11) 式的极小极大解。可见, 问题的关键就在于设法选定该 $n+1$ 个适当的子方程组及相应的符号函数 s_i , $i=1, 2, \dots, n+1$ 。

[6]中还述及一个有用的定理: 若 y 为含有几个未知数 $n+1$ 个线性方程 (11) 式式的最小二乘解, 设该方程组系数矩阵为 n 秩, 则其极小极大解即为满足上述条件①的精确解, 其中 $s_i = \text{sgn} r_i(y)$ 而

$$e_n = \sum_{i=1}^{n+1} r_i^2(y) / \sum_{i=1}^{n+1} |r_i(y)|$$

这证明系数矩阵的秩为 n 的 $n+1$ 个线性

方程, 其最小二乘解与极小极大解的对应线差具有相同的符号。显然, 可采用该特性来确定符合函数 s_i 。

至于 $n+1$ 个适当的子方程的选定, 目前还没有简便方法, 现有各种解法的主要工作量多消耗于此。这里将根据 [6] 中所述的交换定理, 即在满足上述条件②下, 将其中某一元素替换为满足 Haar 条件的原 n 维线性空间的集合中的另一元素, 仍可保证条件②。于是, 可采用某一方法先选出 $n+1$ 个子方程务使之满足条件②, 再逐一替换其中的方程, 直至找出上述能解得极小极大的 $n+1$ 个适当子方程组。

以上即为本文所采用的数据处理方法的主要理论根据。

3. 计算方法

在对圆柱度测量记录作离散化处理后, 且按 (9) 式作记号转化而得 (10) 式或 (11) 式所示的 N 个超定线性方程组。假定其系数矩阵 $(A_{ji})_N$ 为 n 秩且满足 Haar 条件。再按下述步骤求其极小极大解。

1) 求得 (11) 式的最小二乘解, 并计算其残差

$$r_i(y) = \sum_{j=1}^n A_{ji} y_j - b_i,$$

$$i=1, 2, \dots, N > n \quad (14)$$

选出其中 $r_i(y)$ 值最大且符号正负交错的 $n+1$ 个子方程组。这样选出初始的 $n+1$ 个子方程组显然不一定是前述适当的子方程组。然而, 实践经验表明在一般情况下最小二乘解与极小极大解很接近。仅在具有个别凸、凹点时才有较大差别。同时, 如前已述可用以确定 $s_i = \text{sgn} r_i(y)$ 。另外, 最小二乘法本身也是常用以评定圆柱度误差的较好的方法。因此, 首先采用最小二乘法来选取初始的 $n+1$ 个子方程, 再逐一替换使之满足条件①和②而获得极小极大解及最大离差值 e_n 。设初始选取的 $n+1$ 个子方程为

$j=1, 2, \dots, N$ 中的 $k=0, 1, \dots, n$, 所确定的符号函数为 s_k .

2) 按条件①解初始选出的 $n+1$ 个线性方程

$$\sum_{j=1}^n A_{jk} Y_j - b_k = s_k e, k=0, 1, \dots, n \quad (15)$$

求得 $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 及 e , 这时 e 不一定恰为前述的 e_n , 令 $y_0 = -e$ 和 $A_{0k} = s_k$, 则上式可写成矩阵形式

$$A y = b \quad (16)$$

求逆后得 $A^{-1} = C$, 则 $Y = C b$, 即其解为

$$y_j = \sum_{k=0}^n C_{jk} b_k, j=0, 1, \dots, n, \quad (17)$$

其中 C_{jk} 为逆矩阵 C 的诸元素.

3) 将所解得结果 (17) 式代入 (14) 式计算所有 N 个残差, 并取其值最大者.

如 $i=\alpha$ 者为最大值, 即

$$|r_\alpha| \max_i |r_i(y)|$$

4) 检验 $|r_\alpha|$ 是否与 $|y_0|$ 相等; 是, 则 $|y_0| = e_n$, (17) 式所得即极小极大解; 否, 则继续下一步计算.

5) 以 α 替换 (15) 式的 $\{k\}$ 中之一, 且仍应保证条件 ②. 按前述 Caratheodory 定理、交换定理及 $CA=1$. 令 $\mu = \operatorname{sgn} r_\alpha$, 则 $\mu A_{j\alpha}$ 应表示为 $\{s_k A_{jk}\}$ 的线性组合,

如 $A_{j\alpha} = \sum_{k=0}^n \lambda_k A_{jk}$ 或 $\mu A_{j\alpha} = \sum_{k=0}^n (\mu s_k \lambda_k) \times (s_k A_{jk}), j=1, 2, \dots, n$. 写成矩阵形式后易解得

$$\lambda_s = \mu C_{s0} + \sum_{j=1}^n A_{ja} C_{sj}, s=0, 1, \dots, n \quad (18)$$

式中 C_{sj} 为逆矩阵 C 的诸元素. 为保证条件 ②, 应选择 $\{s\}$ 中使比值 $\mu \lambda_s / C_{s0}$ 为最大的 β 加以替换, 即以 α 代替原 $\{k\}$ 中之 β .

6) 按矩阵换行定理, 以 α 替换 β 后, 原逆矩阵 C 相应地变换为 C' . 其元素为

$$\begin{cases} C'_{\beta k} = C_{\beta k} / \lambda_\beta, k=0, 1, \dots, n \\ C'_{jk} = C_{jk} - \lambda_j C'_{\beta k}, j, k=0, 1, \dots, n, j \neq \beta \end{cases} \quad (19)$$

7) 以换行后求得的逆矩阵 C' 的元素代入 (17) 式求得 (16) 式的解 $y_j, j=0, 1, \dots, n$ 后, 重新反复至 3).

如此继续反复计算, 直至检验满足 $|r_\alpha| = |y_0|$ 为止. 这时 $e_n = |y_0|$, 而圆柱度误差 $f = 2e_n$.

上述 1) 中求 (11) 式的最小二乘解和 2) 中求线性的方程组的精确解, 均可调用现有的标准子程序. 其它步骤的计算方法亦不难, 且 [6] 中已证明每一次反复计算 e 均严格地增大, 而不致出现循环不已的现象. 另外, 在 4) 的检验 $|r_\alpha| = |y_0|$ 中可预先给定允许误差, 将更有助于缩小循环次数.

此外, 数据处理中亦可基本上参照 [8] 所给出的程序, 稍加添改以适于评定圆柱度误差需要.

综上所述, 应用最佳一致逼近论拟定圆柱度测量及误差值的评定方法, 可充分利用现有圆柱仪测量技术与经验, 较为实用. 然而, 数据处理装置必需另外配备. 本文所提供的数据处理方法虽要求适当找正, 并取近似而不求理论上的精确, 却能获得避繁就简又不存在所谓多峰问题, 在计算方法上可免于理论误差. 所选定的理想圆柱函数形式可供估计测试安装偏心与倾斜. 将测试记录减去理想圆柱函数后, 所得误差曲线可借以分析判别圆柱度加工误差类型. 但本文选定的理想圆柱函数的形式是否最完善, 计算方法是否最简便等, 均有待今后进一步探讨.

参考资料

- [1] 林洪椿, “应用函数逼近论分析形状误差测量结果的探讨”, 全国形状误差测试技术交流会资料, 1977年.
- [2] “形状误差测试技术资料汇编”, 科学技术文献出版社, 1977年.
- [3] 沢道雅二, 等, “圆柱度误差测量方法的比较”, 国外计量, 1981年2期.

- [4] 塚田忠夫, “圆柱度的新测量法”, 国外计量, 1981年3期。
- [5] 刘中伟、关世楷, “用逐次逼近法求圆柱度、圆柱度误差值”, 计量学报, 第2卷, 第2期, 1981年。
- [6] E. W. Cheney, “Introduction to Approximation Theory”, McGrawHillBookCo. 1966. (已有中译本)
- [7] J. Boothroyd, “Chebyshev CurveFit”, Common. Association for Computing Machinery, 10, 1967, 801~803.

- [8] “电子计算机常用算法”, 科学出版社, 1976年。
- [9] I. Barrodle & C. Phillips, “Solution of an overdetermined system of linear equations in Chebyscheff norm, Association for Computing Machinery, Transactions on Mathematical Software, Vol. 1, 1975, 264~270.
- [10] “计算方法”下册, 北京工业学院出版(教材), 1980年。

(北京工业学院七系 林洪桦)

圆柱度误差测量中立柱导轨直线度误差的分离

国产圆柱度仪进行圆柱度误差测量时, 其工作原理如图1所示。工作台带着工件一起回转, 测头沿立柱导轨上下移动, 自下而上逐个截面测量, 然后将测得的半径变化量进行数据处理, 得出圆柱度误差, 这样测得的结果, 仪器的轴系回转误差和立柱导轨的误差都反映到测头读数上。所谓圆柱度误差实际上是综合误差, 高精度测量时, 必须将试件和仪器的误差分离开来。

对于轴系误差的分离, 不少资料已有介绍。本文只讨论立柱导轨直线度误差的分离方法和用电算法扣除系统误差, 以便提高圆柱

度测量精度。

一、立柱导轨直线度误差的分离

立柱导轨误差的分离可采用两种方法,

(一) 是反向法如图2所示; (二) 是两位法(见图3)。

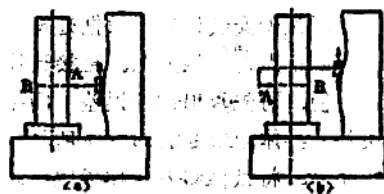


图2

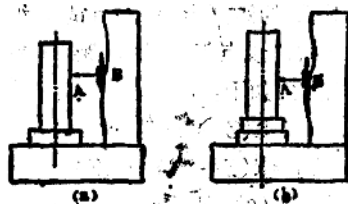


图3

1. 反向法。按图2(a)所示, 先测一道读出有限个测点值, 然后将试件和测头转

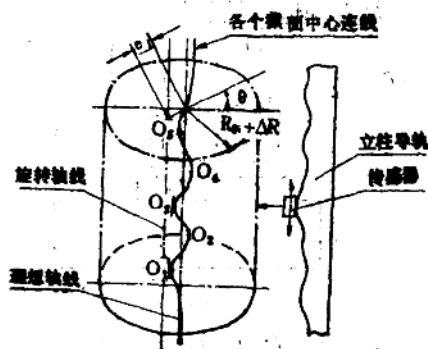


图1

180°, 重复上述测量过程, 读出与前次高度对应的测点值, 设被测表面的曲线为 $R(Z)$, 立柱导轨面的曲线为 $S(Z)$, Z 是测头沿立柱导轨纵向移动距离, 第一种情况测得值为:

$$Y_1 = R(Z) + S(Z) \quad (1)$$

第二种情况的测得值为

$$Y_2 = R(Z) - S(Z) \quad (2)$$

式 (1) 与式 (2) 相加 (减) 后得:

$$R(Z) = (Y_1 + Y_2) / 2 \quad (3)$$

$$S(Z) = (Y_1 - Y_2) / 2 \quad (4)$$

用上述方法可以将工件和导轨的误差分离开来, 但是该法是要两次安装试件和测头, 会带来安装误差, 另一方面, 由于测头反向, 测杆的伸出量大, 对精度有影响。当轴系精度较低时, 需要作误差分离, 就用反向法, 因为反向一次, 可以同时解决轴系和导轨的误差分离, 节省调正时间, 如果轴系精度较高, 不必进行误差分离, 只作立柱导轨的误差分离。用反向法不如用两位法方便。

2. 两位法。该方法是由多步法简化而来, 工件置于转台上, 找正后测量一次母线直线性, 然后将试件沿 Z 坐标平移一定距离, 再测一次母线直线性, 因测头不须重新安装, 可以减少安装误差, 数据处理也比较容易, 所以重点讨论该方法。直接计算导轨误差, 可先算出试件误差, 间接算出导轨误差。具体测量方法如图 4 所示, 第一位置测完后, 将试件相对立柱导轨纵向移动一定距离 δZ , 再进行第二次测量。在第一位置上被测表面 $R(Z)$ 上的一点对应于立柱导轨面 $S(Z)$ 的距离为 Y_1 , 当试件纵向移动 δZ 之后, 该点与 $S(Z)$ 的距离为 Y_2 , 用数学表达式如下:

$$Y_1 = R(Z) + S(Z) \quad (5)$$

$$Y_2 = R(Z + \delta Z) + S(Z) \quad (6)$$

由式 (5)、(6) 可得

$$\Delta Y = Y_2 - Y_1 = R(Z + \delta Z) - R(Z) \quad (7)$$

式 (7) 的参数与立柱导轨无关, 该式可用 n 次多项式表示, 即

$$R(Z) = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots + a_n Z^n \quad (8)$$

$$R(Z + \delta Z) = a_0 + a_1 (Z + \delta Z)$$

$$+ a_2 (Z + \delta Z)^2 + \dots + a_n (Z + \delta Z)^n \quad (9)$$

由式 (9)、(8) 为:

$$\Delta Y = a_1 [(Z + \delta Z) - Z] + a_2 [(Z + \delta Z)^2 - Z^2]$$

$$+ \dots + a_n [(Z + \delta Z)^n - Z^n] \quad (10)$$

测量一系列的点 $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$, $m \geq n$, 在 m 个联立方程, 按最小二乘原理可解得其系数 a_i , 从而得到试件表面曲线数值, 设测点 $(E_1, \Delta y_1), (E_2, \Delta y_2), \dots, (E_n, Y_n)$, 如果点 $(E_1, \Delta y_1)$ 正好在直线,

$$\Delta y = a_1 [(Z + \delta Z) - Z] + a_2 [(Z + \delta Z)^2 - Z^2] \text{ 上,}$$

则有

$$\Delta y_1 - a_1 [(Z_1 + \delta Z) - Z_1] - a_2 [(Z_1 + \delta Z)^2 - Z_1^2] = 0 \quad (11)$$

这时, 式 (11) 准确地反映了 Δy_1 与 Z_1 的关系, 如果点 $(\Delta y_1, Z_1)$ 不在该直线上, 则有

$$f_1 = \Delta y_1 - a_1 [(Z_1 + \delta Z) - Z_1] - a_2 [(Z_1 + \delta Z)^2 - Z_1^2]$$

同理可得:

$$\begin{aligned} f_2 &= \Delta y_2 - a_1 [(Z_2 + \delta Z) - Z_2] \\ &\quad - a_2 [(Z_2 + \delta Z)^2 - Z_2^2] \\ &\vdots \\ f_n &= \Delta y_n - a_1 [(Z_n + \delta Z) - Z_n] \\ &\quad - a_2 [(Z_n + \delta Z)^2 - Z_n^2] \end{aligned}$$

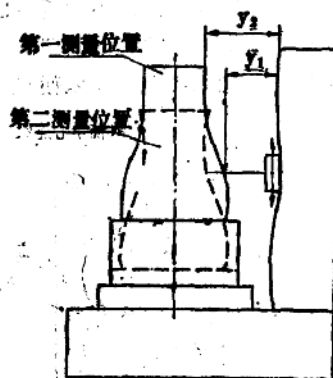


图 4

$f_1, f_2, \dots, f_n$ 表示用函数式 (11) 反映 Δy_i 与 Z_i 之间的关系时所产生的偏差, 根据最小