College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

华中科技大学数学系

复变函数与积分变换学习辅导与习题全解

华中科大·二版

高等教育出版社

大学数学学习辅导丛书

复变函数与积分变换
学习辅导与习题全解

华中科大·二版

华中科技大学数学系

李红　谢松法

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换学习辅导与习题全解：华中科大：2版 / 华中科技大学数学系编. —北京：高等教育出版社，2003.8
ISBN 7—04—011951—X

Ⅰ.复…　Ⅱ.华…　Ⅲ.①复变函数—高等学校—教学参考资料②积分变换—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第045016号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010—64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800—810—0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010—82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司

开　　本	880×1230　1/32	版　　次	2003年8月第1版
印　　张	10.75	印　　次	2003年8月第1次印刷
字　　数	300 000	定　　价	15.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

前　言

复变函数与积分变换是大学理工科、经济学、管理学等各专业的专业基础课，为了帮助在校大学生学好复变函数与积分变换这一课程，我们依据国家教育部制定的高等学校《工科数学课程教学基本要求》并结合华中科技大学数学系主编的教材《复变函数与积分变换》(第二版)(高等教育出版社 2003 年出版)编写了这本学习辅导书.

全书共分八章，除原教材中第七章外，其余各章均紧扣教材，每章包括下列四个部分：

一、**基本要求与内容提要**

二、**典型例题与解题方法**

三、**教材习题同步解析**

四、**自测题**

本书力求做到基本要求明确，内容叙述简练、重点突出，以便读者系统掌握基本知识；典型例题取材适当、难易兼顾，具有较强的针对性与代表性，能帮助读者掌握基本概念和理论，开拓解题思路，提高分析能力；教材习题同步解析——对教材《复变函数与积分变换》(第二版)中除“*”号以外的全部习题给出了详尽的解答，方便读者在学习过程中进行对照分析，起到了释疑解难的作用. 此外，我们还为读者设计了一套反映该章内容的重点和难点的自测题，旨在提高读者的综合解题能力，巩固和提高学习效果.

本书可供广大学习复变函数与积分变换的高等院校、成人教育的学生参考，也可供有关的教师和科技工作者参考.

由于编者水平有限，错误在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2003 年于华中科技大学

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 82028899 转 6897　(010)82086060

传真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社法律事务部

邮编：100011

购书请拨打读者服务部电话：(010)64054588

策划编辑　徐　可

责任编辑　徐　可

封面设计　王凌波

责任绘图　郝　林

责任印制　陈伟光

试读结束：需要全本请在线购买：　www.ertongbook.com

目　　录

第一章　复数与复变函数

§1.1　基本要求与内容提要

1.1.1　基本要求

1. 熟练地对复数进行加、减、乘、除、乘方、开方和共轭运算.

2. 熟练掌握和运用复数模的三角不等式.

3. 能用复数及其共轭表示复数的实部、虚部及模.

4. 了解复数的球面表示,正确理解无穷远点的概念.

5. 弄清什么是开集、区域、闭区域、单连域与多连域.

6. 弄清什么是简单曲线、简单闭曲线、光滑曲线和逐段光滑曲线. 能用复数的方程或不等式来表示一些常见的简单区域和曲线.

7. 牢固掌握复变函数的概念,能把复变函数解释为复平面上两个集合间的映射,能把一个复变量的函数看作两个实的二元函数,也能把两个实的二元函数写成一个复变量函数.

8. 掌握复变函数的连续性概念.

1.1.2　内容提要

复变函数论中所研究的函数的自变量与因变量均取复数,因此,首先对于复数域以及复变量的函数要有清晰的认识.

1. 复数

复数的基本概念、复数的四则运算、复平面.

2. 复数的三角表示

1) 复数的模与辐角

一个复数 $z \neq 0$ 的辐角

$$\theta = \mathrm{Arg}\ z$$

是多值的，z 的辐角的主值 $\arg z$ 是其中满足条件 $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ 的那一个，则有

$$\theta = \mathrm{Arg}\ z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{1.1}$$

且

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & \text{当 } x > 0, y \text{ 为任意实数}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0, \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

2）复数模的三角不等式

3）复数的三角表示

设 $z \neq 0$，r 是 z 的模，θ 是 z 的任意一个辐角．则

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

4）用复数的三角表示作乘除法

设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$，有

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)], \quad z_2 \neq 0.$$

5）复数的乘幂与开方

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta).$$

$r = 1$ 时，有

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta \quad (\text{De Moivre 公式}).$$

设 $z^{\frac{1}{n}} = w$，则

$$w = |z|^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{1}{n}(\arg z + 2k\pi)\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{n}(\arg z + 2k\pi)\right)\right],$$

或

$$w = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi)\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi)\right)\right].$$

3. 平面点集的一般概念

开集与闭集、区域、平面曲线

4. 无穷大与复球面

5. 复变函数

1) 复变函数的概念

定义1.1　设G是复平面上的一点集,如果对于G中任意的一点z,有确定的(一个或多个)复数w同它对应,则说在G上定义了一个复变函数,记作$f(z)$.

一个复变函数也可看作一个映射,设$f(z)$的定义域为G,$f(z)$的值的集合为D,则$f(z)$将点集G的点z映射为点集D的点w,集G映射为集D,则称点w为点z的像,点z为点w的原像.

2) 复变函数的极限与连续性

定义1.2　设函数$w = f(z)$在z_0的去心邻域$0 < |z - z_0| < \rho$内有定义.若有确定的复数$A(A \neq \infty)$存在,对于任意给定的$\varepsilon > 0$,总存在一个正数δ,使得对满足$0 < |z - z_0| < \delta(0 < \delta \leqslant \rho)$的一切$z$,都有$|f(z) - A| < \varepsilon$,则称$A$为函数$f(z)$当$z$趋向$z_0$时的**极限**.记作$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$或$f(z) \to A$(当$z \to z_0$).

这个定义的几何意义是:当变点z在z_0的一个充分小的δ邻域时,它们的像点就在A的一个给定的ε邻域.

由于z_0是复平面上的点,因此z可以任意方式趋近于z_0,但不论怎样趋近,$f(z)$的值总是趋近于A.

复变函数极限有类似于实函数极限的性质.例如,当

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A, \quad \lim_{z \to z_0} g(z) = B$$

时,有

$$\lim_{z \to z_0}[f(z) \pm g(z)] = A \pm B,$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = AB,$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0).$$

复变函数极限的计算,可归结为实数极限的计算,具体来说,有下面的定理:

定理 1.1　设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$, $A=u_0+\mathrm{i}\,v_0$, $z_0=x_0+\mathrm{i}\,y_0$,则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0.$$

定义 1.3　如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$ 成立,则称 $f(z)$ 在 z_0 处**连续**.如果 $f(z)$ 在区域 D 中每一点连续,则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

由定义 1.3 与定理 1.1 知

定理 1.2　函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续的充要条件是 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

上面引进的复变函数极限与连续性的定义与实函数的极限与连续性的定义形式上完全相同,因此高等数学中证明的关于连续函数的和、差、积、商(分母不为 0)及复合函数仍连续的定理依然成立.由此可知幂函数 $w=z^n$(n 为正整数)与更一般的多项式

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$$

是复平面上的连续函数,而有理函数

$$R(z)=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}$$

除在分母为 0 的点外在复平面上也处处连续.

同二元实函数一样,在有界闭区域上的复连续函数,具有下列几个性质:

1. 有界闭区域 $\overline{D}$ 上的连续函数 $f(z)$ 是有界的.

2. 有界闭区域 $\overline{D}$ 上的连续函数 $f(z)$,在 $\overline{D}$ 上其模 $|f(z)|$ 至少取得最大值与最小值各一次.

3. 有界闭区域 $\overline{D}$ 上的连续函数 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上是一致连续的,即对任意给定 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对任何满足 $|z-z'|<\delta$ 的 $z,z'\in\overline{D}$,有

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$|f(z)-f(z')|<\varepsilon$.

§1.2　典型例题与解题方法

例 1　求复数 $-1-\mathrm{i}$ 与 $-1+3\mathrm{i}$ 的辐角及其主值.

解　根据公式(1.1),我们有

$\mathrm{Arg}(-1-\mathrm{i})=\arg(-1-\mathrm{i})+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$

与

$$\arg(-1-\mathrm{i})=\arctan\frac{-1}{-1}-\pi=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}.$$

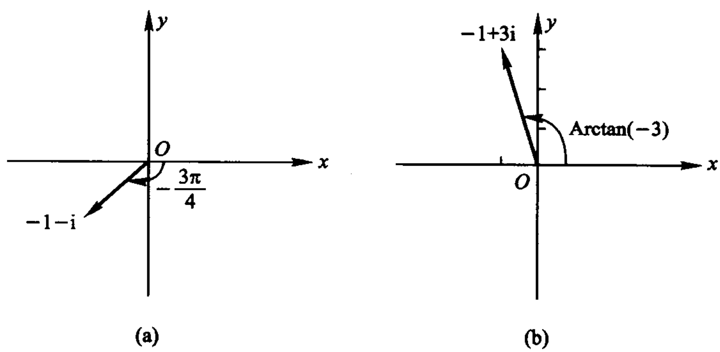

图 1.1

在计算后一式时要注意到点 $-1-\mathrm{i}$ 是在第三象限的(图 1.1(a)). 从而

$$\mathrm{Arg}(-1-\mathrm{i})=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

同样,

$$\mathrm{Arg}(-1+3\mathrm{i})=\arg(-1+3\mathrm{i})+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

由于 $-1+3\mathrm{i}$ 在第二象限(图 1.1(b)),所以

$$\arg(-1+3\mathrm{i})=\arctan\frac{3}{-1}+\pi=\arctan(-3)+\pi,$$

从而

$$\operatorname{Arg}(-1+3\mathrm{i}) = \arctan(-3) + (2k+1)\pi,$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

例 2 把复数 $z = 1 + \sin\alpha + \mathrm{i}\cos\alpha$, $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$ 化为三角表示式与指数表示式,并求 z 的辐角的主值.

解
$$\begin{aligned} z &= 1 + \sin\alpha + \mathrm{i}\cos\alpha \\ &= 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \mathrm{i}\, 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right], \end{aligned}$$

因为 $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$,所以 $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$. 因此

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) < 0,$$

故

$$r = |z| = -2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

由于

$$-\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right),$$
$$-\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right),$$

从而得 z 的三角表示式:

$$z = -2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

及指数表示式:

$$z = -2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

注意,这里的辐角 $\theta = \frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ 不是主值,因为

$$\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < \frac{7}{4}\pi,$$

但它只能与主值相差一个 2π 的整数倍,从上式容易看出,如果不等式的每项各加(-2π),得

$$-\frac{\pi}{2}<-\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}<-\frac{\pi}{4}.$$

这个 $-\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$ 就符合关于主值的要求了.因此 $\arg z=-\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$.如果 θ 取主值,那么 z 的三角表示式与指数表示式分别为

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

例 3 设复数 z_1,z_2,z_3 对应于等边三角形的三个项点,试证

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1z_2-z_2z_3-z_3z_1=0.$$

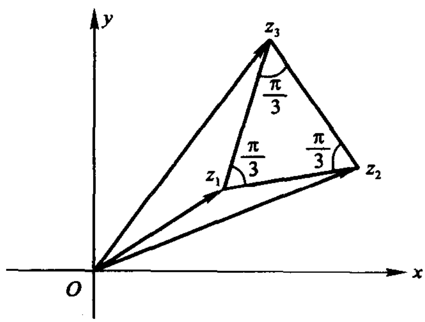

图 1.2

证一 由图 1.2 可知,向量$\overrightarrow{z_1z_2}$转过$\frac{\pi}{3}$得到向量$\overrightarrow{z_1z_3}$,$\overrightarrow{z_2z_3}$转过$\frac{\pi}{3}$成为$\overrightarrow{z_2z_1}$,并注意复数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ 的模为 1,辐角为$\frac{\pi}{3}$.根据复数的乘法可见

$$z_3-z_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_2-z_1),\quad z_1-z_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_3-z_2).$$

由此得

$$(z_3 - z_1)(z_3 - z_2) = (z_2 - z_1)(z_1 - z_2),$$

即

$$z_3^2 - z_1z_3 - z_2z_3 + z_1z_2 = z_1z_2 - z_1^2 - z_2^2 + z_1z_2.$$

故

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1 = 0.$$

注意：$\overrightarrow{z_1z_2}$ 表示$\vec{z_2} - \vec{z_1}$，不是$\vec{z_1} - \vec{z_2}$. $\overrightarrow{z_1z_2}$ 逆时针转过$\frac{\pi}{3}$ 得到$\overrightarrow{z_1z_3}$，而$\overrightarrow{z_1z_3}$ 逆时针转过$\frac{\pi}{3}$ 得到的不是$\overrightarrow{z_1z_2}$，却是$\overrightarrow{z_2z_3}$(设想向量可以平行移动)，只有逆时针转过$\frac{5\pi}{3}$或$-\frac{\pi}{3}$，才能得到$\overrightarrow{z_1z_2}$.

证二　等式 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ 可写成

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}, \tag{1}$$

若复数 z_1, z_2, z_3 满足式(1) 时，则有

$$|z_3 - z_1|^2 = |z_1 - z_2||z_2 - z_3|, \tag{2}$$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} - 1 = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - 1,$$

即

$$\frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}. \tag{3}$$

式(3) 两边取绝对值，又可得

$$|z_2 - z_3|^2 = |z_1 - z_2||z_3 - z_1|. \tag{4}$$

上面式(2) 与式(4) 相除可得 $|z_3 - z_1|^3 = |z_2 - z_3|^3$，即 $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$. 再代入式(2) 可知 $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3| = |z_1 - z_2|$，从而 z_1, z_2, z_3 为一等边三角形的顶点. 反之，若 $\Delta z_1z_2z_3$ 为等边三角形，则

$$\left|\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right| = \left|\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right| = 1.$$

$$\begin{cases}\arg\left(\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)=\arg(z_2-z_1)-\arg(z_3-z_1)=\pm\dfrac{\pi}{3},\\ \arg\left(\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right)=\arg(z_1-z_3)-\arg(z_2-z_3)=\pm\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

且正负号取法相同.故

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}.$$

例 4 求复数 $z=\dfrac{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}$ 的模.

解一 我们当然可以先把 z 化成 $a+b\mathrm{i}$ 的形式,然后求它的模.但利用复数的共轭运算更为方便.

$$\begin{aligned}|z|^2=z\bar{z}&=\frac{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}\cdot\overline{\frac{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}}\\&=\frac{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}\cdot\frac{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=1,\end{aligned}$$

故 $|z|=1$.

解二 由于本题的特殊性,还可以很快地得出

$|z|=\dfrac{|3+\mathrm{i}|}{|3-\mathrm{i}|}\dfrac{|2-\mathrm{i}|}{|2+\mathrm{i}|}=1$ (因为一对共轭复数的模相等).

例 5 如果 $|z|=1$,试证对任何复数 a 与 b,有

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=1.$$

证一

$$\begin{aligned}\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|^2&=\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\cdot\frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{b\bar{z}+a}\\&=\frac{a\bar{a}z\bar{z}+b\bar{b}+az\bar{b}+\bar{a}b\bar{z}}{b\bar{b}z\bar{z}+a\bar{a}+az\bar{b}+\bar{a}b\bar{z}}\\&=\frac{|a|^2|z|^2+|b|^2+2\mathrm{Re}(az\bar{b})}{|b|^2|z|^2+|a|^2+2\mathrm{Re}(az\bar{b})}\\&=\frac{|a|^2+|b|^2+2\mathrm{Re}(az\bar{b})}{|b|^2+|a|^2+2\mathrm{Re}(az\bar{b})}=1,\end{aligned}$$

所以 $\left|\dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=1$.

证二　因为 $|z| = 1$，所以 $z = \frac{1}{\bar{z}}$. 这样，

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right| = \left|\frac{az+b}{\bar{b}+\bar{a}\bar{z}}\cdot\frac{1}{z}\right|$$
$$= \left|\frac{az+b}{\overline{az+b}}\right|\cdot\frac{1}{|z|} = 1.$$

例 6　证明，复数 α,β 所表示的向量互相垂直的充要条件为 $\mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta}) = 0$.

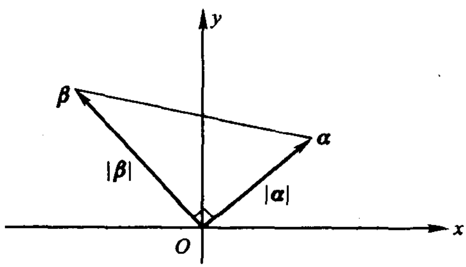

图 1.3

证　由图 1.3 可见，向量 α 与 β 互相垂直的充要条件是

$$|\beta-\alpha|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2.$$

但由于

$$|\beta-\alpha|^2 = (\beta-\alpha)(\overline{\beta-\alpha}) = (\beta-\alpha)(\bar{\beta}-\bar{\alpha})$$
$$= \beta\bar{\beta} + \alpha\bar{\alpha} - (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta)$$
$$= |\beta|^2 + |\alpha|^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta}),$$

所以 α 与 β 互相垂直的充要条件可以改写为

$$\mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta}) = 0.$$

例 7　设 n 为自然数，证明等式

$$\left(\frac{1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{1+\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}\right)^n = \cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + \mathrm{i}\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

分析　上面涉及到复数 n 次幂的等式，通常需要先将复数化为三角形式，然后再用 De Moivre 公式 $(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com