



孙家乐 许品芳 编著

经济数学方法

JINGJI SHUXUE FANGFA



东南大学出版社

SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

经济数学方法

孙家乐 许品芳 编 著

东南大学出版社

内 容 提 要

本书共两篇,其中第1篇为概率统计,内容包括预备知识——排列与组合、随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计基本知识等;第2篇为线性代数,内容包括线性方程组与行列式、 n 维向量与矩阵、矩阵的运算、线性方程组、逆矩阵、矩阵的运用、投入产出分析、线性规划初步等。每章之后附有习题,书末附有答案。

本书可作为高等学校经管类本科专业及专科专业教材,也可供教师及工程技术人员、管理决策者参考。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学方法 / 孙家乐, 许品芳编著. — 南京: 东南大学出版社, 2003. 1

ISBN 7-81089-130-8

I. 经... II. ①孙...②许... III. 经济数学—高等学校—教材 IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 086392 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人: 宋增民

江苏省新华书店经销 华东有色地研所印刷厂印刷

开本: 700mm×1000mm 1/16 印张: 20.5 字数: 402 千字

2003 年 4 月第 1 版 2003 年 4 月第 1 次印刷

印数: 1—3000 定价: 28.00 元

(凡因印装质量问题,可直接向发行科调换。电话:025-3795802)

前 言

时至今日,数学几乎已渗透到所有的自然科学与社会科学领域,而对数学的掌握已成为人们在工作与生活中不可或缺的素质。特别是经济类、管理类学科,已经大量采用近代数学的概念、理论与方法。本教材所介绍的“概率论”与“线性代数”则是被用得最多的数学分支,所以成为经管类大学生必修的数学课程。

根据国家教育部对有关专业的要求,结合经管类同学的特点,本教材从实用出发,力求用形象、通俗的语言,深入浅出地介绍有关知识,为进一步学习和应用数学打下良好基础。

本教材的概率统计部分由许品芳编写,线性代数部分由孙家乐编写,配有充足的习题,并在书后附有答案。

限于编者水平与时间仓促,书中谬误与疏漏在所难免,请广大读者不吝指正。

编 者

于三江学院

2002年8月

目 录

第 1 篇 概率统计

预备知识——排列与组合	(1)
0.1 两个基本原理	(1)
0.2 排列——与次序有关	(1)
0.3 组合——与次序无关	(3)
习题	(4)
1 随机事件与概率	(6)
1.1 引言	(6)
1.1.1 概率统计的研究对象	(6)
1.1.2 概率统计的发展简史	(7)
1.2 随机事件	(7)
1.2.1 随机事件	(7)
1.2.2 样本空间	(8)
1.2.3 事件之间的关系与运算	(9)
1.3 概率	(10)
1.3.1 概率的统计定义	(11)
1.3.2 概率的古典定义——古典概型	(12)
1.3.3 概率的加法公式	(14)
1.4 条件概率与概率的基本公式	(16)
1.4.1 条件概率	(16)
1.4.2 乘法公式	(18)
1.4.3 全概公式	(19)
1.4.4 逆概公式	(21)
1.5 贝努里概型	(23)
1.5.1 事件的独立性	(23)
1.5.2 贝努里概型(重复独立试验)	(25)
1.5.3 二项概率公式	(26)
习题 1	(28)
2 随机变量及其分布	(33)
2.1 随机变量	(33)

2.1.1 随机变量	(33)
2.1.2 离散型随机变量及其概率分布	(34)
2.1.3 二项分布与泊松分布	(36)
2.2 分布函数	(40)
2.2.1 连续型随机变量及其分布函数	(40)
2.2.2 密度函数	(43)
2.2.3 均匀分布与指数分布	(47)
2.3 正态分布	(49)
2.3.1 正态分布的一般概念	(49)
2.3.2 标准正态分布	(50)
2.3.3 正态分布标准化	(51)
2.3.4 3σ 规则	(52)
2.3.5 一个中心极限定理	(53)
2.4* 多维随机变量及其分布	(54)
2.4.1 二维离散型随机变量	(54)
2.4.2 二维随机变量的分布函数	(55)
2.4.3 二维连续型随机变量	(56)
2.4.4 二维离散型随机变量的边际分布	(57)
2.4.5 二维连续型随机变量的边际分布	(58)
2.4.6 随机变量的独立性	(60)
习题 2	(61)
3 随机变量的数字特征	(68)
3.1 数学期望	(68)
3.1.1 离散型随机变量的数学期望	(68)
3.1.2 3 个常用的离散型随机变量的数学期望	(70)
3.1.3 连续型随机变量的数学期望	(70)
3.1.4 数学期望的性质	(71)
3.2 方差	(72)
3.2.1 随机变量的方差概念	(72)
3.2.2 6 个常用分布的方差	(73)
3.2.3 方差的性质	(76)
3.3* 二维随机变量的数字特征	(77)
3.3.1 边际数学期望与边际方差	(77)
3.3.2 条件数学期望——回归曲线与相关比	(78)
3.3.3 协方差与相关系数	(79)
习题 3	(81)

4 数理统计基本知识	(84)
4.1 总体、样本与统计量	(84)
4.1.1 总体与个体	(84)
4.1.2 样本	(84)
4.1.3 简单随机抽样	(85)
4.1.4 统计量	(85)
4.1.5 样本均值与样本方差	(86)
4.1.6 3种常用统计量的分布	(86)
4.2 参数估计	(88)
4.2.1 数学期望的点估计	(88)
4.2.2 方差的点估计	(89)
4.2.3 样本的变异系数	(90)
4.2.4 已知方差 σ^2 , 对数学期望进行区间估计	(91)
4.2.5 未知方差 σ^2 , 对数学期望的区间估计	(92)
4.2.6 方差的区间估计	(93)
4.3 假设检验	(94)
4.3.1 问题的提出	(94)
4.3.2 基本思想	(95)
4.3.3 $\bar{U}$ 检验	(95)
4.3.4 T 检验	(97)
4.3.5 χ^2 检验	(97)
习题 4	(99)

第 2 篇 线性代数

5 线性方程组与行列式	(101)
5.1 线性方程组	(101)
5.1.1 几个实例	(101)
5.1.2 基本概念	(102)
5.2 二阶、三阶行列式	(104)
5.2.1 二阶、三阶行列式	(104)
5.2.2 三阶行列式的性质	(107)
5.2.3 行列式展开定理	(109)
5.3 n 阶行列式	(112)
5.3.1 基本概念	(112)
5.3.2 n 阶行列式的计算	(113)

5.3.3 n 阶线性方程组的解法——克莱姆法则	(114)
习题 5	(117)
6 n 维向量与矩阵	(121)
6.1 n 维向量	(121)
6.1.1 n 维向量的概念	(121)
6.1.2 向量组的线性相关性	(123)
6.1.3 加长向量组的线性无关性	(125)
6.1.4 向量组的极大线性无关组	(126)
6.2 矩阵概念	(127)
6.2.1 基本概念	(127)
6.2.2 矩阵的秩	(129)
6.2.3 利用秩研究向量间的线性关系	(130)
6.3 矩阵的初等变换	(131)
6.3.1 初等变换的定义	(131)
6.3.2 利用初等变换求秩	(134)
习题 6	(137)
7 矩阵的运算	(141)
7.1 矩阵的各种形式	(141)
7.1.1 零矩阵	(141)
7.1.2 对角矩阵与单位矩阵	(142)
7.1.3 转置矩阵	(142)
7.1.4 三角矩阵	(144)
7.2 矩阵的运算	(144)
7.2.1 矩阵的加、减法	(144)
7.2.2 数与矩阵的乘法	(147)
7.2.3 矩阵与矩阵的乘法	(149)
7.3 矩阵的分块	(156)
7.3.1 分块矩阵基本概念	(156)
7.3.2 分块矩阵的加、减法与数乘	(156)
7.3.3 分块矩阵的乘法与转置	(158)
习题 7	(160)
8 线性方程组	(166)
8.1 线性方程组的相容性	(166)
8.1.1 相容的线性方程组	(166)
8.1.2 解的判别定理	(167)

8.1.3 利用初等行变换求解方程组	(170)
8.2 齐次线性方程组	(174)
8.2.1 齐次线性方程组解的性质	(174)
8.2.2 齐次线性方程组解的结构定理	(175)
8.3 非齐次线性方程组	(181)
8.3.1 非齐次线性方程组解的性质	(181)
8.3.2 非齐次线性方程组解的结构定理	(181)
习题 8	(188)
9 逆矩阵	(193)
9.1 逆矩阵概念	(193)
9.1.1 逆矩阵的定义	(193)
9.1.2 逆阵的性质	(195)
9.1.3 方阵可逆的充要条件	(197)
9.2 利用初等变换求逆阵	(200)
9.2.1 初等变换与初等阵	(200)
9.2.2 利用初等行变换求逆阵	(202)
9.3 利用逆阵求解矩阵方程	(205)
习题 9	(209)
10 矩阵的应用	(214)
10.1 海赛(Heaviside)矩阵	(214)
10.1.1 二阶海赛矩阵	(214)
10.1.2 三阶海赛矩阵	(215)
10.2 矩阵决策	(216)
10.2.1 设备更新问题	(216)
10.2.2 市场营销决策问题	(219)
10.3 马尔可夫分析	(223)
10.3.1 市场占有率预测	(224)
10.3.2 产品销售量预测	(225)
10.3.3 最佳维修策略	(227)
10.4 模糊综合评判	(230)
10.4.1 单因素的模糊评判	(230)
10.4.2 多因素综合评判	(231)
习题 10	(236)
11 投入产出分析	(240)
11.1 投入产出分析基本概念	(240)

11.1.1 基本概念	(240)
11.1.2 投入产出表	(241)
11.2 投入产出模型	(245)
11.2.1 直接消耗系数矩阵与列昂节夫矩阵	(245)
11.2.2 完全消耗系数矩阵及中间投入系数矩阵	(250)
11.2.3 投入产出基本预测模型	(253)
11.3 投入产出模型应用举例	(254)
11.3.1 国民经济部门生产计划调整预测	(254)
11.3.2 检查现有计划方案	(255)
11.3.3 劳动力需求预测	(256)
11.3.4 价格分析	(257)
习题 11	(260)
12 线性规划初步	(264)
12.1 线性规划及其数学模型	(264)
12.1.1 基本概念	(264)
12.1.2 建立模型举例	(265)
12.2 两变量线性规划问题的图解法	(269)
12.2.1 图解法	(269)
12.2.2 列举法	(272)
12.3 线性规划问题的标准型及基本理论	(273)
12.3.1 线性规划模型的标准型	(273)
12.3.2 线性规划的基本理论	(275)
12.4 单纯形法	(277)
12.4.1 单纯形解法的步骤	(278)
12.4.2 利用单纯形表求线性规划问题	(278)
习题 12	(286)
习题答案	(292)
附表 1 标准正态分布的函数表	(309)
附表 2 泊松分布表	(310)
附表 3 t 分布表	(311)
附表 4 χ^2 分布表	(312)
附表 5 F 分布表	(314)

第 1 篇 概率统计

预备知识 —— 排列与组合

0.1 两个基本原理

1. 加法原理

如果要完成某项任务有 n 类办法, 而第 k ($k = 1, 2, \dots, n$) 类办法中又有 m_k 种方法, 而且所有方法中没有两个是相同的. 只要选择一类办法中的一种方法就可以完成这项任务, 那么完成该项任务共有

$$N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

种不同的方法.

例如: 从南京到上海可以乘火车、汽车、轮船或飞机. 每天火车有 38 班, 汽车有 127 班, 轮船有 3 班, 飞机有 1 班, 则每天共有

$$N = 38 + 127 + 3 + 1 = 169$$

种不同的走法.

2. 乘法原理

如果完成某项任务必须经过 n 个步骤, 而完成第 k ($k = 1, 2, \dots, n$) 个步骤又有 m_k 种方法, 那么完成该项任务共有

$$N = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$$

种不同的方法.

例如: 王先生有 5 件衬衣, 4 件羊毛衫, 3 套西装, 则有.

$$N = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

种搭配穿法.

0.2 排列 —— 与次序有关

1. 不允许重复的排列: 选排列与全排列

定义 1 从 n 个不同元素中任取 r ($0 < r \leq n$) 个不同元素, 按照一定顺序排

成一列,称为从 n 个元素中取 r 个的排列. 这种排列的总数记作 P_n^r (或 ${}_nP_r$ 或 A_n^r 或 $P(n, r)$).

当 $1 \leq r < n$ 时称为选排列; 当 $r = n$ 时称为全排列.

P_n^r 的计算公式

从 n 个不同的元素中任取一个元素放在第一个位置上, 共有 n 种取法, 从余下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上, 共有 $n-1$ 种取法……最后, 从剩下的 $n-(r-1) = n-r+1$ 个元素中任取一个放在第 r 个位置上共有 $n-r+1$ 种取法, 于是由乘法原理, 排列总数

$$P_n^r = n(n-1) \cdot \cdots \cdot (n-r+1) \quad (0.1)$$

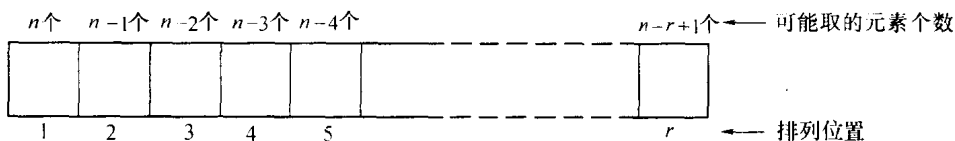


图 0.1

利用阶乘符号 $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, 式(0.1) 可以表示成

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (0.2)$$

特别有全排列公式

$$P_n^n = n! \quad (0.3)$$

注意, 当 $r = 0$ 时, $P_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1$, 表示从 n 个元素中不取元素进行排列, 为了使公式完备, 把这种情况理解为广义的排列.

例 0.1 从全班 40 人中选出 3 人分别担任班长、学习委员、文体委员, 共有

$$P_{40}^3 = 40 \times 39 \times 38 = 59\,280$$

种选法.

例 0.2 (1) 有 15 本不同的书, 10 个人去借, 每人只能借一本, 问有多少种不同的借法?

(2) 有 10 本不同的书, 15 个人去借, 每人最多借一本, 每次把书都借完, 问有多少种借法?

解 (1) 设想 10 个借书人排成一列, 问题变成从 15 本不同的书(元素)中任取 10 本分给 10 个借书人, 从而有

$$P_{15}^{10} = \frac{15!}{(15-10)!} = \frac{15!}{5!} = 10\,897\,286\,400$$

种借法.

(2) 设想 10 本书排成一列, 15 人借 10 本书, 必有 5 人借不到, 这相当于从 15 人

(元素)中任选 10 人依次去取书,从而仍有

$$P_{15}^{10} = \frac{15!}{5!} = 10\,897\,286\,400$$

种借法.

例 0.3 在 3 000 与 8 000 之间,有多少个没有重复数字的奇数?

解 3 000 到 8 000 之间的数,千位上只能是 3、4、5、6、7 五个数;作为奇数个位只能是 1、3、5、7、9 五个数;而个位与千位不能重复,注意到可能重复的是 3、5、7 三个数,所以可以分成两类:

一类是千位数是 4 或 6,个位是 1、3、5、7、9 中之一,其余八个数字中任取两个放在百位、十位上,所以共有

$$2 \times 5 \times P_8^2 = 10 \times 8 \times 7 = 560(\text{个})$$

另一类是千位是 3 或 5 或 7,个位是 1、3、5、7、9 中除去千位已取过后余下 4 个中的一个,而十位、百位仍在余下的八个数字中任取,所以共有

$$3 \times 4 \times P_8^2 = 12 \times 8 \times 7 = 672(\text{个})$$

根据加法原理,总共有

$$560 + 672 = 1\,232(\text{个})$$

2. 允许重复的排列

定义 2 从 n 个不同元素中任取 r 个(允许重复取)排成一列,称为从 n 个元素中允许重复取 r 个的排列,其总数记作 U_n^r .

注意到每次均有 n 个元素可选取,所以有公式

$$U_n^r = n^r \quad (0.4)$$

例 0.4 南京市电话号码是 7 位数,问南京市电话局共能容纳多少用户(一个号码算一个用户)?如果电话号码的首位不能为 0 与 1,问南京市电话局可容纳多少用户?

解 因为每位数都有 10 个可能数字,所以共有用户

$$U_{10}^7 = 10^7 = 10\,000\,000(\text{个})$$

若首位除去 0 与 1,还有 8 种可能,余下 6 位,每位有 10 种可能,所以共有用户

$$P_8^1 \cdot U_{10}^6 = 8\,000\,000(\text{个})$$

0.3 组合 —— 与次序无关

定义 3 从 n 个不同元素中任取 r ($r \leq n$) 个不同的元素,不管次序,算作一组.称为从 n 个元素中取 r 个的**组合**.这种组合的总数记作 C_n^r .

组合与排列的区别在于,组合中各元素没有先后次序(位置)之分,而排列中各元素与先后次序(位置)相联系.

我们也可以把选排列分解成下面两个步骤来完成.

第一步,从 n 个不同元素中任取 r 个不同元素组成一组(这是一个组合);第二步,将这一组 r 个元素进行排列(这是一个全排列).从而有

$$P_n^r = C_n^r \cdot P_r^r$$

由此得组合公式

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{P_r^r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (0.5)$$

例 0.5 四国女排超霸赛,每两个队赛一场,问共赛几场?

$$\text{解} \quad C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6(\text{场})$$

例 0.6 从 5 位男生 4 位女生中抽出 4 人组成一个小组,要求其中至少有 2 名男生,至少有 1 名女生,问有多少种组织法?

解 只有两种可能:2 男 2 女或 3 男 1 女. 2 男 2 女有 $C_5^2 \cdot C_4^2$ 种组织法. 3 男 1 女有 $C_5^3 \cdot C_4^1$ 种组织法. 由加法原理,共有组织法

$$\begin{aligned} N &= C_5^2 \cdot C_4^2 + C_5^3 \cdot C_4^1 \\ &= \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \cdot \frac{4 \times 3}{2 \times 1} + \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \cdot 4 \\ &= 60 + 40 = 100(\text{种}) \end{aligned}$$

例 0.7 100 件产品中有 10 件次品,从中抽取 5 件,问:(1)全是正品有多少种取法? (2)有 2 件次品有多少种取法?

解 100 件产品中有 10 件次品,还有 90 件是正品(这是隐性条件),现抽取 5 件.

(1)全是正品,自然是从 90 件正品中取的,所以有取法

$$C_{90}^5 = 43\,949\,268(\text{种})$$

(2) 2 件次品取自 10 件次品,另 3 件正品取自 90 件正品(隐性要求),所以有取法

$$C_{10}^2 \times C_{90}^3 = 5\,286\,600(\text{种})$$

例 0.8 一口袋中有 5 只白球,3 只黑球,任取 2 只球,求满足下列条件的各有多少种取法:(1)取得 2 只白球;(2)取得 2 只黑球;(3)取得一只白球一只黑球.

解 (1)有 $C_5^2 = 10$ 种取法;

(2)有 $C_3^2 = 3$ 种取法;

(3)有 $C_5^1 \cdot C_3^1 = 15$ 种取法.

习 题

1. 一条铁路上有 12 个车站,问需准备多少种不同的车票?若不同两站间的票价不同,那么有多少种不同的票价?

2. 用 0 到 9 这十个数字,可以组成多少个没有重复数字的三位数?

3. 一排 10 个座位,有 5 人就坐,有多少种坐法?

4. 10 个球队参加篮球循环赛,一共要比多少场?

5. 某施工队有 8 名老工人,5 名新工人,现要派三名工人去完成一项工作,要求其中至少包含一名老工人,问一共有多少种派法?

6. 在 100 件产品中有 8 件次品,任取 10 件,其中恰有 2 件次品,问有多少种不同的取法?

7. 有 100 件产品,其中有 2 件次品,任取 3 件,问:(1) 一共有多少种不同的取法?(2) 恰有一件次品,共有多少种取法?(3) 至少有一件次品共有多少种取法?

8. 某人有一百元、伍拾元、贰拾元、拾元、伍元、贰元、壹元、伍角、贰角、壹角人民币各一张,问用这些人民币能够付多少种不同的款项?

9. 把 3 封不同的信投入 4 个有编号的信箱,有多少种不同的投法?

10. 只有 0、1、2 三个数码,可以编制多少个 4 位商品号码?

11. 有 10 把钥匙,其中有 3 把能打开门,问任取两把能打开门,有多少种取法?

1 随机事件与概率

1.1 引言

1.1.1 概率统计的研究对象

在客观世界中,包括自然界与人类社会中有许多现象在事前无法预测其结果,即所谓的不确定现象.如

- 1. 抛一枚硬币,是出现国徽还是出现币值;
- 2. 掷一颗骰子,出现几点;
- 3. 从一副扑克牌中任意抽取一张,是否是红桃 K;
- 4. 买一张彩票,会不会中奖;
- 5. 打靶,能否打中目标.

这些都是事前无法绝对确定的.

凡是在一定条件下可能发生,也可能不发生的现象,称为偶然现象,或称为随机现象.而在一定条件下必然发生或必然不发生的现象叫做必然现象.

在中学所学的知识几乎都是必然现象.如物理定律:在标准大气压下水在 100°C 时沸腾;上抛一块石子,必定落回地面;又如数学定理:圆面积必定是 πr^2 ,三角形内角和必定是 180° .

人类首先研究必然现象,得出许多必然规律,称之为知识,创立了许多科学.但随机现象也客观存在,有时还不得不研究它.如赌徒要研究赌博之规律;军事家要研究兵器的有效率(即命中率);公交公司要研究各条线路上客流规律,以决定投放多少车辆;彩民也在探讨中奖的机会.人们在大量的重复实践与观察中发现:

随机现象在一次、二次实践中结果是不确定的,但当大量重复实践时却会出现某种规律性,即有相对的稳定性.例如:

- 1. 当抛硬币次数很多时,出现国徽与币值的次数几乎是相等的(见表 1.1);

表 1.1 抛币试验

试验者	抛掷次数 n	币值朝上次数 μ	频率 $k = \mu/n$
蒲 丰 (Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊 (K. Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

2. 买彩票大多数人是不会中奖的,但总有少数会中奖,甚至中大奖;
3. 公交线上何时人多,何时人少,在非节假日是相对稳定的;
4. 一只空容器内每个空气分子的运动方向速度大小都是随机的,但从宏观上看,气体对容器壁的压力却是稳定的.

大量实践表明,在偶然性中隐藏着必然性.

概率统计就是研究大量随机现象中的统计规律性的科学.

1.1.2 概率统计的发展简史

概率统计最早出现在 17 世纪中叶,开始时出现在赌博之中,接着用于产品检验与社会保险. 18 ~ 19 世纪应用于人口统计、误差理论、气象预报、地震预报、炮兵射击理论. 20 世纪进而扩大应用于生产过程的最佳控制、电子元件的可靠性分析、农业试验、军事科学、公用事业和社会科学的调查统计. 因此,概率统计是应用十分广泛的一个数学分支.

本篇内容只介绍概率统计的一些入门知识,为今后学习经济学、市场预测、经营决策及全面质量管理等打下必备基础.

1.2 随机事件

1.2.1 随机事件

1. 随机试验

观察某事物在一定条件下发生什么现象,出现什么结果的过程,称为试验.
例如:

试验 E_1 : 抛硬币,观察出现国徽或币值的情况;

试验 E_2 : 掷骰子,观察出现的点数;

试验 E_3 : 抽扑克牌,观察其花色与点数;

试验 E_4 : 在一批灯泡中任抽 1 只,测试其寿命;

试验 E_5 : 商店每周盘点,统计营业额;

试验 E_6 : 记录某寻呼台 1 分钟接到呼唤的次数;

试验 E_7 : 统计某个考题在各班的得分率;

试验 E_8 : 打靶,记录每一枪的环数.

这些试验具有下列共同性:

- (1) 可重复性: 在相同的条件下可重复进行;
- (2) 结果的不确定性: 每次试验的结果有多种可能性,而且在事先就明确所有可能的结果;
- (3) 随机性: 在每次试验前,不能准确地预言将出现哪一个结果.