科学版

大学物理

典型题解题方法

王国光　何丽桥
倪牟翠　张成宝　主编

科学出版社
www.sciencep.com

大学物理典型题解题方法

王国光　何丽桥
倪年翠　张成宝　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是为汽车制造专业大学生学习大学物理配套的习题辅导教材。

全书共16章，包括力学、热学、电磁学、振动和波、波动光学、相对论、波粒二象性和量子力学，每一章包括四个模块：知识网络、基本题型、典型例题、习题选解。知识网络以网络图的形式给出该章的物理原理、定律定理及它们之间的相互联系、承启关系，使读者系统掌握知识体系及建构过程；基本题型以科学的方法对该章的典型物理题目进行概括，使读者能够清晰把握物理试题的设计方法，彻底消除物理题总是做不完的感觉；典型例题以实例向读者展示解题方法及精辟点评，避免空洞，令读者处于“看着明白，做题却无从下手”的境地；习题选解精选《工科大学物理》(2004年2月，高等教育出版社，钟江帆主编)各章习题解答，进一步补充典型例题。

本书适合于工科本科生、专科生及相关的考研人员。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理典型题解题方法/王国光等主编. —北京：科学出版社，2004.
ISBN 7-03-012536-3

Ⅰ. 大… Ⅱ. 王… Ⅲ. 物理学－高等学校－解题 Ⅳ. O4－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第107728号

责任编辑：张邦固/责任校对：宋玲玲
责任印制：安春生/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004年1月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2004年1月第一次印刷 印张：16 1/4
印数：1—5 000 字数：310 000

定价： 21.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

前　　言

物理学是理工科院校学生必修的基础理论课之一，它在培养学生的创新意识和科学素养中占有重要地位。为了帮助学生掌握大学物理基本理论构架，培养科学的思维方法，全面提升解题能力，我们集多年教学实践和心得，编写了这本《大学物理典型题解题方法》。

本书包括质点力学、刚体力学、振动和波、热学、电磁学、波动光学和近代物理几个部分，基本上覆盖了理工科院校非物理专业学生所要求掌握的物理内容。全书共16章，每章由知识网络、基本题型、典型例题和习题选解四个模块组成。知识网络给出了物理理论构架，呈现了物理理论建立和发展过程以及各知识点之间的有机联系，有助于学习者整体掌握物理知识体系，建立清晰的物理图像，展开联想，形成能力。基本题型的科学的方法概括了各章物理习题的基本类型，帮助学习者掌握物理习题的设计方法和所要达到的目标，使学习者从茫茫的题海中解脱出来，通过少量的练习大幅度提高物理解题能力。典型例题和习题选解是依据基本题型设计的，它回避了空洞的理论指导，通过一些范例将解题方法展现给学习者，使学习者更好地掌握解答物理问题的思维方法，培养分析问题和解决问题的能力。其中习题选解中的习题选自钟江帆主编的《工科大学物理》。

本书由王国光、何丽桥、倪牟翠、张成宝主编。第四、七、十、十二、十四章由王国光执笔，第五、十三章由何丽桥执笔，第三、十五、十六章由倪牟翠执笔，第十一章由张成宝执笔，第六章由麻永杰执笔，第八、九章由张金宝执笔，第一、二章由郭欣执笔。

由于编者学识有限，错误之处在所难免，衷心欢迎使用本书的师生和其他读者批评指正。

编者
2003年9月
于吉林大学

目　　录

第一章　机械运动的描述 …………………………………………………… 1
第二章　质点动力学 ………………………………………………………… 20
第三章　刚体定轴转动基本定律 …………………………………………… 37
第四章　场论基础 …………………………………………………………… 55
第五章　静电场 ……………………………………………………………… 59
第六章　稳恒磁场 …………………………………………………………… 85
第七章　电磁感应与电磁场…………………………………………………… 100
第八章　机械振动……………………………………………………………… 116
第九章　机械波………………………………………………………………… 133
第十章　电磁波………………………………………………………………… 151
第十一章　波动光学…………………………………………………………… 157
第十二章　狭义相对论………………………………………………………… 185
第十三章　波粒二象性………………………………………………………… 202
第十四章　量子力学基础……………………………………………………… 218
第十五章　经典统计基础……………………………………………………… 228
第十六章　热力学……………………………………………………………… 238

第一章　机械运动的描述

一、知识网络

描述机械运动的物理量

线量：

位置矢量：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$

位移：$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$

速度：$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$

加速度：$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

角量和线量关系：

$S=r\theta$

$v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=r\omega$

$a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\beta$

$a_n=\dfrac{v^2}{r}=\omega^2 r$

角量：

角位置：$\theta=\theta(t)$

角位移：$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$

角速度：$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

角加速度：$\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$

二、基本题型

1. 已知运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$或 $x=x(t)$、$y=y(t)$、$z=z(t)$，求速度、加速度、切向加速度、法向加速度、平均速度、平均加速度、位移、路程、任一时刻的位置以及轨道方程等。

2. 已知运动方程 $S=S(t)$或 $\theta=\theta(t)$，求速率、切向加速度、法向加速度、角速度、角加速度、角位移、角坐标等。

3. 已知加速度 $\boldsymbol{a}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 及位矢 $\boldsymbol{r}$（或坐标 x、y、z）的初值，求速度和运动方程。

这是积分问题，依据 $\boldsymbol{a}$ 的表示有三种情况：$\boldsymbol{a}=a(t)$、$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v})$和 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$，对每种情况有不同的积分方法，阅读典型例题。

4. 已知角加速度 $\boldsymbol{\beta}$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 及角坐标 θ 的初值，求角速度和角坐标。其中 $\boldsymbol{\beta}$ 也有三种表示情况，对应有三种积分方法。

5. 根据已知条件求线量和角量。

三、典型例题

例 1-1 已知质点的运动方程为

$$x = 1 + 2t^2$$
$$y = 2t + t^3$$

式中 t 以 s 计，x、y 以 m 计。求：$t=2$s 时

(1)质点的位置；

(2)质点的速度；

(3)质点的加速度。

解 (1)当 $t=2$s 时，

$$x = 1 + 2t^2 = 9\text{m}$$
$$y = 2t + t^3 = 12\text{m}$$

所以质点位置为(9,12)或写成

$$\boldsymbol{r} = 9\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j}$$

(2)
$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4t$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2 + 3t^2$$

当 $t=2$s 时

$$v_x = 8\text{m/s},\qquad v_y = 14\text{m/s}$$

或写成
$$\boldsymbol{v} = 8\boldsymbol{i} + 14\boldsymbol{j}$$

(3)
$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 4$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = 6t$$

当 $t=2$s 时

$$a_x = 4\text{m/s}^2,\qquad a_y = 12\text{m/s}^2$$

或写成
$$\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j}$$

例 1-2 一质点的运动方程为

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \end{cases}$$

式中 R、ω 均是大于零的常数，求

(1)质点的轨迹方程；

(2)任一时刻质点的位置矢量、速度、加速度。

解 (1)运动方程消去时间 t 为轨道方程

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (\text{轨迹为圆})$$

(2)位置矢量 $\boldsymbol{r} = R\cos\omega t\boldsymbol{i} + R\sin\omega t\boldsymbol{j}$

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{(R\cos\omega t)^2 + (R\sin\omega t)^2} = R$$

速度

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -R\omega\sin\omega t, \qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = R\omega\cos\omega t$$

所以 $v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega$

加速度

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\cos\omega t, \qquad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\sin\omega t$$

所以

$$\boldsymbol{a} = (-R\omega^2\cos\omega t)\boldsymbol{i} + (-R\omega^2\sin\omega t)\boldsymbol{j}, \qquad a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2$$

例 1-3 一质点沿半径为 0.1m 的圆周运动，其角位置 θ(以弧度表示)可用下式表示：

$$\theta = 2 + 4t^3$$

式中 t 以秒计。问

(1)在 $t = 2\text{s}$ 时，它的法向加速度和切向加速度各是多少？在 $t = 4\text{s}$ 时又如何？

(2)当切向加速度的大小恰是总加速度大小的一半时，θ 的值是多少？

(3)在哪一时刻，切向加速度和法向加速度有相等的值？

解 根据题意，质点的瞬时速率、切向和法向加速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R(12t^2) = 1.2t^2$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2.4t, \qquad a_n = \frac{v^2}{R} = 14.4t^4$$

(1)在 $t = 2\text{s}$ 时

$$v = 4.8\text{m/s}, \qquad a_t = 2.4 \times 2 = 4.8\text{m/s}^2, \qquad a_n = \frac{4.8^2}{0.1} = 230.4(\text{m/s}^2)$$

当 $t = 4\text{s}$ 时，求得

$$a_t = 9.6\text{m/s}^2, \qquad a_n = 3686.4\text{m/s}^2$$

(2)$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}$按题意,令$\frac{a_t}{a}=\frac{1}{2}$,亦即令

$$\frac{a}{a_t}=\frac{\sqrt{a_t^2+a_n^2}}{a_t}=\sqrt{1+\left(\frac{a_n}{a_t}\right)^2}=\sqrt{1+36t^6}=2$$

求得

$$t=\frac{1}{\sqrt[6]{12}}=0.66(\text{s})$$

将 t 代入运动方程可得

$$\theta=2+4t^3=2+4\times(0.66)^3=3.15\ \text{rad}$$

(3)按题意,令 $a_t=a_n$,即令

$$14.4t^4=2.4t$$

求得

$$t=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}=0.55(\text{s})$$

例 1-4　质点沿半径为 R 的圆周运动,运动方程为 $\theta=3+2t^2$(SI),求:t 时刻质点的法向加速度大小和角加速度大小。

解　由题意知,质点运动的角速度为

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=4t$$

所以

$$a_n=R\omega^2=R(4t)^2=16Rt^2(\text{SI}),\qquad \beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=4(\text{SI})$$

例 1-5　一质点沿半径为 R 的圆周运动,质点所经过的弧长与时间的关系为:$S=bt+\frac{1}{2}ct^2$,其中 b、c 是大于零的常数。求:从 $t=0$ 开始到达切向加速度和法向加速度大小相等时所经历的时间。

解　由题意知,质点运动的速率为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=b+ct$$

所以

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=c,\qquad a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(b+ct)^2}{R}$$

当 $a_t=a_n$ 时

$$c=\frac{(b+ct)^2}{R}$$

则

$$t=\sqrt{\frac{R}{c}}-\frac{b}{c}$$

例 1-6　设质点沿 x 轴作直线运动，$a=2t$，初始条件 $t=0$ 时，坐标为 x_0，速度为 v_0。求速度 v 和运动方程。

解　(1)由加速度的定义，在直线运动中

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t=2t\mathrm{d}t$$

两边取积分，并代入初始条件，得

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t=\int_0^t 2t\mathrm{d}t$$

所以

$$v=v_0+t^2$$

(2)由速度的定义，有

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t=(v_0+t^2)\mathrm{d}t$$

两边取积分，并代入初始条件有

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t(v_0+t^2)\mathrm{d}t$$

所以

$$x-x_0=v_0t+\frac{t^3}{3}$$

运动方程为

$$x=x_0+v_0t+\frac{t^3}{3}$$

例 1-7　一质点沿 x 轴运动，其加速度与速度成正比，且方向相反($a=-kv$)，$t=0$ 时，初始位置为 x_0，初速度为 v_0。试求

(1)速度方程；

(2)位移方程。

解　(1)根据题意

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -k\mathrm{d}t$$

两边取积分,并代入初始条件

$$\int_0^t -k\mathrm{d}t = \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v}$$

$$-kt = \ln\frac{v}{v_0}, \qquad \frac{v}{v_0} = \mathrm{e}^{-kt}$$

因此

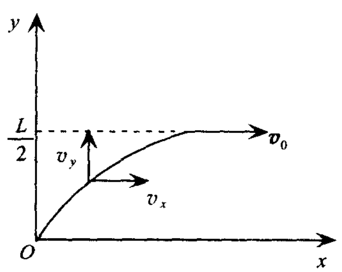
$$v = v_0\mathrm{e}^{-kt}$$

(2)因为 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0\mathrm{e}^{-kt}$,所以 $\mathrm{d}x=v_0\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t$,即

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x = \int_0^t v\mathrm{d}t = \int_0^t v_0\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t, \qquad x - x_0 = -\frac{v_0}{k}\mathrm{e}^{-kt}\Big|_0^t$$

得

$$x - x_0 = \frac{v_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt})$$



图例 1-8

例 1-8　一宽度为 L 的河流,其流速与离岸的距离成正比,河中心流速最大,以 v_0 表示,两岸处流速为零。一小船以恒定的相对速度 v 垂直水流从一岸驶向另一岸,当此船驶至河宽的 $\frac{1}{4}$ 处,发现燃料不足,立即掉头以相对速度 $\frac{1}{2}v$ 垂直水流驶回本岸。求此船驶往对岸的轨迹及返回本岸的地点。

解　取如图所示坐标

(1)往程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ky = \frac{2v_0}{L}y$$

联立解得

$$\mathrm{d}x = \frac{2v_0}{L}y\mathrm{d}t = \frac{2v_0}{Lv}y\mathrm{d}y$$

积分得

$$x = \frac{2v_0}{Lv}\int_0^y y\mathrm{d}y = \frac{v_0}{Lv}y^2$$

所以小船驶向对岸的轨迹为抛物线。

(2)返程

返程的出发点坐标为

$$x_0 = \frac{v_0 L}{16v}, \qquad y_0 = \frac{1}{4}L$$

因

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}v, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2v_0}{L}y$$

则

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x = \frac{2v_0}{L}\left(-\frac{2}{v}\right)\int_{y_0}^{0} y\mathrm{d}y$$

积分得

$$x = \frac{3Lv_0}{16v}$$

例 1-9　一物体悬挂在弹簧上作竖直振动,其加速度 $a=-ky$,式中 k 为常量,y 是以平衡位置为原点所测得的坐标,假定物体在坐标 y_0 处的速度为 v_0。试求:v 与坐标 y 的函数关系式。

解　由加速度及速度的定义得

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

又由已知

$$a = -ky$$

有

$$-ky\mathrm{d}y = v\mathrm{d}v$$

两边取积分,并由初始条件有

$$-\int_{y_0}^{y} ky\mathrm{d}y = \int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v$$

$$\frac{1}{2}ky_0^2 - \frac{1}{2}ky^2 = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}$$

得

$$v^2 = v_0^2 + k(y_0^2 - y^2)$$

例 1-10　一飞轮的角速度在 5s 内由 900r/min 均匀地减到 800r/min。求

(1)角加速度;

(2)在此 5s 内的总转数;

(3)再经几秒,轮将停止转动。

解 (1)由题意知

$$\omega_1 = 900 \times \frac{2\pi}{60} = 94.2(\mathrm{rad/s})$$

$$\omega_2 = 800 \times \frac{2\pi}{60} = 83.7(\mathrm{rad/s})$$

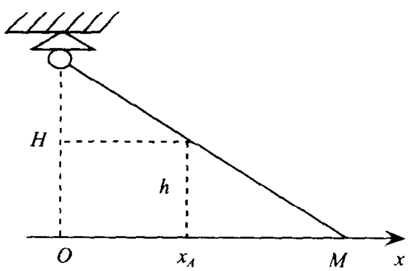
$$\beta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{83.7 - 94.2}{5} = -2.1(\mathrm{rad/s^2})$$

(2)
$$\theta = \omega_1 t + \frac{1}{2}\beta t^2 = 94.2 \times 5 + \frac{1}{2} \times (-2.1) \times 5^2$$

$$\approx 445(\mathrm{rad}) \approx 70.8(\mathrm{r})$$

(3)设 t 秒后轮停止转动,则

$$\omega_2 + \beta t = 0, \qquad t = \frac{-\omega_2}{\beta} = \frac{-83.7}{-2.1} \approx 40\mathrm{s}$$



图例 1-11

例 1-11 一个人身高 h,在路灯下以匀速率 V_A 沿水平直线行走,路灯高 H。求人影的顶点 M 沿地面移动速度 V_m。

解 选地面为参考系,人行走的方向为 x 轴正方向,路灯正下方为坐标原点 O。设在任一时刻 t,M 点的坐标用 x 来表示,人的坐标用 x_A 来表示,由三角形相似得

$$\frac{H-h}{H} = \frac{x_A}{x}$$

即

$$x = \frac{H}{H-h}x_A$$

而

$$x_A = V_A t$$

所以

$$x = \frac{H}{H-h}V_A t$$

得 M 点的移动速度

$$V_M = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{H}{H-h}V_A = \text{恒量}$$

由上式知,人影顶点的速度是均匀的,且大于人走的速度。

例 1-12 一质点从原点由静止出发,它的加速度在 x 轴和 y 轴上分量分别为 $a_x=2$ 和 $a_y=3t$(SI)。试求 $t=4\mathrm{s}$ 时质点的速度和位置。

解 (1)由已知条件

$$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3t\boldsymbol{j}$$

又因为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\mathrm{d}t = (2\boldsymbol{i} + 3t\boldsymbol{j})\mathrm{d}t$$

两边取积分,并由初始条件得

$$\int_0^{v}\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int_0^{t}(2\boldsymbol{i} + 3t\boldsymbol{j})\mathrm{d}t$$

得

$$\boldsymbol{v} = 2t\boldsymbol{i} + \frac{3}{2}t^2\boldsymbol{j}$$

当 $t=4\mathrm{s}$ 时

$$\boldsymbol{v} = 8\boldsymbol{i} + 24\boldsymbol{j}$$

(2)由

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t = \left(2t\boldsymbol{i} + \frac{3}{2}t^2\boldsymbol{j}\right)$$

积分得

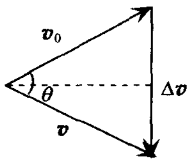
$$\int_0^{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{t}\left(2t\boldsymbol{i} + \frac{3}{2}t^2\boldsymbol{j}\right)\mathrm{d}t$$

所以

$$\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{i} + \frac{t^3}{2}\boldsymbol{j}$$

当 $t=4\mathrm{s}$ 时,

$$\boldsymbol{r} = 16\boldsymbol{i} + 32\boldsymbol{j}$$



图例 1-13

例 1-13 如图所示，一质点从某时刻开始以初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 沿曲线运动，经过 Δt 时间后又回到了出发点，其末速度为 $\boldsymbol{v}$。已知 $\boldsymbol{v}_0$ 与 $\boldsymbol{v}$ 大小相等，夹角为 θ。试求

(1)Δt 时间内的平均速度；

(2)Δt 时间内的速度增量；

(3)Δt 时间内的平均加速度大小。

解 (1)由题意知 $\Delta \boldsymbol{r}=0$，故平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=0$

(2)Δt 时间内速度增量的方向如图示，其大小为

$$|\Delta \boldsymbol{v}| = 2v_0 \sin\frac{\theta}{2}$$

(3)由平均加速度的定义得

$$|\bar{\boldsymbol{a}}| = \left|\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}\right| = \frac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{\Delta t} = \frac{2v_0 \sin\frac{\theta}{2}}{\Delta t}$$

例 1-14 已知质点的运动方程为

$$x = R\cos(\omega t^2), \qquad y = R\sin(\omega t^2)$$

式中 R、ω 均为常数。试求

(1)质点任意时刻的速度；

(2)质点切向加速度和法向加速度大小。

解 (1)由题意知

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2R\omega t\sin(\omega t^2), \qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2R\omega t\cos(\omega t^2)$$

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = -2R\omega t\sin(\omega t^2)\boldsymbol{i} + 2R\omega t\cos(\omega t^2)\boldsymbol{j}$$

(2)速度的大小即速率为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2R\omega t$$

由切向加速度和法向加速度的公式得

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2R\omega, \qquad a_n = \frac{v^2}{R} = 4R\omega^2 t^2$$

例 1-15 已知质点在铅直平面内运动，运动方程为

$$\boldsymbol{r} = 5t\boldsymbol{i} + (15t - 5t^2)\boldsymbol{j}$$

求 $t=1\text{s}$ 时质点的切向加速度和法向加速度。

解 根据速度的定义，有

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 5\boldsymbol{i} + (15 - 10t)\boldsymbol{j}$$

当 $t=1\text{s}$ 时

$$\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$$

速度的大小为

$$v = |\boldsymbol{v}| = 5\sqrt{2}\text{m/s}$$

因此,在 $t=1\text{s}$ 时,切向单位矢量为

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{v}}{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}$$

加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -10\boldsymbol{j}$$

设法向单位矢量为

$$\boldsymbol{n} = n_x\boldsymbol{i} + n_y\boldsymbol{j}$$

由于 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 垂直,所以有 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\tau}=0$,即

$$\frac{\sqrt{2}}{2}n_x + \frac{\sqrt{2}}{2}n_y = 0, \qquad n_x = -n_y$$

根据加速度的方向知,n_y 为负值,n_x 为正值,则

$$\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}$$

故切向加速度和法向加速度分别为

$$\boldsymbol{a}_\tau = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau} = (-10)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}\right) = -5\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}_n = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} = 10\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}\right) = 5\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}$$

四、习题选解

1-2　一质点的运动方程为 $x=4t-t^2\text{m}$,问从 $t=0$ 时刻起,在 3s 内质点的位移是多少?其通过的路程又是多少?

解　(1)质点在 $t=0\text{s}$、$t=3\text{s}$ 时的位置分别为

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 3$$

则 3s 内质点的位移为

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 3\text{m}$$

(2)由运动方程可得质点的速度

$$v=\frac{dx}{dt}=4-2t$$

当 $t=2s$ 时，$v=0$，因此质点在 0～3s 通过的路程

$$S=|x(2)-x(0)|+|x(3)-x(2)|$$
$$=|4\times2-2^2-0|+|3-(4\times2-2^2)|=4+1=5(m)$$

1－4 已知质点的加速度与位移的关系式为 $a=3x+2$ m/s，当 $t=0$ 时，$v_0=0$，$x_0=0$，试求速度 v 与位移 x 的关系式。

解 由速度及加速度定义可得

$$a=\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

即

$$v dv=a dx=(3x+2)dx$$

两边取积分，并由初始条件得

$$\frac{v^2}{2}=\frac{3}{2}x^2+2x,\qquad v^2=3x^2+4x$$

1－5 质点做半径为 R 的圆周运动，运动方程为 $s=\pi t^2+\pi t$ m，试求

(1)任意时刻质点的角位移；

(2)任意时刻质点的速率；

(3)任意时刻质点的切向加速度。

解 (1) $\theta=\frac{S}{R}=\frac{1}{R}(\pi t^2+\pi t)$

(2)由 $v=\frac{ds}{dt}$得

$$v=2\pi t+\pi$$

(3)由切向加速度定义得

$$a_t=\frac{dv}{dt}=2\pi$$

1－6 一质点从静止出发沿半径为 $R=3$m 的圆周运动，切向加速度为 $a_t=3ms^{-2}$，

(1)经过多少时间它的总加速度 a 恰好与半径成 45°角？

(2)在上述时间内，质点所经过的路程和角位移各是多少？

解 (1)由切向加速度定义

$$a_t=\frac{dv}{dt}$$

分离变量积分得