本科电子工程

高等学校
电子信息类
规划教材

随机信号分析

张明友 张扬 编著

UESTCP
电子科技大学出版社

随机信号分析

张明友　张　扬

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

随机信号分析/张明友，张扬编著．—成都：电子科技大学出版社，2002．6
ISBN 7-81065-905-7

Ⅰ．随… Ⅱ．①张… ②张… Ⅲ．随机信号—信号分析—高等学校—教材，Ⅳ．TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 041631 号

内容简介

本书论述了随机信号的理论和工程分析方法。全书共分五章：第一章是随机变量的基本理论；第二章讨论随机过程和随机序列的分类以及分析方法；第四章介绍常用的窄带随机过程的工程应用；第三章和第五章从工程分析角度出发，讨论随机信号通过线性系统和非线性系统。为配合正文，配有较丰富的例题和习题，各章之后还有附录。

本书结合电子信息工程实际，侧重物理概念和分析方法，深入浅出，条理分明。可作为电子信息专业的研究生和本科生的教材，也可供有关工程技术人员作参考书。

随机信号分析

张明友　张　扬　主编

出　　版：电子科技大学出版社　　（成都建设北路二段四号，邮编 610054）
责任编辑：万晓桐　杜　倩
发　　行：新华书店
印　　刷：西南冶金地质印刷厂
开　　本：787×1092　1/16　　印张　13.625　　字数　319 千字
版　　次：2002 年 6 月第一版
印　　次：2002 年 6 月第一次印刷
书　　号：ISBN 7-81065-905-7/TN・46
印　　数：1—3000 册
定　　价：18.00 元

出版说明

为做好全国电子信息类专业“九五”教材的规划和出版工作，根据国家教委《关于“九五”期间普通高等教育教材建设与改革的意见》和《普通高等教育“九五”国家级重点教材立项、管理办法》，我们组织各有关高等学校、中等专业学校、出版社，各专业教学指导委员会，在总结前四轮规划教材编审、出版工作的基础上，根据当代电子信息科学技术的发展和面向 21 世纪教学内容和课程体系改革的要求，编制了《1996—2000 年全国电子信息类专业教材编审出版规划》。

本轮规划教材是由个人申报，经各学校、出版社推荐，由各专业教学指导委员会评选，并由我部教材办协商各专指委、出版社，审核确定的。本轮规划教材的编制，注意了将教学改革力度较大、有创新精神、特色风格的教材和质量较高、教学适用性较好、需要修订的教材以及教学急需，尚无正式教材的选题优先列入规划。在重点规划本科、专科和中专材料的同时，选择了一批对学科发展具有重要意义，反映学科前沿的选修课、研究生课教材列入规划，以适应高层次专门人才培养的需要。

限于我们的水平和经验，这批教材的编审、出版工作还可能存在不少缺点和不足，希望使用教材的学校、教师、同学和广大读者积极提出批评和建议，以不断提高教材的编写、出版质量，共同为电子信息类专业教材建设服务。

电子工业部教材办公室

前　言

《随机信号分析》是高等院校电子类专业的主干专业基础之一。众所周知，通信、雷达、自动控制系统等都是当代重要的信息传输和处理系统。然而，这类系统的信息传输过程中总存在着各种外界干扰和内部噪声，使得所传输的信息具有不确定性(或称随机性)。因此，随机信号和系统的理论与分析方法是这类信息科学技术的重要基础。

本教材系由无线电技术与信息系统教材编审委员会、电子系统编审小组评选审定，并推荐出版，责任编委北京理工大学梅文博教授。

本教材由成都信息工程学院董豹教授承担主审。

本书的参考学时数为50学时。主要内容包括：第一章为随机变量及其统计特性，第二章介绍随机过程和随机序列，第三章介绍随机信号通过线性系统，第四章为窄带随机过程，第五章介绍随机过程通过非线性系统。考虑到本教材的适用对象为电子学与通信学科有关的研究生、本科生和科技人员，所以用“*”号表示的是本科生选学内容。本书各章之间有相对的独立性，使用本教材，可根据教学情况决定取舍。

本书结合工程实际，侧重物理概念与工程分析方法，深入浅出，层次分明。在各章之后备有附录和习题。

本书由张明友编写第一章、第二章和第三章，张扬编写第四章和第五章。张明友统编全稿。

在本教材编写中，成都信息工程学院董豹教授对本书提出了许多宝贵意见和修改建议，在此深表感谢！在编写过程中，还得到了陈天麒教授、向敬成教授和唐斌副教授等同志的帮助和指正，在此也表示感谢！

限于作者水平，书中难免有错误和不当之处，望读者批评指正。

编　者

2002年2月

目　　录

第一章　随机变量及其统计特性

§1.1　引言

自然现象可粗略地划分为确定的、可以预测的一类和随机的、不可预测的另一类。后者我们称之为随机(物理)现象。表示随机现象的数据不能用精确的数学关系式描述，因为这种现象的每次观察都是不一样的。换句话说，任意一次观察只代表许多可能产生的结果之一。随机现象在电子学领域中得到了有效的应用。例如，雷达和通信信号在传输过程中接收到的有用信号总是伴随有四各种途径混入的噪声，而接收机输出端的噪声是随机的，如图1.1所示。在这种场合，即使是在同样条件下进行观察测试，每次观察的结果都是各不相同的，呈现出随机性和不可预测性。例如，由记录仪在第一台接收机输出端所得的记录如图1.1(a)所示。但在“同样的”条件下工作的第二台“同样的”接收机，所进行的相同测量的记录，与前一台所作记录可能不同，如图1.1(b)所示。直至取自“同样的”条件下工作的“无限台同样的”接收机输出端的热噪声记录，如图1.1(n)所示。

表示随机现象的单个时间历程，称为样本函数(在有限时间区间上观察时，称为样本记录)。随机现象可能产生的全部样本函数(或称为全部单个元素)的集合，称为随机过程。可见，随机过程$X(x_k,t)$实际上既是时间t的函数，也是随机试验结果x_k的函数。它有四种不同情况下的意义：

(a)一个时间函数族(t,x_k都是变量)，全部样本函数(或称全部单个元素)的集合，即随机过程；

(b)一个确定的时间函数(t是变量，x_k固定)，即样本函数(或称集的单个元素)；

(c)一个随机变量(t固定，x_k是变量)，也称样本函数集的点集合；

(d)一个确定值(t固定，x_k也固定)。

本书的目的是介绍已在控制和通信工程中获得应用的随机信号和系统的分析方法。按电子工程专业的课程安排，读者已学过概率论课程。尽管如此，简要回顾一下概率论的基本分析方法仍然是有用的。

研究概率论的方法是以集合论为基础，集定义为点(或元素)的集合。直观地讲，一个集合就是一些事物的总和。在概率论中，这些“事物”就是基本事件。由此，我们可以确定任一个具体的点是否为集中的点(或元素)。特别是，实验(或测量)的可能结果组成的点集，常称之为样本空间。随机变量x_k是定义在样本空间上的集函数，即对样本空间上的每一点k，都有$-\infty$至$+\infty$之间的一个实数x_k与之对应。

在概率论中，以不同的方式组合在一起的点集都称为事件。在一定的条件下，每个事件有一个概率函数。也就是说，在相同条件下进行多次重复实验之前，我们可以粗略地预言，什么将要发生，但不能精确地预言它的结果。例如，掷一枚硬币，大约有一半的次数是国徽向上，但在试验前不能预言究竟出现哪一面。增加同一试验的次数，就会发生与某一总的平均

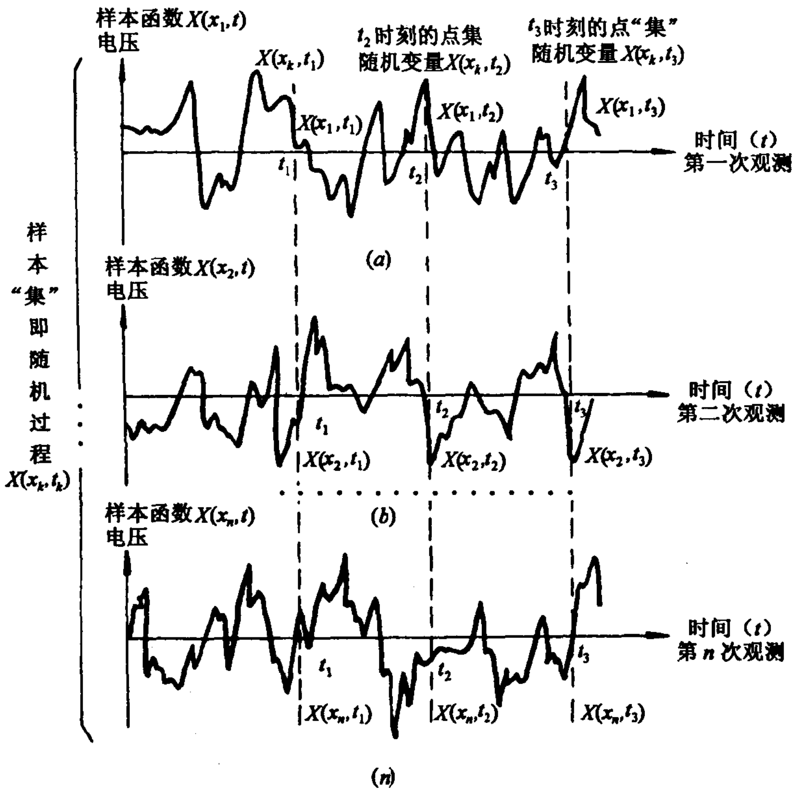

图 1.1　取自相同条件下 n 台“同样的”接收机输出端的热噪声记录

值一致的趋向，称之为统计的规律性，这完全是真实的。在统计的规律中，其数学模型往往是建立在归纳的基础上的，常用的数学研究工具是概率论和数理统计。

§1.2　随机事件概率基本公式的归纳

作为复习，我们将随机事件的简单分类及其概率的基本公式归纳在式(1-1)至式(1-8)中。

下面我们用两个例子来说明式(1-1)至式(1-8)所列部分公式。

例 1-1　盒中有 6 只硅管，4 只锗管。试求：

(1)一次取出 2 只都是硅管的概率；

(2)连续取出 2 只硅管的概率；

(3)连续取出 2 只晶体管，1 只是硅管，1 只是锗管的概率；

(4)取 1 只，放回去，再取 1 只都是硅管的概率；

(5)取三次(每次 1 只，放回去)，有二次是硅管的概率；

(6)连取三次(每次 1 只，不放回去)，有 2 只是硅管的概率；

(7)连取三次(每次 1 只，不放回去)，都是硅管的概率。

- 随机事件
  - 简单事件
    - $P(A)=\dfrac{k}{n}$，$P(A)=1-P(\overline{A})$ (1-1)
  - 复合事件（出现 A 或 B 的新事件）
    - 应用概率的加法定理
    - 互不相容事件：$P(A+B)=P(A)+P(B)$ (1-2)
    - 互相相容事件：$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ (1-3)
  - 复杂事件（由简单事件组成的新事件）
    - 兼有事件（同时发生 $A\cdot B$ 的新事件）
      - 应用概率的乘法定理
      - 独立事件：$P(AB)=P(A)P(B)$ (1-4)
      - 相关事件：$P(AB)=P(A)P(B/A)$ (1-5)
    - 兼有事件的复合事件（上述两事件的混合事件）
      - 全概率公式：$P(A)=\sum\limits_{k=1}^{n}P(B_k)P(A/B_k)$ (1-6)
      - 贝叶斯公式：$P(B_i/A)=\dfrac{P(B_i)/P(A/B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A/B_i)}$ (1-7)
      - 贝努利公式：$P_n(m)=C_n^mP^m(1-P)^{n-m}$ (1-8)

解：(1)利用古典定义：

思考路线：(a)分析题意：从 10 只晶体管里一次取出 2 只，而恰好都是硅管，自然这可看成简单事件。

(b)列式：

$$P=\frac{\text{从 10 只晶体管中取出 2 只硅管可能有的取法数}}{\text{从 10 只晶体管中取出 2 只所有可能的取法数}}$$

所以

$$P=\frac{\text{有利场合数 } m}{\text{总可能场合数 } n}=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{\dfrac{6!}{2!4!}}{\dfrac{10!}{8!2!}}=\frac{1}{3}$$

说明：(i)组合式：$C_n^m=\dfrac{n!}{m!\ (n-m)!}$。

(ii)利用古典定义求概率时，它的条件是：各场合必须是等可能的，有限个互不相容的事件。

(2)利用概率乘法公式：

(a)连续取出就是指取出 1 只不放回去，再取 1 只的兼有事件。

(b)设A_1 为第一次取出 1 只硅管的事件；A_2 为第二次取出 1 只硅管的事件；A_2/A_1为第一次取出 1 只硅管后第二次又取出 1 只硅管的事件。

(c)$P=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2/A_1)=\dfrac{6}{10}\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{1}{3}$。

(3)利用全概率公式：

它可看成是“先取出 1 只硅管再取出 1 只锗管”或“先取出 1 只锗管，再取出 1 只硅管”的复合事件。组成它的上述二个事件又是兼有事件，它们是互不相容的。故

$$P=C_2^1P(A_1)P(A_2/A_1)=2\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{8}{15}$$

说明：这类问题常要乘一个组合数 C_n^m。

(4)利用全概率公式：

由于第一次取和第二次取是相互独立的，于是有：

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{9}{25}$$

(5)利用贝努里公式：

$$P = C_3^2P^2(1-P)^1 = 3 \times \left(\frac{6}{10}\right)^2 \times \frac{4}{10} = \frac{54}{125}$$

说明：贝努里问题的条件是：各项试验都是相互独立的。

(6)利用全概率公式：

(a)连取三次有二次是硅管，有 C_3^2 种情况。如，硅-硅-锗、硅-锗-硅等。

(b)每种情况的概率都一样，以硅—硅—锗为例，有

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_3/A_1A_2) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$$

(c)总概率为各种情况的概率之和，于是得

$$P(A) = C_3^2 \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(7)利用全概率公式：

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$$

说明：由于取的都是硅管，所以只有一种情况：

$$C_m^m = C_2^2 = 1$$

例 1-2　某高炮对飞机进行三次独立的射击，第一次射击的命中率是 0.4，第二次是 0.5，第三次是 0.7。飞机中一弹而坠落的概率为 0.2，中二弹而坠落的概率是 0.6，若中三弹，则必然被击落。

求：(1)射击三弹而击落飞机的概率；

(2)在飞机被击落已经发生的情况下，求飞机中二弹的条件概率。

解：(1)利用全概率公式：

设事件 B_1 为一弹击中飞机；B_2 为二弹击中飞机；B_3 为三弹击中飞机；A 为飞机被击落。

显然，B_1、B_2、B_3 为互不相容事件，应用加法定理和乘法定理，可以求得 $P(B_1)$、$P(B_2)$、$P(B_3)$分别为

$P(B_1)=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36$

$P(B_2)=0.6\times0.5\times0.7+0.4\times0.5\times0.7+0.4\times0.5\times0.3=0.41$

$P(B_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14$

根据题意，有

$$P(A/B_1) = 0.2;\quad P(A/B_2) = 0.6;\quad P(A/B_3) = 1.0$$

应用全概率公式，可得

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A/B_i) = 0.36 \times 0.2 + 0.41 \times 0.6 + 0.14 \times 1.0 = 0.458$$

(2)利用贝叶斯(Bayes)公式：

已知事件 A 已经发生，求 B_2 的概率，应用贝叶斯公式，有

$$P(B_2/A)=\frac{P(B_2)P(A/B_2)}{P(A)}=\frac{0.41\times 0.6}{0.458}=0.537$$

注意：全概率公式是由部分可能性，求总的可能性；贝叶斯公式是由总的可能性，求部分可能性。它们的条件都一样。

§1.3 随机变量及其概率分布

前面我们已提到，随机变量是指一个取值具有随机性的变量。它能随机地取种种数值(但不能准确预言它取什么值)，而对应每一数值或某一范围内的值有相应的概率。随机变量具体地取某一数值为值这事件又是一个随机事件。例如，任意一个人的身高这个物理量是随机变量，而任意找一个 1.7m 身高的的人可能性多大是随机事件。

根据随机变量是可列还是不可列，把随机变量分为：

(1)连续型随机变量：它有无限个可能值，且连续地占据整个取值区内。

(2)离散型随机变量：它全部可能取到的值是有限个或者可列无限多个。

此外，如果随机变量的值是实数，便称为实随机变量；如果随机变量的值是复数，便称为复随机变量；如果函数值是 n 维欧基里德空间中的矢量，便称为矢量随机变量等。本章主要讨论实随机变量。

1.3.1 随机变量的分布函数

为研究随机变量的统计规律性，需知道随机变量的一切可能值；各个可能值所对应的概率；建立随机变量的各可能值与其相应概率之间的各种不同形式的对应关系，即随机变量的分布律。

从概率的观点看，给定了随机变量的分布律，随机变量就可完全描述了。

一、离散型随机变量的分布列

若离散型随机变量 X 的所有可能值为 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，各 x_i 所对应的概率为 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$，即 $P(X=x_i)=P_i$。其关系可列表为：

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P_i	P_1	P_2	$\cdots$	P_n

该表称为随机变量的分布列。它是分布列的一种形式。从“概率论”中已证明，离散型随机变量所有可能值的概率之和等于 1，即

$$\sum_{i=1}^{n}P_i=1$$

二、随机变量的分布函数

分布函数是分布律的另一种形式。它既适用于离散随机变量，也适用于连续随机变量。

定义：随机变量 X 取值不超过 x 的概率 $P(X\leqslant x)$，称为 X 的分布函数。记作 $F_X(x)$，即

$$F_X(x)=P(X\leqslant x)$$

说明：(1)$F_X(x)$表示 X 取值不超过 x 的概率，因为 x 是变量，所以其概率是 x 的函数，

才叫它分布函数。它表示随机点落在任意一点以前的概率，显然它必须是随机点落在 x 以前各点的概率之总和。因此分布函数不是表示某点的概率。

(2)$F_X(a)$表示 X 取值不超过 a 点的概率，它是一个常数，不是分布函数。

(3)$F_X(x)$为什么能全面地描述一个随机变量呢？首先要弄清怎样才能叫做随机变量已知？只要给出了 X 取值的范围，可取哪些值；X 取这些值的概率后，就称随机变量已知。如：

(A)

x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	$\cdots$	$P(X=x_n)$

(B)

x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X\leqslant x_1)$	$P(X\leqslant x_2)$	$\cdots$	$P(X\leqslant x_n)$

也可用图 1.2(a)和图 1.2(b)来说明。

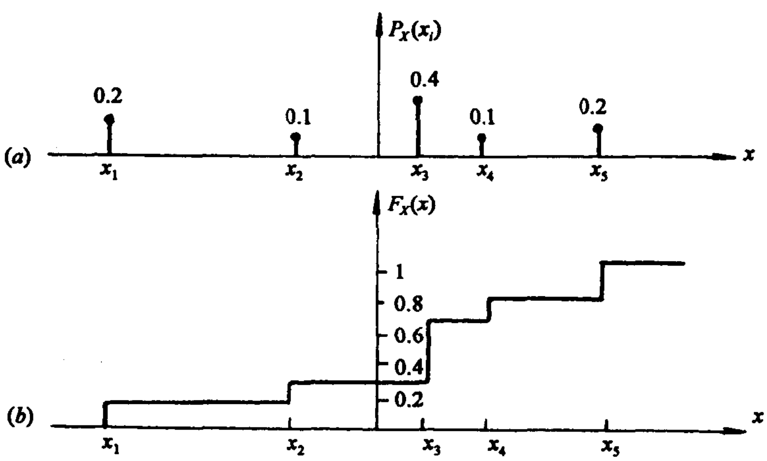

图 1.2　离散的概率分布和概率分布函数

表(A)和图 1.2(a)与表(B)和图 1.2(b)两者不同的是：

$P(X=x_n)$——表示 X 取 x_n 为值的概率；

$P(X\leqslant x_n)$——表示 X 取从 $-\infty$ 到 x_n 各值的概率之总和。

因此 $F_X(x)$能充分而全面地描述一个随机变量。

分布函数的性质：

(1)$0\leqslant F_X(x)\leqslant 1$。任何事件的概率总是在 0～1 之间。

(2)$F_X(+\infty)=P(X<+\infty)=1$。必然事件的概率为 1。

(3)$F_X(-\infty)=P(X<-\infty)=0$。不可能事件的概率为 0。

(4)$P(x_1<X\leqslant x_2)=F_X(x_2)-F_X(x_1)$。

由图 1.2(b)可见

$$F_X(x_2)=P(X\leqslant x_2)=P(X\leqslant x_1)+P(x_1<X\leqslant x_2)$$

故

$$P(x_1<X\leqslant x_2)=F_X(x_2)-F_X(x_1)$$

(5)$F_X(x)$是 x 的单调非降函数。即当 $x_2>x_1$ 时，有 $F_X(x_2)>F_X(x_1)$，因为概率不可能

取负值。

两个随机变量 X 和 Y 的联合分布函数，定义为

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y) \tag{1-9}$$

上式中，事件$(X\leqslant x,Y\leqslant y)$的文氏图如图 1.3$(a)$所示。这里，$X$ 或 Y 的概率分布函数$F_X(x)$和 $F_Y(y)$称为 $F_{XY}(x,y)$的边缘概率分布函数。

(6)离散随机变量的分布函数除满足以上性质外，还具有阶梯形式，阶跃的高度等于随机变量在该点的概率，即

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \leqslant x_i) u(x - x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i u(x - x_i) \tag{1-10}$$

式中：$u(x)$为单位阶跃函数，P_i 为 $X=x_i$ 的概率。

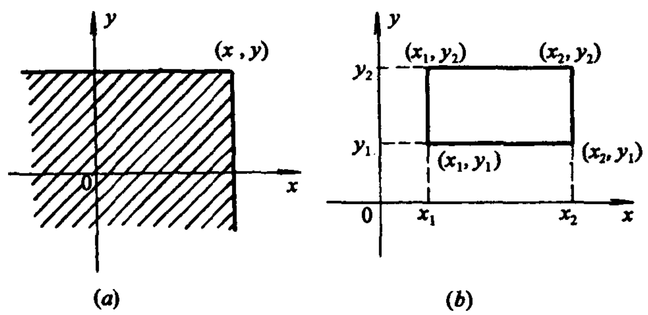

图 1.3　事件$(X\leqslant x,Y\leqslant y)$的文氏图

借助于图 1.3(b)容易算出随机点(X,Y)落在矩形域$[x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2]$的概率为

$$P\{x_1 < X \leqslant x_2, y_1 < Y \leqslant y_2\} = F_{XY}(x_2,y_2) - F_{XY}(x_2,y_1) + F_{XY}(x_1,y_1) - F_{XY}(x_1,y_2)$$

两个随机变量 X 和 Y 的联合分布函数的性质有：

(1) $F_{XY}(x,y)$是 x 或 y 的单调增函数。即对于任意固定 y，当 $x_2>x_1$ 时，$F_{XY}(x_2,y)\geqslant F_{XY}(x_1,y)$；同样，对于任意固定 x，当 $y_2>y_1$ 时，$F_{XY}(x,y_2)\geqslant F_{XY}(x,y_1)$。

(2)对于任意固定 y，　$F_{XY}(-\infty,y)=0$；对于任意固定 x，　$F_{XY}(x,-\infty)=0$。

而

$$F_{XY}(-\infty,-\infty)=0, \quad F_{XY}(+\infty,+\infty)=1$$

(3)二维随机变量(X,Y)关于 X 和关于 Y 的边缘分布函数分别为

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(X \leqslant x, y < \infty) = F_{XY}(x,\infty)$$

即

$$F_{XY}(x,\infty) = F_X(x) \tag{1-11}$$

换言之，$F_{XY}(x,y)$中令 $y\to\infty$就能得到 $F_X(x)$。

同理可得

$$F_{XY}(\infty,y) = F_Y(y) \tag{1-12}$$

(4)$P(x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2)=F_{XY}(x_2,y_2)-F_{XY}(x_1,y_2)-F_{XY}(x_2,y_1)+F_{XY}(x_1,y_1)$

$\geqslant 0$　(证略)

多维随机变量分布函数的情况，可以由二维随机变量的分布函数的研究推广而得到，即

$$F_{X_1,X_2,\cdots,X_N}(x_1,x_2,\cdots,x_N) = P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_N \leqslant x_N) \tag{1-13}$$

1.3.2 连续型随机变量的概率密度函数*

随机变量的统计特性还可用分布函数的另一变换形式来描述，这就是概率密度函数。

随机变量的概率密度函数表示瞬时数据值落在某指定范围内的概率。考虑如图 1.4 所示的样本时间历程记录 $x(t)$。$x(t)$值落在 x 和$(x+\Delta x)$范围内的概率可由 T_x/T 之比得到。这里 T_x 是在观察时间 T 内，$x(t)$落在$(x,x+\Delta x)$范围内的总时间。当 T 趋于无穷时，此比值将趋于正确的概率值，用公式表示为

$$P[x < x(t) \leqslant x + \Delta x] = \lim_{T\to\infty} \frac{T_x}{T} \tag{1-14}$$

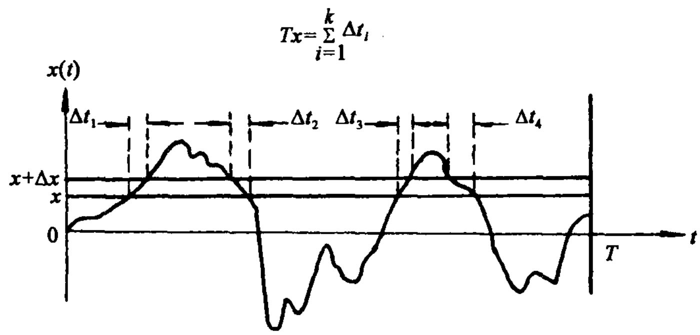

图 1.4 测量概率

对于很小的 Δx，可定义概率密度函数 $p_X(x)$如下：

$$P[x < x(t) \leqslant x + \Delta x] \approx p_X(x)\Delta x$$

更精确一些，有

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{P[x < x(t) \leqslant x + \Delta x]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\lim_{T\to\infty} \frac{T_x}{T}\right] \end{aligned} \tag{1-15}$$

概率密度函数 $p_X(x)$恒为实值非负函数。

另外，我们还可从上述随机变量分布函数来定义概率密度函数。

定义：对于连续型随机变量 X，若其分布函数为 $F_X(x)$，存在非负的函数 $p_X(x)$，使得对于任意实数 x，有

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(x)\mathrm{d}x \tag{1-16}$$

则称 $p_X(x)$为随机变量 X 的概率密度函数。显然上式也可写成

$$p_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1-17}$$

故概率密度函数就是分布函数的导数。可见：

(1)用 $p_X(x)$与 $F_X(x)$描述随机变量的统计特性是一回事(注意：$F_X(x)$的值是概率，而 $p_X(x)$的值不是概率)，所以只要知其一就可。

---

* 简称为概率密度或概率函数