

损失分布

罗雨 编译



南开大学出版社

损 失 分 布

罗雨 编译

〔美〕Robert V. Hogg

Stuart A. Klugman 著

《Loss Distributions》

南开大学出版社

损失分布

罗 雨 编译

南 开 大 学 出 版 社 出 版

(天津八里台南开大学校内)

邮编 300071 电话 3358542

新华书店天津发行所发行

天津市宝坻县第二印刷厂印刷

1995年9月第1版

1995年9月第1次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:7.75

字数:191千

印数:1—1000

ISBN 7-310-00625-9

F·117 定价:9.00元

编译者简介:

罗甬 1989 年于南开大学数学系获硕士学位,同年任教于南开大学金融系,从事精算学的教学和科研工作。1993 年 11 月通过了北美精算学会(Society of Actuaries)资格考试,成为国内第一批世界公认的精算师之一。1994 年 8 月被北美精算学会任命为在中国的大使。

前 言

精算学是现代技术科学和社会科学互相交叉的一门应用性科学。精算技术主要采用数学方法并借助现代化的计算工具对金融、保险和社会保险、人口预测和风险管理等方面的有关问题进行定量研究。随着我国对外开放和经济改革的深入开展以及社会主义市场经济的不断完善,精算学将在我国的金融保险、社会保障和风险管理等各个方面发挥越来越大的作用。

南开大学于1988年与北美精算学会签订了联合培养精算学硕士研究生的协议,并于当年招收了首届精算学硕士研究生。研究生在学期间,北美精算学会选派了美国和加拿大等国家的、经验丰富的精算专家、教授为研究生授课。他们开设了风险与保险原理、利息理论、数值分析、人寿险精算、灾害险精算、损失分布、生存模型与精算表的构造等课程。这些课程使用的教材均为北美精算学会指定的精算师资格考试教材。

近年来我国的金融业、保险业、社会保险业以及各项风险管理工作发展迅速,社会对精算人才的需求也日益迫切。为了满足社会需要,促进精算学在我国现代化经济建设中的应用,我们将根据上述教材陆续编译出版精算系列教材。

为了保证编译教材的质量,南开大学金融系和南开大学国际保险研究所,共同组成精算教材编译委员会,由金融系系主任兼国际保险研究所副所长刘茂山教授担任编译委员会主编,编译委员会的成员有:何孝允、王海柱、江生忠、吕林祥、李树文、罗雨、李秀芳。编译委员会负责制定这套系列教材的编译大纲、内容审定和最

后定稿工作,并选定每本教材的主要编译人员。

《损失分布》是北美精算学会(Society of Actuaries)和北美灾害保险精算学会(Casualty Actuarial Society)指定的精算师资格考试教材。该书的原作者为 Robert V. Hogg 教授和 Stuart A. Klugman 教授,由罗雨编译。Klugman 教授曾亲自来南开大学为精算研究生讲授损失分布课程。《损失分布》系统地介绍了根据赔款数据估计损失量概率分布的理论和方法。书中采用了大量有关保险业的实例,有很强的应用性。该书既适合于精算教学使用又适合于保险实际工作者使用。

该书得到了南开大学教材出版基金以及美国 CIGNA 国际金融服务公司出版基金的资助,在此深表谢意。

南开大学国际保险研究所

一九九四年十二月

目 录

第一章 导言	(1)
1.1 基本术语	(1)
1.2 保障范围的限度	(6)
1.3 对保障范围限度的估价	(9)
1.4 数据收集和模型化.....	(11)
第二章 随机变量的模型	(16)
2.1 模型.....	(16)
2.2 矩母函数.....	(20)
2.3 Poisson 过程及其有关模型	(23)
2.4 联合随机变量的模型.....	(29)
2.5 正态模型.....	(35)
2.6 随机变量的线性函数.....	(40)
2.7 随机变量的函数.....	(47)
2.8 模型的混合.....	(52)
第三章 统计推断	(63)
3.1 不依赖于模型的分布估计.....	(63)
3.2 用模拟方法估计分布.....	(71)
3.3 点估计.....	(77)
3.4 区间估计.....	(90)
3.5 统计假设的检验.....	(99)

3.6	检验模型的拟合	(106)
3.7	应用及相关算法	(116)
第四章	损失分布模型的建立	(127)
4.1	引言	(127)
4.2	未分组数据、下方截断	(129)
4.3	分组数据、模型的混合	(147)
4.4	截断和移位数据、模型的混合	(160)
4.5	集群、上方截断、合并样本	(167)
4.6	一个二元模型	(176)
4.7	对建模过程的复习	(186)
第五章	分布模型的应用	(188)
5.1	引言	(188)
5.2	通货膨胀、对损失概率的估计	(188)
5.3	免赔额、杠杆作用	(194)
5.4	其它形式的免赔额、分布之间的比较	(201)
5.5	赔付限额、分布之间的比较	(209)
5.6	赔付限额、层、分摊损失理算费	(215)
附录		
	被选择分布的特征、有关函数值和估计量	(224)

第一章 导 言

1.1 基本术语

由意外事故造成的损失无论对个人还是对社会都会产生不良的影响。意外事故造成的损失是多种多样的：火灾、偷盗、冰雹、车祸等意外事故能造成财产损失；残疾或死亡会造成未来收入和赡养能力方面的损失；患病会造成医疗费用的支出，等等。保险就是分散这些损失的一种机制。显然，精算师想要知道一些有关被保险事件出险可能性方面的情况。在此我们先介绍一些基本术语。

估定保险费的基本单位称为一个暴露(exposure)，暴露单位是根据险种的特征而定的。比如在汽车保险中，如果保险费是按每辆汽车每年为单位定价的，那么暴露单位则为1车·年。因此，如果一份保单承保了3辆汽车，保险期限为6个月，那么这份保单的暴露数为1.5。暴露单位是人为规定的，当然人们可以根据需要将上例中的暴露单位规定为100车·年。

由于被保险事件的索赔次数与暴露数有直接的关系，精算师往往用频率(frequency)表示每个暴露单位的索赔次数，即：

$$\text{频率} = \frac{\text{所有索赔次数}}{\text{暴露总数}}$$

比如在汽车保险中规定暴露单位为1车·年，如果1990年保险公司承保的暴露总数为32458，并且在1990年共发生了814件索赔，那么相应频率为：

$$\frac{814}{32458} = 0.02508$$

即,每辆汽车在每年发生索赔的次数为0.02508次。

我们这里所用的频率的含义与统计学中的不同,它既不是频数,也不象统计学中“相对频率”那样必须是概率估计。我们所用的频率是每一暴露单位预期索赔次数的估计值。有时,在含义清楚后,频率一词也被用作这个预期索赔次数本身。

保险合同本身的条款对频率有很大影响。例如,如果汽车碰撞保险赔付不包括任何损失的最初\$250,那么对所有低于\$250的损失都不赔付,因而被保险事件的索赔次数就要减少。再如,如果意外及疾病保险规定,对残疾期在7天或7天以内的不予赔付,那么对残疾期少于8天的都不赔付,因而索赔次数就会减少。

本书的主要目的是回答,如果被保险事件发生,保险人的损失是多少。显然这一损失是一个随机变量。我们称每次索赔的平均损失为确率(severity)。即:

$$\text{确率} = \frac{\text{赔款总额}}{\text{所有索赔次数}}$$

可见,确率是对单个损失随机变量期望值的估计。在不发生混淆的情况下,有时确率也代表这个期望值。

由于保险损失数额一般都用美元(或其它通货)表示,所以确率一般用每次损失的平均美元数表示。但有一点例外,在某些形式的残疾保险中,可以用残疾期的平均长短来表示确率。

保险合同本身的条款对确率也有很大影响。例如,如果汽车责任保险限定,对受伤害一方的赔款数额不得超过\$10,000,那么对索赔人超出\$10,000部分的损失就不予赔付。因此,对这些损失的总赔付额就会减少,这必然影响平均赔付额(确率)。再如,若一张人寿保单的面额为\$50,000,那么对被保险人死后的赔付应为\$50,000,既不能多,也不能少。

纯保费(pure premium)是指对每个暴露单位的平均赔款额。

即：

$$\text{纯保费} = \frac{\text{赔款总额}}{\text{暴露总数}}$$

不难看出，纯保费是频率与确率的乘积。

纯保费是本书的一个间接论题。只是由于纯保费受保险合同条款影响，其结果影响确率和频率，我们才关心纯保费。例如，如果一张盗窃保险单规定，对损失的最初 \$ 100 不予赔偿，并且对任何一件物品的损失赔偿最多不得超过 \$ 1000，那么

1. 对盗窃损失低于 \$ 100 的不予赔付，因而频率受到影响；
2. 损失超过 \$ 100 的，对其最初的 \$ 100 损失不予赔付，因而确率受到影响；
3. 每件物品的盗窃损失超过 \$ 1100 的部分就得不到赔偿，因而确率受到影响。

显然，纯保费在上述每个方面都受这个保险合同的影响。

由于保险费(premium)一词与购买保险合同的价格有关，所以读者对它并不陌生。保险费与纯保费之间的关系可表示如下：

$$\text{保险费} = (\text{纯保费} \times \text{暴露数}) + \left(\frac{\text{营业}}{\text{费用}} \right) + \left(\frac{\text{风险}}{\text{费用}} \right)$$

营业费用(expenses of doing business)包括代理人或经纪人的佣金、雇员工资、建筑和设备的租金、耗用品、税金等等。费用的多少可用保险费的一个百分比计量或按每个暴露单位以至每份保险合同一个统一数额计量。风险费用(risk charge)用于支付因保险人有义务公布其盈余致使其股东或其它保单持有者处于风险波动的状况。风险波动可能由未能正确估计纯保费或营业费用造成，也可能由纯保费或营业费用关于期望值的波动造成。风险波动在那些风险波动较大的险种，如医疗不当行为责任保险中，所占保险费的比例较大。而在那些风险波动较小的险种，如汽车碰撞保险中，所占保险费的比例就较小。

对损失的研究可分为对单一损失的研究和对集合损失的研

究。所谓单一损失 (single loss) 是指在确定频率时, 记作一次事故的损失。所谓集合损失 (collective loss) 是指诸多损失的集和体, 在确定频率时, 集和体中的每一个损失都记作一次事故。本书只研究单一损失, 对集合损失的研究属数理风险理论的范畴。

例 1. 汽车车身伤害责任保险通常在一份合同中规定两种不同的限额——对每个受伤者赔款的限额和对每次事故赔款的限额。设这种合同规定, 在一次事故中对每个受伤者的赔款不得超过 \$100,000\$, 并且如果在同一故事中不只一人受伤, 保险人作为一次故事的赔款不得超过 \$300,000\$, 如果频率按每人或每一索赔人为基础度量, 那么对每个受伤者的赔款都分别是单一损失。同样, 如果频率仍按每人为基础度量, 并且每次事故的索赔人不只一个, 那么对这一事故的全部赔款就是集合损失。另一方面, 如果频率按每次事故为基础度量, 那么对该项事故的赔款就构成了单一损失。

例 2. 户主保险为许多不同的风险因素, 如, 火灾、暴风、责任、盗窃等, 提供了保障。可以想象, 一件单一事故的发生可能导致对多个被保险的风险因素进行赔款。如果频率分别按每一种风险因素度量, 那么对每一个被保险的风险因素的赔款就是单一损失, 同时如果对事故的赔款涉及到多个被保险风险因素, 那么对那项事故的总赔款就是集合损失。另一方面, 如果频率按每次事故为基础度量, 那么对该项事故的赔款就构成单一损失。

除非另加说明, 损失意指单一损失。在有些保险形式中, 被保险事件出险的损失额是事先规定好的。众所周知的例子是在人寿保险合同中, 对被保险人的死亡给付额是固定的。然而, 在大多数财产和责任的保险形式中, 损失额可能低于保险限额, 因此精算师必须处理不确定的损失额和局部损失额。

处理不确定损失需要通过损失大小来了解损失分布。因此对损失分布的研究就成为灾害保险精算师的主要努力方向,如果把终身年金的持续时间也看成是一种不确定损失,那么对损失分布的研究甚至也是寿险精算师的努力方向。在意外及疾病保险合同中,残疾或住院时间是不确定损失,寿险精算师和灾害险精算师都涉及到对这种合同的估价。如果所有形式的保险对索赔人或保单持有人的赔偿没有任何限制,那么对局部损失的研究就会只涉及到对损失分布的研究。然而,实际上每份保险合同都减轻或限制了给付数额,正如在下一节中我们看到的。

习题:

1. 举出一个能够根据保险公司赔款记录的方法把它解释成单一损失或集合损失的被保险事件并说明理由。

2. 在下列保险中,什么是合理的暴露单位

- (a) 团体人寿保险;
- (b) 劳工补偿保险;
- (c) 户主保险。

3. 公司 A 有如下劳工补偿保险经验:

	年份 1	年份 2
暴露(工资)	\$ 2,400,000	\$ 3,600,000
损失——次数	20	40
损失——数额	\$ 30,000	\$ 54,000

如果暴露单位为 \$ 100 工资,试分别对每一年或两年合在一起的情况确定:(a)频率;(b)确率;(c)纯保费。

4. 某房屋在以后的 12 个月内失火的概率为 0.001,如果火灾确实发生,部分损失或全部损失各自的条件概率如下:

被保险价值的百分比(%)	条件概率
25	0.5
70	0.2
75	0.1
100	0.2

如果一年的纯保费为 \$ 60, 那么这间房屋的被保险价值是多少?

1.2 保障范围的限度

一般的保险合同对赔付额或给付期都有一定的限度。没有这种限度的保险合同是不符合法律要求的。即使保险人能够提供没有限度的保险,但是由于保险费很高,被保险人往往不愿意或没有能力购买这种保单。因此,大多数保险合同都对保障范围有一定限度。例如,规定对每件被盗物品进行赔付的最高数额以及规定责任保险中的责任给付以一定数额为限。

与规定最高给付限额相反,许多保险合同都规定免赔额。所谓免赔额是指保险合同中规定的一个数额,当被保险人的实际损失低于这一数额时,保险人不负责赔偿。规定免赔额后一方面可以免除大量既费时又费力的小额赔款,另一方面还可以降低保险费。根据保险人对大于免赔额的损失的不同赔付方式,免赔额可以分为绝对免赔额、相对免赔额和消失免赔额。

所谓绝对免赔额(straight deductible)是指,当损失低于免赔额时,损失由被保险人自负;当损失高于免赔额时,被保险人自负免赔额部分,超过免赔额的那部分损失由保险人赔偿。例如,设一份汽车碰撞保单规定绝对免赔额为 \$ 500, 如果碰撞损失为 \$ 5000, 则保险人应赔付 \$ 4500。在残疾保险中,给付开始以前的等候期就是一种形式的绝对免赔额。

所谓相对免赔额(franchise deductible)是指,如果损失低于免赔额,那么保险人不负责赔偿;一旦损失高于免赔额,保险人应该对全部损失进行赔偿。劳动补偿保险就具有相对免赔额的赔偿方式;如果暂时残疾期超过了规定的等候期,那么被保险人就能得到等候期内的损失赔偿。

所谓消失免赔额(disappearing deductible)是指,如果损失低于免赔额,则被保险人自负全部损失;然而,如果损失超过免赔额,则被保险人只自负免赔额的一个百分比,而这个百分比随着实际损失超出免赔额的数额的增加而减少,当超出免赔额部分的损失达到一定数额时,被保险人自负的部分就完全消失了。

当绝对免赔额增加到一定数额后,我们就把它称为自留额(retention)。虽然自留额与绝对免赔额的名称不一,但其内涵是相同的:当损失低于自留额时,由被保险人自负;当损失超过自留额时,被保险人只自负自留额的数额。一般来说,被保险项目的价值越大,被保险人就愿意承担越大的自留额。自留额常用于保险人与其再保险人之间的合同中。

另一种限制保障范围的方法是让被保险人承担所有损失的某一百分比。这种由被保险人参与承担损失的保险称为按比例分摊(pro rata)或成数(quota share)保险(再保险)。例如,医疗保险或住院保险往往要求被保险支付损失的一定百分比,如20%。这样做可促使被保险人节约医疗费或缩短住院时间。劳工补偿保险和残疾保险习惯上对残疾损失只赔付平均工资的一定百分比,可能在65%到80%之间,以避免受伤者装病,达到减少损失数额的目的。

我们以上介绍了免赔额、最高(赔付)额或限额、按比例分摊等几种对单一损失保障范围的几种基本限制。在实践中,这几种基本限制方式可以结合起来使用。

例 1. 劳工补偿保险对残疾损失的给付可在等候期(免赔额)内提供,以后按工资的固定百分比定期给付(按比例分摊),在规定的定期给付时期后停止给付(最高限额)。

习题:

1. 某州的劳工补偿法要求对暂时残疾者提供下列给付:

(a)周给付为周工资的 $66\frac{2}{3}\%$,但最高不得超过 \$200\$;

(b)除非残疾超过 28 天,否则对最初的 7 天不予给付;如果残疾 29 天或 29 天以上,对最被的 7 天也进行给付;

(c)给付的最多周数为 104 周。

已 知	工人 1	工人 2	工人 3
周工资	\$ 150	\$ 240	\$ 360
残疾时间 长短(周)	125	5	3

分别求每个工人得到的周给付和全部给付。

2. 假设对每一索赔的消失免赔额为 \$500。如果索赔人对超出 \$500 的每 \$1 损失可得到 \$1.5 的赔付,直到实际自负额消失为止,那么

(a)对下列损失的赔付数额分别为多少?

\$250, \$500, \$600, \$1000, \$1500, \$2000;

(b)对下列损失的实际免赔数额分别为多少?

\$500, \$600, \$1000。

3. 某再保险人同意对每个超过 \$1,000,000 的巨灾损失按下述方式进行赔偿:如果这个巨灾损失中的某项被保险风险的损失没超过 \$50,000,那么赔偿该项损失的 90%;如果这个巨灾损失中的某项被保险风险的损失超过了 \$50,000,那么该项损失的赔付为 \$50,000 的 90%。设一次飓风造成下列损失:每个(风险)损失价值为 \$100,000 的 5 个损失,每个(风险)损失价值为 \$75,000 的 10 个损失,以及总共为 \$2,500,000 的其它损失,其中每项损失都低于 \$50,000。试确定:(a)毛损失,即进行任何赔付之前的损失;(b)再保险人的赔付数额;(c)原保险人的净损失。

1.3 对保障范围限度的估价

对保障范围限度进行估价的重要指标就是损失消去率。所谓损失消去率(loss elimination ratio 简记为LER)是指,在某种保障范围限度下,被消去的损失额占总损失额的比率。即:

$$\text{LER} = \frac{\text{被消去的损失额}}{\text{总损失额}}$$

或,等价地:

$$\text{LER} = \frac{\text{被消去损失的确率}}{\text{总损失的确率}}$$

我们下面用三个案例说明 LER 的计算和使用。第一个是关于自留额(绝对免赔额)的。第二个是关于限额(最高给付额)的。第三个是关于“层”值的。我们在第五章将用数理统计的记号并采用拟合分布比较正规地对这些情况进行处理。现在我们在以下三个案例中采用下列一组简单数据,这组数据表示某保险人承保的 10 个被保险的十笔损失(以 \$ 10,000 为单位)7,9,21,29,47,62,87,113,140 和 306。

例 1: 设每个被保险人的自留额为 10 个单位(即 \$ 100,000)。也就是说,每个被保险人自负每一损失的最初 \$ 100,000。由于前两笔损失低于自留额,所以它们应全部由被保险人自负。由于后八笔损失都超过了自负额,所以每笔损失应有 10 个单位由被保险人自负。因此:

$$\text{LER} = \frac{7+9+10+10+10+10+10+10+10+10}{7+9+21+29+47+62+87+113+140+306} = \frac{96}{821}$$

即,LER=0.117。

例 2: 如果规定对每笔损失的最高赔付额为 100 个单位(\$ 1,000,000),那上述损失中的前七笔都应得到全部赔偿。但是后三笔