北大燕园

李永乐·李正元考研数学①

2004年版

轻轻松松考高分

高等数学篇

——历年试题分类解析

编著　北京大学　李正元
李秀淳

国家行政学院出版社

李永乐·李正元考研数学 ①

轻轻松松考高分

高等数学篇

——历年试题分类解析

编著 北京大学 李正元
李秀淳

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

轻轻松松考高分．高等数学篇：名师历年试题分类解析/李正元，李秀淳编．
—北京：国家行政学院出版社，2003
ISBN 7-80140-268-5

Ⅰ．轻…　Ⅱ．①李…　②李…　Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-解题　Ⅳ．013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 004075 号

轻轻松松考高分
高等数学篇
李正元　李秀淳　编著
*
国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区长春桥路 6 号
邮政编码：100089
发行部电话：68920615　68929949
北京市朝阳印刷厂印刷　新华书店经销
*
787×1092　1/16 开本　16.5 印张　400 千字
2003 年 2 月北京第 1 版　2003 年 2 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-80140-268-5/O・22　　定价：25.00 元

研究过去 找出规律
认识现在 掌握重点
预测未来 轻取高分
（代前言）

（一）

当代著名数学家 G. D. 伯克霍夫（Birkhoff）指出："再也没有一个学科比数学更易于通过考试来测定智力了。"对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学入学考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

（二）

本套书，即**《轻轻松松考高分·高等数学篇》**（适用于考数学一、数学二的考生）

《轻轻松松考高分·微积分篇》（适用于考数学三、数学四的考生）

《轻轻松松考高分·线性代数、概率论与数理统计篇》（适用于所有考数学的考生）

汇集了 1987 年—2003 年历届全国硕士研究生入学统考试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本套书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，使考生引以为戒。

本套书把历年考研数学试题依据考试大纲的章节顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

考点分布——统计分析本章所考题型、历年试题在该题型所占分数和所考次数，便于考生分析命题规律，从而预测今后命题趋势。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该题型考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而掌握考研数学试题的广度和深度，做到复习时目标明确，心中有数。而且把历年同一内容的试题放在一起，我们可以发现近几年的考题中有许多与往年试题类似，因

此研究往年的考题对我们准备下一年的研究生数学考试是不言而喻的。

另外，每种题型后附有**综述**——归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

小结——梳理本章知识结构，归纳本章重要知识点的具体内容及相关结论（公式、定理）。

（三）

著名数学家、教育家 G. 波利亚（Polya）说："解题是智力的特殊成就，而智力乃是人类的天赋。因此，解题可以认为是人的最富有特征性的活动。"本套书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书（推荐考生认真阅读由**国家行政学院出版社**出版、**李永乐**、**李正元**等编写的**《考研数学复习全书》（理工、经济类）**，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路极其吻合），复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法作以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做 2—3 遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

再提一个建议供参考。关于考题重复的问题，需要说明的是：这种重复不仅在理工类和经济类内部，而且也在数学一至四之间重复。近年来多次出现过原来理工类试题拿到经济类中做考题的情况。这就是说，经济类考生也应该了解理工类试题。因此，建议经济类考生在阅读《轻轻松松考高分·微积分篇》的同时，参看一下《轻轻松松考高分·高等数学篇》也是十分必要的。

（四）

除本套书外，将陆续推出**《考研数学复习全书》（理工、经济类）**、**《考研数学全真模拟经典 400 题》（理工、经济类）**、**《考研数学最后冲刺超越 135 分》（理工、经济类）**等辅导书。其中，**《考研数学复习全书》（理工、经济类）**作为全面复习第一阶段使用。**《轻轻松松考高分·高等数学篇》**、**《轻轻松松考高分·微积分篇》**、**《轻轻松松考高分·线性代数、概率论与数理统计篇》**与**《考研数学全真模拟经典 400 题》（理工、经济类）**作为检查第一阶段复习效果使用，即第二阶段模拟训练用书；**《考研数学最后冲刺超越 135 分》（理工、经济类）**则是作为第三阶段即冲刺梳理、归纳时的参考用书。

（五）

参加本套书编写的有：清华大学 **李永乐**、北京大学 **李正元**、**刘西垣**、**范培华**、**李秀淳**、中国人民大学 **袁荫棠**、北方交通大学 **赵达夫**、东北财经大学 **龚兆仁**、天津财经学院 **鹿立江**、武汉空军雷达学院 **徐宝庆**。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝考生复习顺利，心想事成，考研成功！

编者

2003 年 2 月

目　　录

第一章　函数 极限 连续性

编者按

函数是微积分的研究对象,极限是微积分的理论基础,而连续性是可导性与可积性的重要条件.它们是每年必考的内容之一,数学一的分数平均每年占高等数学部分的10%,数学二平均每年占11%;而实际上几乎每个问题都离不开函数,而极限与连续性也常常包含在微积分的试题当中,这里所说的分数只是单独命题所占的部分.

本章历年试题的题型大致可归纳为:

1. 函数的概念.
2. 极限概念与性质.
3. 简单的未定式极限.
4. 1^{∞} 型未定式.
5. 可用等价无穷小因子代换化简的未定式.
6. 需要用洛必达法则或泰勒公式求解的未定式.
7. 利用已知的导数求某些极限.
8. 确定极限式中的参数.
9. 数列的极限.
10. 无穷小及其阶.
11. 函数的连续性.

▶1987 年 —2003 年历年试题分类解析

一、函数的概念及其复合

1.(87,2,4 分)　$f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}\ (-\infty<x<+\infty)$ 是

(A) 有界函数.　(B) 单调函数.　(C) 周期函数.　(D) 偶函数.　【　】

【分析】　由于 $f(-x)=|-x\sin(-x)|e^{\cos(-x)}=|x\sin x|e^{\cos x}=f(x)$,则 $f(x)$ 为偶函数.故应选(D).

【评注】　本题主要考查函数的四个基本性质即单调性、奇偶性、周期性、有界性的概念.

2.(88,$\frac{1}{2}$,5 分)*　设 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

【分析】　这是已知复合函数的表达式反过来求"中间变量"$\varphi(x)$ 的题.关键是写出 $f[\varphi(x)]$ 的一般形式.

---

* 88,$\frac{1}{2}$,5 分　分别表示 1988 年,数学一,数学二,本题满分 5 分.

【解】 因为 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = 1 - x$,故 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$.再由 $\ln(1-x) \geqslant 0$,知 $1 - x \geqslant 1$,即 $x \leqslant 0$.这就是 $\varphi(x)$ 的定义域.

3.(90, $\frac{1}{2}$, 3 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] =$ ________.

【分析】 根据 $f(x)$ 的定义知,当 $|x| \leqslant 1$ 时,有 $f(x) = 1$.又 $f(1) = 1$,于是当 $|x| \leqslant 1$ 时,复合函数 $f[f(x)] \equiv 1$.

当 $|x| > 1$ 时,有 $f(x) = 0$.又 $f(0) = 1$,即当 $|x| > 1$ 时,也有 $f[f(x)] \equiv 1$.因此,对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$,有 $f[f(x)] \equiv 1$.

故应填:1.

【评注】 本题考查复合函数的基本概念和函数复合的基本方法.

4.(92,2,3 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0, \\ x^2 + x, & x > 0, \end{cases}$ 则

(A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leqslant 0, \\ -(x^2 + x), & x > 0. \end{cases}$ (B) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0, \\ -x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$

(C) $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0, \\ x^2 - x, & x > 0. \end{cases}$ (D) $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$ 【 】

【分析】 本题可有多种解法.

方法 1° 令 $y = -x$,则 $x = -y$,且当 $x \leqslant 0$ 时,$y \geqslant 0$;$x > 0$ 时,$y < 0$.代入 $f(x)$ 的表达式,有

$$f(-y) = \begin{cases} (-y)^2, & y \geqslant 0, \\ (-y)^2 + (-y), & y < 0. \end{cases}$$

视式中的 y 为 x,便是

$$f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

可见(D)是正确的.

方法 2° 直接计算.当 $x \geqslant 0$ 时,$-x \leqslant 0$,故由 $f(x)$ 的定义,$f(-x) = (-x)^2 = x^2$;而当 $x < 0$ 时,$-x > 0$,则 $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$,即(D)是正确的.

方法 3° 也可利用 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的图象是关于 y 轴对称的原理,直接从图形上推断(D)是正确的.

5.(95,2,5 分) 设 $f(x^2 - 1) = \ln \frac{x^2}{x^2 - 2}$,且 $f[\varphi(x)] = \ln x$,求 $\int \varphi(x) dx$.

【分析】 本题首先应求出 $\varphi(x)$ 的表达式.

【解】 因为 $f(x^2 - 1) = \ln \frac{x^2}{x^2 - 2} = \ln \frac{(x^2 - 1) + 1}{(x^2 - 1) - 1}$,

所以 $f(x) = \ln \frac{x + 1}{x - 1}$.

又 $f[\varphi(x)] = \ln \frac{\varphi(x) + 1}{\varphi(x) - 1} = \ln x$,则 $\frac{\varphi(x) + 1}{\varphi(x) - 1} = x$.解得 $\varphi(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$.

因此 $\int \varphi(x) dx = \int \frac{x + 1}{x - 1} dx = \int (1 + \frac{2}{x - 1}) dx = x + 2\ln(x - 1) + C$.

【评注】 本题主要考查复合函数和不定积分.

6.(97,2,3分) 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]$ 为

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 【 】

【分析】

当 $x<0$ 时,$f(x)=x^2>0$,则 $g[f(x)]=f(x)+2=x^2+2$;

当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=-x\leqslant 0$,则 $g[f(x)]=2-f(x)=2-(-x)=2+x$.

故 $g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 因此应选(D).

7.(01,2,3分) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A)0. (B)1. (C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$ 【 】

【分析】 由于 $f(x)\leqslant 1$,故 $f[f(x)]=1$,因而 $f\{f[f(x)]\}=1$.

故应选(B).

【评注】 本题与第3题基本一致.

综　　述

1."复合"是函数的一个基本运算,最常见的初等函数就是由基本初等函数经有限次的四则与复合运算得到的."复合"的问题是有关函数表达式的重要问题之一,主要题型为:

(1) 已知 $f(x)$,$g(x)$,求 $f(g(x))$.

特别要注意分段函数的复合:一般应按照由自变量开始,先内层后外层的自然顺序,逐次复合.

(2) 已知 $f(x)$,$f(g(x))$,求 $g(x)$.

一般是引进中间变量 $u=g(x)$,得 u 与 x 的关系式 $f(u)=f(g(x))$,解出 u 便得 $u=g(x)$.

(3) 已知 $g(x)$,$f(g(x))$,求 $f(x)$.

一般方法是引进中间变量 $u=g(x)$,解出 $x=g^{-1}(u)$,代入 $f(g(x))$ 便得 $f(u)$.例如:

已知 $f(\sqrt[3]{x}-1)=x-1$,求 $f(x)$.

令 $u=\sqrt[3]{x}-1$,解出 $x=(u+1)^3$,则得 $f(u)=(u+1)^3-1$,即 $f(x)=(x+1)^3-1$.

2.考生应该熟知函数的几个基本性质:单调性、有界性、奇偶性与周期性以及它们的运算.

二、极限概念与性质

8.(87,2,4分) 函数 $f(x)=x\sin x$

(A) 当 $x\to\infty$ 时为无穷大. (B) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

(C) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界. (D) 当 $x\to\infty$ 时有有限极限. 【 】

【分析】 注意到当 $n \to \infty$ 时，

$$f(2n\pi) = (2n\pi)\sin(2n\pi) \equiv 0 \to 0,$$

$$f(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = (\frac{\pi}{2} + 2n\pi) \cdot 1 \to \infty,$$

则 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$内无界，但 $x \to \infty$ 时，$f(x)$ 不是无穷大，也没有有限极限. 故应选(C).

【评注】 本题主要考查无穷大量、无穷变量、有界变量这三个基本概念. 这里应特别注意无穷大量和无界变量的关系及两者的区别.

9.(93,2,3分) 当 $x \to 0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是

(A) 无穷小.　　(B) 无穷大.

(C) 有界的，但不是无穷小.　　(D) 无界的，但不是无穷大.　　【　】

【分析】 这里的关键是要弄清无穷大量与无界变量之间的区别. 无界变量不一定是无穷大量.

若取 $x_{1k} = \frac{1}{k\pi}$，则 $\frac{1}{x_{1k}^2}\sin\frac{1}{x_{1k}} = (k\pi)^2\sin k\pi = 0$,

$x_{2k} = \frac{1}{\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi}$，则 $\frac{1}{x_{2k}^2}\sin\frac{1}{x_{2k}} = (2k + \frac{1}{2})^2\pi^2$,

$k = 1,2,\cdots$，因此，当 $k \to \infty$ 时，有 $x_{1k} \to 0$ 及 $x_{2k} \to 0$，但变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 或等于0或趋于 $+\infty$，这表明当 $x \to 0$ 时它是无界的，但不是无穷大量. 即(D)项正确. 故应选(D).

△ **10.(98,2,3分)** 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则下列断言正确的是

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散.　　(B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小.　　(D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小.　　【　】

【分析】 (A)、(B)、(C) 三项可用反例排除.

(A) 项显然是不正确的，因为只需取数列 $y_n \equiv 0$，就排除了它. 若取数列

$$x_n = \begin{cases} 2k-1, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k, \end{cases} \quad y_n = \begin{cases} 0, & n = 2k-1, \\ 2k, & n = 2k, \end{cases} \quad k = 1,2,\cdots$$

便排除了(B)项.

对于(C)项，若数列 $x_n \equiv 0$，则 y_n 可为任何数列，所以(C)项也不正确. 故只有(D)项是正确的.

事实上，当 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小时，数列 x_n 为无穷大，即对任意给定 $M > 0$，存在 $N_1 > 0$，使当 $n > N_1$ 时，$|x_n| > M$；由 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n y_n = 0$，则对任意给定 $\varepsilon > 0$，存在 $N_2 > 0$，使当 $n > N_2$ 时，$|x_n y_n| < \varepsilon$，故当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时，有 $M|y_n| < |x_n y_n| < \varepsilon$，即

$$|y_n| < \frac{1}{M}\varepsilon,$$

所以 y_n 必为无穷小.

直接利用无穷小量的性质也可以推出(D)为正确选项. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，有 $x_n y_n = \alpha_n$，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$. 当 $x_n \neq 0$ 时可写成 $y_n = \frac{\alpha_n}{x_n}$. 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 为两个无穷小 $\frac{1}{x_n}$ 与 α_n 之积，故 y_n 亦为无穷小，应选(D).

【评注】 本题只给出一个条件 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，对数列 x_n 和 y_n 的限制在选项中给出.(A) 与(C) 容易被否定，因此，答错的大都填(B).表明对“无界”与“无穷大”的区别尚不十分清楚.由前面的反例可以看到，两个无界变量的乘积仍是无穷小量.

本题考查考生对数列收敛概念的掌握以及会运用举反例排除不正确断言的能力.

△ **11.(99,2,3分)** “对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

(A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分条件又非必要条件. 【　】

【分析】 本题考查考生对数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的定义的理解.其定义是“对任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$，总存在正整数 N_1，当 $n > N_1$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$”.两种说法相比较，似乎定义中的条件更强些，即由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 必能推出“对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$”.但其逆也是正确的.因为对任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$，取 $\varepsilon = \min\left\{\dfrac{\varepsilon_1}{3}, \dfrac{1}{3}\right\}$，则对此 ε，存在 N，当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$，现取 $N_1 = N - 1$，于是有当 $n > N_1$ 时，$|x_n - a| \leqslant \dfrac{2}{3}\varepsilon_1 < \varepsilon_1$.所以以上两种说法是等价的，即选项(C) 是正确的.

本题考生得分率仅为 38%，不少人选了(B) 项和(A) 项，几乎没有人选(D) 项.

12.(03,$\frac{1}{2}$,4分) 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$，则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立. (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在. 【　】

【分析】 (A)，(B) 显然不对，因为由数列极限的不等式性质只能得出数列“当 n 充分大时”的情况，不可能得出“对任意 n 成立”的性质.

(C) 也明显不对，因为“无穷小 · 无穷大”是未定型，极限可能存在也可能不存在.

故应选(D).

【评注】 (D) 项成立也是明显的，因为极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不是未定式，结论是确定的：$\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n = \infty$.应当知道，当 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n = \infty$.

关于 ∞ 的确定型还有：$(\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty)$，$\infty \cdot \infty = \infty$，$\infty \pm (\text{有界}) = \infty$；但注意：$\infty \cdot (\text{有界})$ 不一定为 ∞.

综　述

题 8— 题 12 涉及函数与极限的几个基本性质：有界与无界，无穷小与无穷大，有极限与无极限(数列的收敛与发散)，以及它们之间的关系，例如，有极限 ⇒(局部) 有界，无穷大 ⇒ 无界，还有极限的不等式性质及极限的运算性质等.

三、简单的未定式极限

13.(91,2,3分) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$ ________.

【分析】 属$\dfrac{\infty}{\infty}$型.

$$原式=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{xe^{-\frac{1}{x}}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1.$$

应填：-1.

【评注】 注意：$e^x\to\begin{cases}+\infty, & 当\ x\to+\infty,\\ 0, & 当\ x\to-\infty,\end{cases}$ $e^{\frac{1}{x}}\to\begin{cases}+\infty, & 当\ x\to0^+,\\ 0, & 当\ x\to0^-,\end{cases}$ 而当 $x\to\infty$ 时，e^x 没有极限，也不是无穷大.

14.(92,$\frac{1}{2}$,3分) 当 $x\to1$ 时，函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限

(A) 等于2. (B) 等于0.

(C) 为 ∞. (D) 不存在但不为 ∞. 【 】

【分析】
$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=1\cdot0=0,$$
$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=\infty,$$
当 $x\to1$ 时函数没有极限，也不是 ∞. 故应选(D).

【评注】 对这一类题目，一般是考察函数的左、右极限. 因为左、右极限都存在且相等，是函数的极限存在的充要条件.

本题的函数由两个因式相乘而得，其中$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，故因式 $e^{\frac{1}{x-1}}$ 是关键部分. 所以解题中要善于抓住关键部分，才能提高效率.

15.(93,2,5分) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

【解】
$$原式=\lim_{x\to-\infty}\frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{100}{-\sqrt{1+100x^{-2}}-1}$$
$$=\frac{100}{-1-1}=-50.$$

16.(97,2,5分) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

【分析】 求无理式的极限一般需先进行有理化. 在计算过程中应注意 x 趋于负无穷. 为避免出错，可令 $t=-x$(见【解法二】).

【解法一】
$$原式=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x-2}{\sqrt{x^2+\sin x}(\sqrt{4x^2+x-1}-x-1)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{\sqrt{1 + \dfrac{\sin x}{x^2}}\left(\sqrt{4 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}} + 1 + \dfrac{1}{x}\right)} = 1.$$

【解法二】 令 $t = -x$,则

$$\text{原式} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\sqrt{4t^2 - t - 1} - t + 1}{\sqrt{t^2 - \sin t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\sqrt{4 - \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2}} - 1 + \dfrac{1}{t}}{\sqrt{1 - \dfrac{\sin t}{t^2}}} = 1.$$

17.(00,1,5分) 求 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【解】 由于式中有 $e^{\frac{1}{x}}$ 与 $|x|$,分别考虑左、右极限:

$$\lim_{x \to 0^+}\left(\frac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{4/x}} + \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{2e^{-4/x} + e^{-3/x}}{e^{-4/x} + e^{1}} + \frac{\sin x}{x}\right) = 0 + 1 = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^-}\left(\frac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{4/x}} - \frac{\sin x}{x}\right) = \frac{2 + 0}{1 + 0} - 1 = 1.$$

故原式 $= 1$.

【评注】 考生的典型错误是将 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \dfrac{\sin x}{|x|}\right)$ 分成两个极限 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}}$ 和 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$ 去讨论,而这两个极限都不存在,就答原题的极限不存在.今后,考生一旦遇到求带有绝对值函数的极限就应考虑左右极限.

18.(01,2,3分) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{\sqrt{3 - x} - \sqrt{1 + x}}{x^2 + x - 2} =$ ______.

【分析】
$$\text{原式} = \lim_{x \to 1}\frac{-2(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)(\sqrt{3 - x} + \sqrt{1 + x})}$$
$$= \lim_{x \to 1}\frac{-2}{(x + 2)(\sqrt{3 - x} + \sqrt{1 + x})}$$
$$= \frac{-2}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

应填:$-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

综　　述

1.求极限的问题,主要是求未定型的极限,而所有的未定型都可以化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.最简单的 $\dfrac{0}{0}$ 型与 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型是只要通过代数运算就可以约去分子、分母中的无穷小或无穷大,从而化为确定型的类型.

第一个常用的代数处理方法是:提出最大项.如题13:分子、分母都提出 $e^{1/x}$ 并约去它;如题16:$\sqrt{4x^2 + x - 1} = -x\sqrt{4 + x^{-1} - x^{-2}}$,$\sqrt{x^2 + \sin x} = -x\sqrt{1 + x^{-2}\sin x}$.

第二个常用的代数处理方法是：乘除共轭式．如题15：当 $x\to-\infty$ 时，$\sqrt{x^2+100}+x$ 是未定型，而 $\dfrac{(\sqrt{x^2+100}+x)\cdot(\sqrt{x^2+100}-x)}{\sqrt{x^2+100}-x}=\dfrac{100}{\sqrt{x^2+100}-x}\to 0$ 是确定型（$\sqrt{x^2+100}-x\to+\infty$ 是确定型）．

如题18：只知道当 $x\to 1$ 时，$\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}\to 0$；而对于 $\dfrac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}=\dfrac{-2(x-1)}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}$，不仅知道它 $\to 0$，而且知道它含有因子 $(x-1)$，从而可以约去无穷小因子 $(x-1)$ 而化为确定型了．

2．在某些情形需要通过分别求左、右极限而求得极限．如求分段函数在连接点处极限，又如函数中含有如 $e^{\frac{1}{x}}$，$\arctan\dfrac{1}{x}$ 的项当 $x\to 0^+$ 与 $x\to 0^-$ 时它们的左右极限不相等．试题17正是如此．它们的基本根据是：

$$\lim_{x\to a}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to a+0}f(x)\ \lim_{x\to a-0}f(x)=A.$$

四、1^∞ 型未定式

19．（89，2，4分） 求 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$．

【解】 属 1^∞ 型．

$$2\sin x+\cos x=1+(2\sin x+\cos x-1),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x-1}{x}\right)=2.$$

故原式 $=e^2$．

20．（90，1，3分） 设 a 是非零常数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$ ________．

【分析】 属 1^∞ 型．

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{a}{x})^x}{(1-\frac{a}{x})^x}=\frac{e^a}{e^{-a}}=e^{2a}.$$

故应填：e^{2a}．

21．（91，1，5分） 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\pi/x}$．

【解】 属 1^∞ 型．

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0^+}[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\pi/x}.$$

由于
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\pi}{x}(\cos\sqrt{x}-1)=\pi\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x}=-\frac{\pi}{2},$$

故原式 $=e^{-\pi/2}$．

22．（92，2，5分） 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$．

【解】 属 1^∞ 型．

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{3}{x}+1)^{\frac{x}{2}}}{(\frac{6}{x}+1)^{\frac{x}{2}}}(\frac{3+x}{6+x})^{-\frac{1}{2}}=\frac{e^{3/2}}{e^{6/2}}\cdot 1^{-\frac{1}{2}}=e^{-3/2}.$$

23.(93,1,5分) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^{x}$.

【解】 属 1^{∞} 型.

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left[1+(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)\right]^{x}.$$

而
$$\lim_{x\to\infty}x(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}+\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}\right)=2+0=2,$$

故原式 $=e^{2}$.

24.(95,1,3分) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ ________.

【分析】 属 1^{∞} 型. 由 $\lim\limits_{x\to 0}3x\cdot\frac{2}{\sin x}=6$,知原式 $=e^{6}$.

故应填:e^{6}.

25.(03,1,4分) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^{2})}}=$ ________.

【分析】 属 1^{∞} 型.

$$原式=\lim_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\ln(1+x^{2})}}.$$

由于
$$\lim_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\frac{1}{\ln(1+x^{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^{2}}{x^{2}}=-\frac{1}{2},$$

故原式 $=e^{-\frac{1}{2}}$. 应填:$e^{-\frac{1}{2}}$.

综 述

1. 幂指函数极限的一般处理方法是 $\lim u^{v}=\lim e^{v\ln u}=e^{\lim v\ln u}$.

2. 对于 1^{∞} 未定式,最简单的处理方法是利用极限:

$$\lim u^{v}=\lim[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^{\alpha v}=e^{\lim\alpha v},\ (\alpha=u-1)$$

就是说,对于 1^{∞} 未定式,求 $\lim u^{v}$ 归结为求 $\lim((u-1)v)$.