● 高职高专学校学习辅导丛书

高等数学 下册

Advanced Mathematics

主　编　朱弘毅

副主编　任美玉　裘锡林　朱嗣筠　张福康

上海科学技术出版社

高职高专学校学习辅导丛书

高等数学

（下　册）

主　编　朱弘毅
副主编　任美玉
　　　　裘锡林
　　　　朱嗣筠
　　　　张福康

上海科学技术出版社

高职高专学校学习辅导丛书
高 等 数 学
（下册）
主　编　朱弘毅
副主编　任美玉　裘锡林　朱嗣筠　张福康
上海科学技术出版社出版、发行
（上海瑞金二路450号　邮政编码200020）
新华书店上海发行所经销　常熟市兴达印刷有限公司印刷
开本 787×1092　1/32　印张 10.5　字数 234 000
2002年10月第1版　2002年10月第1次印刷
印数：1—6 000
ISBN 7-5323-6404-6/O·256
定价：13.10元

前　言

高职高专学校学习辅导丛书《高等数学》分上、中、下三册，是与高职高专学校试用教材《高等数学》(上海科学技术出版社2001年第四版)配套的学习辅导书.

高等数学是高职高专工程类各专业的一门基础课，该课程有一定的难度，例如，某些基本概念理解不透，运算技巧不易掌握，理论性比中学数学强，针对这门课程的难度和特点，编者希望借助辅导书做好难度的转化工作，有利于学生掌握知识.另一方面，高等数学是刚跨进高等学府大门的学生首遇的一门课程，高等数学任课教师讲授格调又不同于中学教师，学习方法上学生正处于从中学类型向大学类型转变，在这种情况下，学生迫切需要一个辅导老师，帮助他们解决学习中的疑难问题，这也就是我们编写这套书的目的.总之，编者希望这套与教材配套的学习辅导书，有助于学生正确理解有关的概念和理论，更好地掌握解决问题的方法和技巧，有利于学生做好考试前的复习工作.

这三册学习辅导书的编写体例一致，每册书的附录为模拟试卷及参考答案，各章与相应的教材同步.每章由内容提要、例题分析、习题选解、单元检测题四部分组成.例题分析和习题选解中题目一般都是较典型或较难的习题.单元检测题中，我们既考虑到知识的覆盖面，又注意突出重点内容来命题，有利于对该章学习的总结检查.

全书由朱弘毅主编，任美玉、裘锡林、朱嗣筠、张福康为下册副主编. 参加编写的还有(按姓氏笔划为序)：冯珍珍、朱玉久、朱嗣筠、任美玉、孙劼、李俭、邵建润、沐国宝、沈昕、吴珞、罗爱芳、张伟瑾、张福康、高永良、楼曾豪、黄亦虹、裘锡林.

限于编者水平，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

2002年2月

目　　录

第十三章　矩阵及其运算

一、内容提要

1. 矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，其中 a_{ij} 称为矩阵中第 i 行第 j 列位置上的元素. 一般用大写字母 $A,B,\cdots$ 表示矩阵. 矩阵 A 也简记 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

特殊矩阵有：行矩阵，列矩阵，零矩阵，方阵，对角阵，单位阵，行阶梯形矩阵，行最简阶梯形矩阵.

若矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与矩阵 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 中对应元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 A 和矩阵 B 相等，记为 $A=B$.

2. 矩阵的运算

(1) 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，k 是一个数，则定义

$$A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n};kA=Ak=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

(2) 若 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，则定义

$$AB=(c_{ij})_{m\times n},$$

其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$.

矩阵的乘法一般不满足交换律.

设 A 为 n 阶方阵，k 为正整数，则定义

$$A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k个}.$$

(3) 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

则 A 的转置矩阵为

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(4) 对矩阵 A，若存在矩阵 B 使 $AB=BA=E$，则称 B 为 A 的逆阵. 可以证明：若矩阵 A 存在逆阵则它是唯一的，A 的逆阵记为 A^{-1}.

3. 矩阵运算的性质(假设下列运算是可行的)

$A+B=B+A$，　　$A+(B+C)=(A+B)+C$，

$A+O=A$，　　$k(A+B)=kA+kB$，

$(k+l)A=kA+lA$，　　$-A=(-1)A$，

$(AB)C=A(BC)$，　　$A(B+C)=AB+AC$，

$(B+C)A=BA+CA$，　　$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$，

$(A^T)^T=A$，　　$(A+B)^T=A^T+B^T$，

$$(AB)^T = B^T A^T, \qquad (kA)^T = kA^T,$$

$$(A^{-1})^{-1} = A, \qquad (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1},$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}, \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

上述 k,l,λ 是数，O 是零矩阵.

矩阵 A 的逆阵存在的充要条件是 $|A| \neq 0$. 且当 $|A| \neq 0$ 时，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*,\ A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

4. 行列式

一阶行列式 $|a| = a$，

二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

当 $n-1$ 阶行列式已定义时，n 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

n 阶行列式中划去第 i 行，第 j 列，剩余下来的元素保持

原来相对位置所组成的$(n-1)$阶行列式称为a_{ij}的余子式，记为M_{ij}.

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为a_{ij}的代数余子式.

行列式的性质：

(1) 行列式D与它的转置行列式D^T相等，即　$D=D^T$；

(2) 互换行列式的两行(列)，行列式的值变号；

(3) 行列式某一行(列)中所有的元素都乘以数k，等于用数k乘此行列式；

(4) 行列式D中如果有两行(列)元素对应成比例，则$D=0$；

(5) 行列式中如果某一行(列)的元素都是两数之和，则这个行列式等于两个行列式的和；

(6) 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一个数，然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式的值不变；

(7) 行列式等于它任一行(列)元素与它对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}.$$

推论　行列式某行(列)元素与另一行(列)元素的代数余子式乘积之和的值为零，即

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0,\quad (i\neq j).$$

行列式的计算方法：

(1) 应用行列式的性质，将行列式的某一行(列)的元素除一个不等于零外，其余元素化为零，然后按这一行(列)展开；

(2) 应用行列式性质将行列式化为上三角行列式或下三

角行列式.

5. 克莱姆法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则方程组有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$是用方程组右端的常数列替换 D 中第 i 列元素所得的 n 阶行列式,即

$$D_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

特别地,当 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 时,上方程组称为齐次线性方程组.对于齐次线性方程组,当系数行列式 $D\neq 0$ 时,齐次线性方程组只有零解.

6. 矩阵方程

对于矩阵方程 $AX=B$,如果 A 为方阵且可逆,则有

$$X=A^{-1}B.$$

对于矩阵方程 $CXA=B$，如果 A,C 为方阵，且均可逆，则有
$$X=C^{-1}BA^{-1}.$$

7. 矩阵的初等变换与矩阵的秩

对矩阵的行(列)进行下列三种变换，称为矩阵的初等行(列)变换：

(1) 交换矩阵的两行(列)；

(2) 矩阵某一行(列)的元素都乘以同一个不等于零的数；

(3) 将矩阵某一行(列)的元素同乘以一个数并加到另一行(列)的对应元素上去.

矩阵 A 经过初等变换化为矩阵 B，记为 $A\to B$.

任意矩阵 A 经过若干次初等行变换可化为行阶梯形矩阵 B，并且 B 的非零行的行数称为矩阵 A 的秩，记为 $R(A)$.

n 阶方阵 A 的秩 $R(A)<n$ 的充要条件是方阵 A 的行列式 $|A|=0$ 或 $R(A)=n$ 的充要条件为 $|A|\neq 0$.

***8. 分块矩阵**

用水平和垂直虚线将矩阵 A 中的元素的阵列分成小块(称为子阵)，A 就成为分块矩阵.

进行分块矩阵的加、减、乘法，数乘和转置运算时，可将小块当作通常矩阵的元素看待，但是在分块时要注意运算能够进行.

当方阵 A 为分块对角阵
$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix},$$
其中 $A_i(i=1,2,\cdots,r)$ 都是方阵

则　(1) A 的行列式　$|A|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot\cdots\cdot|A_r|$；

(2) 当$|A_i|\neq 0$ 时$(i=1,2,\cdots,r)$时，A 可逆，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r^{-1} \end{pmatrix}.$$

二、例题分析

例 1　已知

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix},$$

求　$3A-2B$.

解

$$3A-2B=3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -3-8 & 6-6 & 9-4 & 3+2 \\ 0-10 & 9+6 & -6-0 & 3-2 \\ 12-2 & 0-4 & 9+10 & 6-0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -11 & 0 & 5 & 5 \\ -10 & 15 & -6 & 1 \\ 10 & -4 & 19 & 6 \end{pmatrix}.$$

例 2　已知

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&2&0\\1&5&7&9\\2&4&6&8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7&5&-2&4\\5&1&9&7\\3&2&-1&6\end{pmatrix},$$

且 $A+2X=B$,求 X.

解 由 $A+2X=B$,得

$$X=\frac{1}{2}(B-A)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&6&-4&4\\4&-4&2&-2\\1&-2&-7&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&3&-2&2\\2&-2&1&-1\\\frac{1}{2}&-1&-\frac{7}{2}&-1\end{pmatrix}.$$

例 3 已知

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\\3&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-1\end{pmatrix},$$

求 AB.

解

$$AB=\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\2&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\times1+3\times2 & 2\times(-2)+3\times(-1)\\1\times1+(-2)\times2 & 1\times(-2)+(-2)\times(-1)\\3\times1+1\times2 & 3\times(-2)+1\times(-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8&-7\\-3&0\\5&-7\end{pmatrix}.$$

例 4 计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 5 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 6 \\ 1 & 2 & 3 & \frac{4}{5} \end{vmatrix}.$$

分析 用行列式性质先将 D 中各元素化为整数，再将行列式化为上三角形行列式.

解

$$D=\frac{1}{30}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 5 & 10 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(-5)r_1+r_4]{(-2)r_1+r_2}\frac{1}{30}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{3r_2+r_3}\frac{1}{30}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 35 & 12 \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(-2)r_4+r_3}\frac{1}{30}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{vmatrix}$$