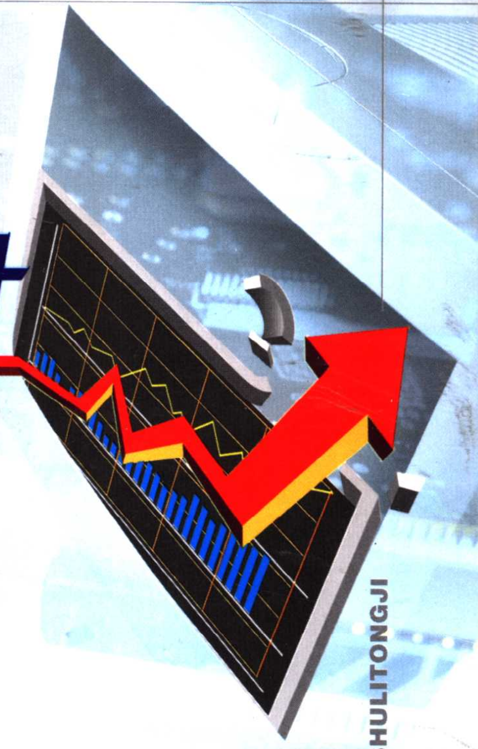
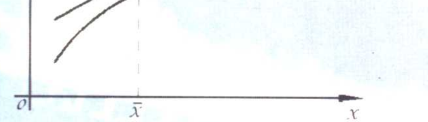
$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

数理统计



马 玲 高运良 编著

SHULITONGJI



煤炭工业出版社

数 理 统 计

马 玲 高运良 编著

煤 炭 工 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

数理统计/马玲，高运良编著．—北京：煤炭工业出版社，2002

ISBN 7-5020-2207-4

Ⅰ．数…　Ⅱ．①马…②高…　Ⅲ．数理统计　Ⅳ．O212

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 049166 号

数　理　统　计

马　玲　高运良　编著

责任编辑：李　振　祥

*

煤炭工业出版社　出版发行

（北京市朝阳区芍药居 35 号　100029）

利森达印务有限公司印刷

*

开本 850×1168mm $^1/_{32}$　印张 10 $^1/_2$

字数 270 千字　印数 1—1,000

2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷

社内编号 4978　定价 22.00 元

内 容 简 介

本书是在中国矿业大学(北京校区)硕士研究生公共课程《高等工程数学—数理统计》及《数理统计讲义》基础上，经多年使用后进一步修改、补充而编成出版. 全书共六章，主要内容有：概率论概要，数理统计基本概念与抽样分布，参数估计，假设检验，回归分析，方差分析. 书中有较多的例题，各章配有一定量的习题，并在书末附有答案. 另外，本书还有 3 个附录.

本书可作为高等工科院校非数学专业的硕士研究生的数理统计课教材，也可作为本科生为了拓宽和加深概率论与数理统计课所学内容的参考书，还可作为科技人员自学用书.

前　言

数理统计是应用数学中最重要、最活跃的学科之一，它的应用越来越广泛，在国民经济和科学技术中的地位越来越显得重要．因此，作为科学和工程技术人员，特别是工科研究生，应该具备数理统计的基本知识．本书是根据工科硕士研究生课程的特点，结合我校近20年对该门课程的教学实践编写而成．本书既可作为工科数学研究生数理统计课程的教材，也可作为工科院校本科学生学习数理统计课程的教学参考书，还可作为科学、工程技术人员的自学读物．

本书注重介绍各种数理统计的基本理论、基本方法和基本技巧，对于重要的定理给予必要的数学推导，有些定理还给予了注解．为了方便读者学习，在第一章简单介绍了概率论的基本内容，在附录Ⅰ简单介绍Bayes学派的统计推断思想，附录Ⅱ简单介绍与本课程有关的矩阵知识，在附录Ⅲ介绍了Γ函数和B函数．本书力求解释数理统计的各种方法，每种方法都举出实例，并详细解答．每章后均附有一定数量的习题，并在书末给出参考答案．本书稿虽经多次修改，但限于编者的水平，仍会有缺点和错误，敬请专家和读者批评指正．

本书的出版，得到中国矿业大学（北京校区）研究生院的支持和资助、基础科学学院数学系的大力支持和鼓励，以及煤炭工业出版社的通力合作．在此一并表示感谢．

目　录

第一章 概率论概要

概率论是数理统计的理论基础，为了能更好地掌握数理统计的基本理论、基本方法和基本技巧，我们在本章扼要地介绍概率论的基本概念、定理与公式.

§1.1 概 率 空 间

§1.1.1 随机事件、样本空间与事件域

定义 1.1 设 E 是一个随机试验，E 的每一个不能再分或无需再分的可能结果称为试验 E 的基本事件. 试验 E 的全体基本事件所组成的集合称为样本空间，用 Ω 表示. 事件是样本空间 Ω 的子集，用英文字母 A、B、C 等记之.

将事件视为集合，则可将全部集合运算规则引入事件运算，其概率论意义如表 1-1.

表 1-1 概 率 论 意 义

记 号	概 率 论 意 义
Ω	必然事件
ϕ	不可能事件
$\{\omega\}$ $(\omega\in\Omega)$	基本事件（ω 称为样本点）
$A\subset B$	若事件 A 发生必导致事件 B 发生
$A=B$	事件 A 与 B 相等（$A\subset B$ 且 $B\subset A$）
$A\cup B$	事件 A 与 B 至少有一个发生
$A\cap B$ (AB)	事件 A 与 B 同时发生
$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$	事件（列）A_i（$i=1$，2，…）至少有一个发生

续表

记　号	概　率　论　意　义
$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$	事件（列）A_i（$i=1, 2, \cdots$）同时发生
$A-B$	事件 A 发生而 B 不发生
$AB=\phi$	事件 A 与 B 不相容或互斥（不能同时发生）
$\overline{A}=\Omega-A$	事件 A 的对立事件

事件运算满足以下运算律：

交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

结合律：$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

差的运算：$A-B=A\overline{B}$.

De-Morgan 律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}；\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

定义 1.2　设 Ω 是样本空间，$\mathscr{F}$ 是由 Ω 的一些子集为元素所组成的集合，如果满足下列条件：

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$；

(2) 若 $A\in\mathscr{F}$，则 $\overline{A}\in\mathscr{F}$；

(3) 若 $A_n\in\mathscr{F}$，$n=1, 2, \cdots$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\in\mathscr{F}$，则称 $\mathscr{F}$ 为事件域，$\mathscr{F}$ 中的元素称为事件.

§1.1.2　概率的定义与性质

定义 1.3　设 Ω 是随机试验的样本空间，A 为随机事件，$P(A)$ 为定义在事件域 $\mathscr{F}$ 上的实函数，若 $P(A)$ 满足

(1) 非负性：$P(A)\geqslant 0$，对 $A\in\mathscr{F}$；

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$；

（3）可列可加性：若 $A_i\in\mathscr{F}$，$i=1, 2, \cdots$，且 $A_iA_j=\phi$ $(i\neq j)$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率，Ω、$\mathscr{F}$、P 三者作为一个有序整体称概率空间，记为 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

概率的性质：

（1）$P(\phi)=0$.

（2）有限可加性：对两两互斥的有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

（3）$P(\overline{A})=1-P(A)$.

（4）若 $A\subset B$，则有 $P(A)\leqslant P(B)$；

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

（5）加法公式：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

（6）多退少补原理（一般加法公式）：

设 A_1、A_2，$\cdots$，A_n 为任意有限个事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

（7）连续性定理：若 $A_n\supset A_{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$，$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\phi$，则 $\lim_{n\to\infty}P(A_n)=0$；

若 $A_n\subset A_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$

§1.1.3 条件概率与事件的独立性

定义 1.4 设 A、B 是两个事件，且 $P(B)>0$，则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

(1) 概率的乘法公式:

若 $P(B)>0$,则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$.

(2) 全概率公式:

若事件 A_1, A_2, …, A_n 两两互斥，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$, $P(A_i)>0$, $i=1,2,\cdots,n$, 则对任一事件 B 有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i).$$

注意：把 A_1, A_2, …, A_n 换为 A_1, A_2, …, A_n, …或者把 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$ 换为 $B\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\left(B\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)$，全概率公式仍然成立.

(3) Bayes 公式:

在全概率公式的条件下，若 $P(B)>0$，则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)},i=1,2,\cdots,n.$$

全概率公式中的注意，对 Bayes 公式也适用.

定义 1.5 对于两个事件 A，B，若有

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称 A，B 相互独立（简称独立).

定义 1.6 设 A_1, A_2, …, A_n 是 n 个事件，若对任意的 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 和任意一组 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$, 有

$$P(A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

成立，则称 n 个事件 A_1, A_2, …, A_n 独立.

定义 1.7 设 A_1, A_2, …, A_n, …是事件列，若它们之中的任意有限个事件独立，则称事件列 A_1, A_2, …, A_n, …独立.

事件独立性的性质:

若 A_1, A_2, …, A_n 独立，则:

(1) A_1', A_2', …, A_k'独立，其中 $A_k' = A_k$ 或 $\overline{A}_k$；

(2) 将事件 A_1, A_2, …, A_n 分割为 k 组，设 B_1, B_2, …, B_k 分别由第 1, 2, …, k 组内的 A_i 经过并、交、差、求余等运算所得，则 B_1, B_2, …, B_k 独立.

§1.2 随机变量及其分布

§1.2.1 一维随机变量的分布

定义 1.8 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一个概率空间，而 $X = X(\omega)(\omega \in \Omega)$ 是定义在样本空间 Ω 上的单值实函数，若对一任一实数 x，基本事件 ω 的集合 $\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}$ 都是一随机事件，即 $\{\omega : X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{F}$，则称 $X = X(\omega)$ 为一个随机变量.

1. 分布函数及其性质

定义 1.9 随机变量 X 取值小于等于 x 的概率称为 X 的分布函数，记为 $F(x)$，即

$$F(x) = P\{X \leqslant x\}.$$

其中 $\{X \leqslant x\}$ 是 $\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}$ 的简写.

由定义 1.9 易得：

(1) $F(x)$是单调非降的；

(2) $F(x)$是右连续的，即 $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$；

(3) $F(-\infty) \triangleq \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0; F(\infty) \triangleq \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

这 3 条性质不但是分布函数的必要条件，而且是 $F(x)$ 成为某一随机变量的分布函数的充分条件.

2. 离散型随机变量及其分布列

若随机变量的所有可能的值至多为可列个，则称这种随机变量为离散型随机变量. 离散型随机变量的概率分布规律通常用分布列表示.

设离散型随机变量 X 的所有可能取的值为 $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots$,

X 取各个 x_i 的概率为 p_i，即

$$P\{X = x_i\} = p_i, \quad i = 1,2,\cdots.$$

或列成下表：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

$P\{X = x_i\} = p_i$ 称为随机变量 X 的分布列（或分布律，或概率函数）. 由概率的定义，可知分布列具有下列性质：

（1）$p_i \geqslant 0$，$i=1$，2，…；

（2）$\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

离散型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 可表示为

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \sum_{x_i \leqslant x} P\{X = x_i\} = \sum_{x_i \leqslant x} p_i.$$

3. 连续型随机变量及其分布密度

定义 1.10 若随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 能够表示为某个非负可积函数 $p(x)$ 在区间 $(-\infty, x]$ 上的积分，即

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\mathrm{d}t$$

则称 X 为连续型随机变量，称 $p(x)$ 为 X 的分布密度函数或概率函数.

密度函数 $p(x)$ 具有以下性质：

（1）$p(x) \geqslant 0$；

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1$；

（3）对于 x 轴上的任意区间 S，有

$$P\{X \in S\} = \int_S p(x)\mathrm{d}x;$$

（4）对于 $p(x)$ 的连续点 x，有

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{P\{x < X \leqslant x + \Delta x\}}{\Delta x},$$

当 $\Delta x>0$，且 Δx 很小时，从而有

$$P\{x < X \leqslant x + \Delta x\} \approx p(x)\Delta x.$$

注意：为了方便起见，我们引入一个对离散型或连续型两种情况通用的概念——概率函数 $p(x)$：若 X 是离散型，则 $p(x)$ 就是 X 的分布列；若 X 为连续型，则 $p(x)$ 为 X 的分布密度.

4. 一些常用的概率分布

离散型：

(1) 二项分布 $B(n,p),0<p<1$，概率函数为

$$p(x) = P\{X = x\} = C_n^x p^x (1-p)^{n-x},$$

$$x = 0,1,2,\cdots,n.$$

(2) (0—1) 分布 $B(1,p),0<p<1$，概率函数为

$$p(x) = P\{X = x\} = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0,1.$$

(3) 几何分布，$0<p<1$，概率函数为

$$P\{X = x\} = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1,2,\cdots.$$

(4) 超几何分布，概率函数为

$$P\{X = x\} = \frac{C_{n_1}^x C_{n_2}^{n-x}}{C_{n_1+n_2}^n}, \quad x = 0,1,2,\cdots,\min(n_1,n_2),$$

n_1，n_2 为正整数，且 $n \leqslant n_1 + n_2$.

(5) Poisson 分布 $P(\lambda),\lambda>0$，概率函数为

$$p(x) = P\{X = x\} = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \quad x = 0,1,2,\cdots.$$

连续型：

(6) 均匀分布 $U_{[a,b]}$，$a<b$，概率函数为

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(7) 指数分布 $\exp(\lambda),\lambda>0$，概率函数为

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

(8) 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，概率函数为