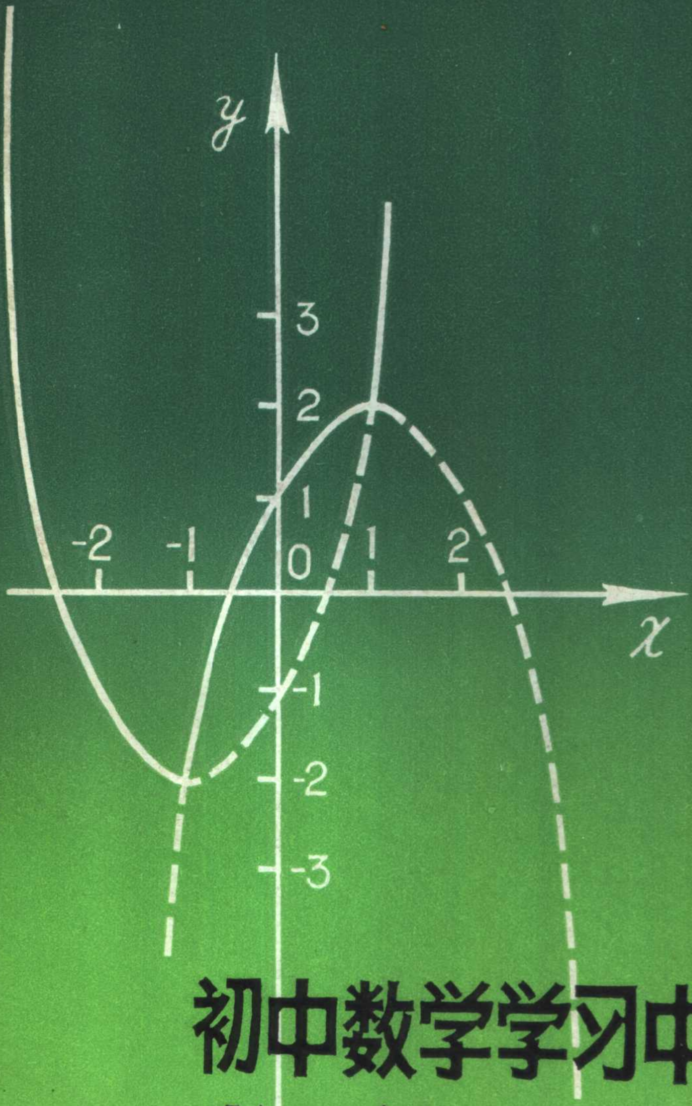

初中数学学习中常见错误分析

湖南教育出版社

初中数学学习中常见错误分析

张子贤　陈京文

湖 南 教 育 出 版 社

初中数学学习中常见错误分析
张子贤　陈京文
责任编辑：孟实华
湖南教育出版社出版　（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷一厂印刷
1983年11月第1版第1次印刷
字数：140,000　印张：7.125　印数：1—107,800
统一书号：7284·261　　定价：0.57元

前　言

本书是为了帮助青少年全面理解学好初中数学而编写的。全书按初中数学内容分为代数、平面三角、平面几何、平面解析几何四个部分，共列举了两百道例题，每道例题既列举了学生在学习中常见的具有一定代表性的错误解答（注：本书把不全面的解答或出现个别漏洞的解答都算做错误解答），又有正确的解答。

在解题过程中产生缺陷和错误的原因，概括地说，一是由于对数学概念、定理、公式等基础知识理解不透、掌握不牢，因而不能正确运用；二是由于缺乏严格的思维训练，考虑问题欠周密细致，解题时没有分清题设与结论(或待求结果)，甚至忽视题设。基于上述两个方面的原因，便出现遗解、增解或错解等情形。本书在列举每道例题的错误解答的同时，都有正确解答（注：考虑到解法的多样性，对某些例题的其他正确解答，在分析中作了适当补充），并且着重从知识上和解题思路上具体分析了产生缺陷和错误的根源，阐明了在学习过程中应当如何防止和纠正这些缺陷和错误。

读者在阅读本书的时候，每看完一道例题的错误解答，首先思考一下，解答错在哪里？最好能自己将错处找出来，并探求正确的解答。这样，既能提高判断正误的能力，又有益于基

础知识的学习。

愿本书能对广大青少年读者在学习初中数学时有所帮助。

编　　者

目　录

代　　数

代数知识是在算术知识的基础上发展起来的，其特点是用字母表示数，使数的概念及其运算法则抽象化和公式化。这样一来，数学便进入了一个广阔的境界。学习初中代数要达到两个基本要求：一是学会变换，化简含有字母的式子和分析式子结构中的数量关系；二是学会根据未知数所满足的题设求出未知数的值。学会用代数方法解题，往往可以化难为易。例如，算术中一些较难的应用题，用列方程或方程组求解，就十分简便了。但初学者对于从具体的数字到抽象的字母，将会遇到某些困难，对式子的恒等变形，方程（组）和不等式的求解以及函数中自变量取值范围的确定等方面，最易发生差错。因此，在学习过程中，必须注意新旧知识之间的联系和区别，力求做到明确每一个新的概念，牢固掌握每一个公式、法则，逐步培养和提高抽象思维能力，这样，才有可能防止在解题中出现缺陷和错误。

一、数的概念

数的概念是代数知识的基础，在初中代数中，将算术中数的概念首先扩充到有理数，然后相继扩充到无理数，从而完成

实数概念。在学习数的概念时，必须弄清它们的本质特征及其含义，切实掌握实数的分类系统、运算定律和运算法则，随时防止和纠正概念上和运算上发生的缺陷和错误。

【例1】（1）数“0”是自然数吗？(2)数“0”是偶数或奇数吗？

错 误 解 答

（1） 0是自然数。

（2） 0不是偶数；也不是奇数。

正 确 解 答

（1） 0不是自然数。

（2） 0是偶数。

分析：错误解答产生的原因是由于对自然数、偶数和奇数等概念没有弄清楚。必须明确：自然数是从1开始，即1，2，3，4，5，…这样延续下去的一列数。自然数有最小数1，但没有最大数。自然数是人类从实物数数中得出来的。0在数数时表示没有什么东西。0比1小，0不属于自然数的集合。但作为数字来说，0是组成自然数的一个数字。例如，10，203，400，等都是自然数。显然，“0”是不可缺少的。

【例2】 什么样的数叫做质数？合数？最小的质数是哪一个？

错 误 解 答

除了1和它自身外没有其它约数的自然数叫做质数。除质

数外的自然数叫做合数。由质数定义得知 1 是最小的质数。

正 确 解 答

大于 1 且除了 1 和它自身外没有其它约数的自然数叫做质数。大于 1 而又不是质数的自然数叫做合数。由质数定义得知 2 是最小的质数。

分析：自然数分作以下三类，即

$$\text{自然数(正整数)}\begin{cases}1\text{（自然数的单位，或称单位元）}\\ \left.\begin{array}{l}\text{质数}\\ \text{合数}\end{array}\right\}\text{（定义见正确解答）}\end{cases}$$

上面的错误解答中对质数所下的定义，把单位 1 也包括进去了。是不合规定的。

【例3】 一个分数和零相比哪个大？

错 误 解 答

任何一个分数都比零大。

正 确 解 答

如果一个分数是正分数，那么它比零大；

如果一个分数是负分数，那么它比零小。

分析：代数中引入有理数的概念后，分数便有了正、负的区别，并且规定了一切正数大于零和一切负数小于零。上面的错误解答中对于分数仍然停留在算术分数的概念上。

【例4】 什么样的数叫做无理数？

错 误 解 答

解答一：由实数开方开不尽的数叫做无理数。如：$\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{5}$，$-\sqrt{7}$。

解答二：无限小数叫做无理数。

正 确 解 答

无限不循环小数叫做无理数。

分析：无理数的定义是"无限不循环小数叫做无理数."由实数开方开不尽的数（如$\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{5}$，$-\sqrt{7}$）仅仅是无理数中的一部份。如圆周率π，$\lg 2$，$\sin 3°10'$等等也是无理数，它们的值是无限不循环小数，但不是由实数开方所能得到的。因此，把无理数的定义说成"由实数开方开不尽的数（简称不尽根）叫做无理数"是错误的。这样说，就把无理数的范围缩小了。又无限小数有无限循环小数和无限不循环小数两种情形，而任何一个无限循环小数总可以把它化为分数，它属于有理数的集合．因此，把无理数定义为"无限小数叫做无理数"，这样就放宽了定义的范围，也是不正确的。一般地，如果一个概念能给予定义的话，那么，必须根据它的本质特征，使定义做到"恰如其分"，即既不过宽，也不过窄。

【例5】 设有两个实数的绝对值相等，说明这两个实数的关系。

错 误 解 答

这两个实数相等。

正 确 解 答

这两个实数相等或者是相反数。

分析：因为，"正数和零的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数"，所以，由实数的绝对值的这一定义可知：当两个实数的绝对值相等时：①如果它们同号或者同时为零，那么它们便相等；②如果它们异号，那么它们便是相反数．上面的错误解答仅考虑到两数同号或同时为零，所作结论便丧失了一般性。

【例6】 下面各数哪些是整数？哪些是分数？哪些是有理数？哪些是无理数？

$$\frac{2}{5}，3.1416，-\sqrt{2}，\sqrt{9}，0，-7。$$

错 误 解 答

-7是整数；$\frac{2}{5}$是分数；$\frac{2}{5}$、0、-7是有理数；3.1416、$-\sqrt{2}$、$\sqrt{9}$是无理数。

正 确 解 答

$\because\ \sqrt{9}=3$，$\therefore \sqrt{9}$、0、-7都是整数。

$\because$ 3.1416可化为分数，

$\therefore\ \frac{2}{5}$、3.1416都是分数。又各数中仅$-\sqrt{2}$是无理数，其余各数都是有理数。

分析：判定形如$\sqrt{a}$（a是正有理数）的数是有理数还是无理数的法则是：如果a是一个完全平方数，那么，$\sqrt{a}$是有理数；如果a是一个非完全平方数，那么，$\sqrt{a}$便是无理数。上面的错误解答中，仅看到$\sqrt{9}$带有根号"$\sqrt{\ }$"，就误认为$\sqrt{9}$是无理数，这显然是错误的。又圆周率π是无理数，但3.1416是π的近似值，即$\pi\approx 3.1416$。而3.1416是一个有理数。因此，我们不能把3.1416与圆周率π等同起来，即$\pi\neq 3.1416$。

【例7】 画出一条数轴，在这条数轴上取点表示下列各数

$$-2,\ \sqrt{3},\ 2\frac{1}{3},\ 4.$$

错 误 解 答　　　　**正 确 解 答**

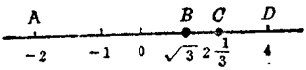

图 1

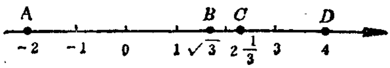

图 2

分析：当画一条数轴时，要在横线上取定一点作为原点0，取定一条线段作为单位长度，同时，要画出箭头表示数轴的正方向（一般把箭头指向右方）。我们把数轴的原点、单位和方向叫做数轴的三要素。初学者常常忽视上述规定而把数轴画得欠完整，有时把横线画成竖线。上面的错误解答没有标明数轴的方向，且单位长度不一致，所标的点有的位置不对，也没有用

实点"·"表示。这些都不合规定，应当纠正。

对于表示$\sqrt{3}$的点，可按近似画法：

因$\sqrt{3}\approx1.73$，故在数轴上取点B对应于数1.73（图 2）。

如果采用几何作图中的"尺规法"，那么，画法如下：

如图 3，自原点 0 作OX轴的垂线，在这条垂线上取$OA=$ 1 个单位长度，以A为圆心，2 个单位长度为半径画弧交OX轴于点B，则点B即为所求的点。

（可由勾股定理证得

$$OB=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}\text{）}$$

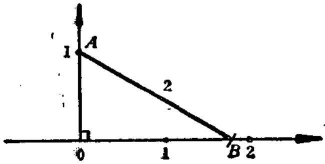

图 3

【例8】 任意两个有理数进行加、减、乘、除的四则运算时，其结果将是什么数？

错 误 解 答

任意两个有理数进行加、减、乘、除的四则运算时，其结果将是负数、零或正数。

正 确 解 答

任意两个有理数进行加、减、乘、除的四则运算（除时数零不能作除数）时，其结果仍为有理数。

分析：在上面的错误解答中，把运算结果说成是"负数、零或正数"，这样便扩大了数的范围，因为"负数"和"正数"中分别包含了"负无理数"和正无理数。

又任意两个有理数中包括零，而零不能作除数，所以当两

个有理数作除法运算时，必须声明除开除数为零的情形。数“0”为什么不能作除数呢？理由是：

假设 $a\div 0=b$，则 $a=0\times b$ ……①

$\because$ $0\times b=0$，当 $a\neq 0$时，①式不成立（或者说，①式无意义）；当 $a=0$时，①式中的 b 可以为任何数，不符合商数的唯一性的原则，所以，数学中要排除数“0”用作除数的情形，即规定“0不能作除数”。

【例9】 计算$20\div(-4)\times 5+5\times(-3)\div 15-7+4$。

错误解答

$$\begin{aligned}原式&=20\div(-20)+(-15)\div 15-7+4\\&=-1+(-1)-11=-13.\end{aligned}$$

正确解答

$$\begin{aligned}原式&=(-5)\times 5+(-15)\div 15-7+4\\&=-25+(-1)-7+4=-29.\end{aligned}$$

分析：有理数的四则运算法则和算术的四则运算法则是相同的。运算时，不但要牢记“先乘除、后加减”的运算顺序，还要注意在乘除运算中“乘在前先乘、除在前先除”；在加减运算中“加在前先加，减在前先减”等规定。上面的错误解答，是由于误认为在乘除和加减的混和运算中总是按“先乘后除”和“先加后减”进行而造成的。

【例10】 $-4-\left\{(-10)+\left[(3-8)\times(-1)-(-5)\right]-7\right\}$.

错 误 解 答

原式 $=-4-(-10)\div(-5)\times(-1)+5-7$

$=-4-2\times(-1)-2$

$=-4+2-2$

$=-4$。

正 确 解 答

原式 $=-4-[(-10)\div10-7]$

$=-4-(-1-7)$

$=-4+8$

$=4$。

分析：在含有括号的有理数四则运算中，一般方法是按先去小括号，次去中括号和后去大括号的步骤进行运算。如果要先去括号，就必须注意：括号前是“-”号时，去括号以后，括号内的各数前的“+”号应变为“-”号，而“-”号应变为“+”号；括号前是“÷”时，去括号以后，括号内各数前的“÷”号应变为“×”号，而“×”号应变为“÷”号。上面的错误解答违反了这些规定。在有理数的运算中，往往错在运算符号或数的性质符号上，值得初学者重视。

【例11】 计算 $(-3)^2-(-2)^3-(2\frac{1}{3})^2$。

错 误 解 答

$$原式=9-8-4\frac{1}{9}$$

$$=1-4\frac{1}{9}$$

$$=-3\frac{1}{9}.$$

正 确 解 答

$$原式=9-(-8)-(\frac{7}{3})^2$$

$$=9+8-\frac{49}{9}$$

$$=11\frac{5}{9}.$$

分析：上面的错误解答错了两个地方．首先是对$(-2)^3$的结果符号弄错，应当是-8却得出8。对此，应当牢固掌握负数乘方的符号法则：

$(-a)^{2n}=a^{2n}$；$(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$。（n为整数）

也有的学生把$-(-2)^3$当作$-(-2^3)$来计算，因而得出8；其次是计算$(2\frac{1}{3})^2$时，没有先把$2\frac{1}{3}$化成$\frac{7}{3}$，然后进行平方运算。这说明算术基础不牢固，应当在学习新的知识的同时注意复习旧的知识，做到“温故知新”。