高等学校教材

綫性代数

上海交通大学数学教研室编

樂汝书校訂

高等教育出版社

高等学校教材

綫性代数

上海交通大学数学教研室編
欒汝书校訂

高等教育出版社

本书原系天津大学等27所高等工业学校編“高等数学”(无綫电等类型专业部分)一书的第一章(由上海交通大学数学教研室編),現由清华大学樂汝书同志审查和校訂,作了修改,并由高等工业学校高等数学課程教材編审委員会复审后,以小册子形式出版.本书介紹了行列式,矩陣及其特征方程的計算,綫性方程組和二次型等最基本的概念,写法上注意了从易懂的概念入手,可作为高等工业学校无綫电类型专业試用教科书,其他类似专业也可作参考.

本书原由人民教育出版社出版。現經上級决定,自1965年1月1日起,另行成立“高等教育出版社”;本书今后改用高等教育出版社名义继續印行。

綫 性 代 数

上海交通大学数学教研室編
樂 汝 书 校 訂

北京市书刊出版业營业許可証出字第119号
高等教育出版社出版(北京景山东街)
人 民 教 育 印 刷 厂 印 装
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号K13010·1160 开本850×1168 1/32 印张1 10/16
字数37,000 印数6,001—8,000 定价(5)¥0.19
1964年12月第1版 1965年6月北京第2次印刷

目　录

綫性代数

在这本书中，我們主要介紹綫性变換、矩陣及二次型的一些基本概念. 这些概念在实用上及理論上都有重要的价值，特别是矩陣理論在解綫性方程組时很有用处，这在很多实际問題中是常常要碰到的.

此外，在电路的网絡理論中，可直接利用矩陣計算网絡中的問題而不必建立綫性方程組，故在网絡問題中利用矩陣进行計算，較其他方法优越.

§1. 行列式的計算及其性质

在工程上有很多問題，常常归結到解一个綫性方程組的問題，本节先对含有三个三元綫性方程的方程組作一探討，由此引出三阶行列式，然后再把三阶行列式推广到高阶行列式.

I. 含三个三元綫性方程的方程組与三阶行列式 已知含有三个三元綫性方程的方程組

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1}$$

在此方程組中，先从第一、第二两方程消去 x_3，再从第一、第三两方程消去 x_3，最后从这新得到的两个方程消去 x_2，得到

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22}a_{33}&+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}\\ &-a_{12}a_{21}a_{33})x_1=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3\\ &-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}.\end{aligned} \tag{2}$$

我們把式 (2) 中 x_1 的系数 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$ $-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$ 記作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

并称之为三阶行列式，行列式中出現的各数 $a_{11}, a_{12}, \cdots$称为它的元素，(3)中的横排称为行列式的行，纵排称为行列式的列，我們用D表示行列式(3)，容易看出：(2)式中等式右端剛好是将D中的a_{11}, a_{21}, a_{31}(也就是x_1的系数)分别换成 b_1, b_2, b_3 的結果．因此(2)中等式右端是

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

这样(2)式就可以写为：

$$Dx_1=D_1. \tag{4}$$

同理可以得到：

$$Dx_2=D_2, \tag{5}$$

$$Dx_3=D_3, \tag{6}$$

这里D_2是D中的a_{12}, a_{22}, a_{32}分别换成 b_1, b_2, b_3 所得到的行列式；D_3 的意义类似．

若$D\neq 0$，則由(4)、(5)、(6)式得到

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{D_1}{D}, \\ x_2&=\frac{D_2}{D}, \\ x_3&=\frac{D_3}{D}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

将(7)代入方程組(1)就可以験证它是适合(1)的，所以(7)就是方

程組(1)的唯一解.

例 1. 解下列綫性方程組:

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+x_3=1,\\ x_1-5x_2+3x_3=2,\\ x_1-x_2+x_3=-1.\end{cases}$$

解 系数行列式:

$$D=\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-8\neq 0,$$

所以方程組有唯一解:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}}{-8}=-\frac{11}{8},$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}}{-8}=-\frac{9}{8},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}}{-8}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}.$$

从上例看出要解綫性方程組,只要算出行列式 D_1, D_2, D_3 和 D 就可以了. 为了便于計算行列式, 我們需研究三阶行列式的一些性质.

将行列式 D 的行列互换,而不改变各行和各列的順序,这样得到的行列式 D' 叫做 D 的轉置行列式. 例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的轉置行列式为

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式与它的轉置行列式相等.

性质 2 交換行列式的任意两行（两列），行列式仅改变正負号. 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

性质 3 将一个行列式的某一行(列)的所有元素乘以某一数 k，等于用 k 乘这个行列式. 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 4 如果某一行（列）的各元素是二項之和，那么可以把这行列式写成两个行列式之和. 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 5 将行列式的某一行(列)的元素乘以同一数后加到另一行(列) 的对应元素上去，行列式不变. 例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

若 a_{ij} 是三阶行列式 D 中第 i 行、第 j 列的元素，所謂 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 是指划去 a_{ij} 所在行和列的元素后，其余元素所构成的一个二阶行列式与 $(-1)^{i+j}$ 的乘积，例如：

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=-(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}).$$

性质 6 任一行（或列）中各元素与其代数余子式的乘积的和等于行列式的值；任一行（或列）的元素与另一行（或列）的对应元素的代数余子式的乘积的和等于 0. 例如

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=\begin{cases} 0 & i\neq j, \\ D & i=j. \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+a_{3i}A_{3j}=\begin{cases} 0 & i\neq j, \\ D & i=j. \end{cases}$$

以上性质讀者可以自己证明.

例 2. 利用上述性质計算下面行列式：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

解 将第一行加到第二行上去，然后再将第一行乘以 -2 加到第三行上去，由性质 5 知行列式不变，即：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -7 \end{vmatrix}.$$

再由性质 6：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -7 \end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}+0\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$+0\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}=27.$$

Ⅱ. 高阶行列式的定义及其計算 对于任意正整数 n, 我們来定义 n 阶行列式. 設有 n^2 个数排成 n 行 n 列(横的称行, 纵的称列)如下:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{matrix}$$

其中 a_{ij} 是第 i 行第 j 列的数. 今在每一行中选出一数, 并且要求这样选出的 n 个数都在不同的列上. 作这 n 个数的乘积, 然后按一定的規則乘以 $+1$ 或 -1, 将所有这样得到的乘积求代数和, 这个和数称为和按上述次序排成 n 行 n 列的这 n^2 个数相对应的 n 阶行列式, 并記为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

上面等式右端中所写出的一項 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 是选第 1 行第 i_1 列的数 a_{1i_1}, 第 2 行第 i_2 列的数 a_{2i_2}, $\cdots$, 第 n 行第 i_n 列的数 a_{ni_n} 所得到的乘积. 由于要求这 n 个数在每一列中也恰有一个, 这样 $i_1i_2\cdots i_n$ 就是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. 上面和式是对所有不同排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 求和的, 所以和式中共有 $n!$ 項.

現在来确定每一項前正負号的規則.

首先介紹排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数的意义. 在排列中一个数字 i 的左面比 i 大的数字的个数称为該数字 i 的逆序数. 排列中所有数字的逆序数的和称为該排列的逆序数. 例如当 $n=5$ 时, 排列 3 2 5 1 4 中 1 的逆序数为 3, 2 的逆序数为 1, 4 的逆序数为 1, 3 与 5 的逆序数都为 0; 因此排列 3 2 5 1 4 的逆序数为 $3+1+1=5$. 一

个排列的逆序数就是在排列中将数字 1, 2, …, n 分别向左調动以調到自然排列 $12\cdots n$ 所需要調动的总次数.

現在規定，在行列式定义中若項 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 的列的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为偶数，則規定在該項前的符号为正；若排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为奇数，則規定在該項前的符号为負.

讀者可以自己驗证，我們已学过的二阶及三阶行列式都符合上面的定义.

上一节关于三阶行列式的六个性質对于 n 阶行列式也是正确的. 在一般情况下，利用这些性質来計算 n 阶行列式，比直接用定义計算要簡便得多.

例 計算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解 把第三列加到第四列上去，然后把第三列的 -2 倍加到第一列上去，就得到

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+3}\times\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}=40.$$

关于解含有 n 个 n 元綫性方程的方程組

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

可以把三元方程組的情形推广而得到下面定理:

克萊姆規則 对于上述方程組,若系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

則方程組有唯一解,且 $x_j=\dfrac{D_j}{D}$ $(j=1, 2, \cdots, n)$,这里 D_j 是 D 中第 j 列换成方程組常数項 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所得到的行列式. (证略)

§2. 矩陣

I. 网絡問題 設有一网絡,已知其各支路的阻抗为(图 1):$Z_1=1, Z_2=9, Z_3=2, Z_4=9, Z_5=6$. 电源电势为 $E=100$. 需要求解迴路电流 I_1, I_2 和 I_3。

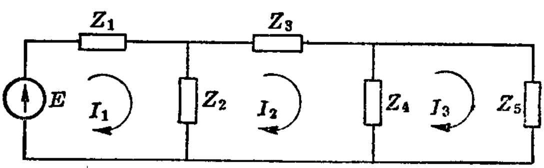

图 1

根据电工原理,可以得到三个迴路方程:

$$\begin{cases} I_1(Z_1+Z_2)-I_2Z_2=E, \\ -I_1Z_2+(Z_2+Z_3+Z_4)I_2-Z_4I_3=0, \\ -Z_4I_2+I_3(Z_5+Z_4)=0. \end{cases}$$

代入数字，上式可写成:

$$\begin{cases}10I_1-9I_2=100,\\ -9I_1+20I_2-9I_3=0,\\ -9I_2+15I_3=0.\end{cases}\tag{1}$$

此方程取决于其系数的排列，方程左端的系数及右端可排成下面二个表:

$$\begin{pmatrix}10 & -9 & 0\\ -9 & 20 & -9\\ 0 & -9 & 15\end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix}100\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

若系数改变，即表中的元素(数)改变，对应的方程就会不同，亦即具体的电路和参数都会不同．这两个表对应了一个代数方程，在数学上称这种具有一定排列的表为矩陣．用矩陣的理論就可以解决网絡及其他方面的問題．

从网絡問題及其他問題中，抽去电学或物理学的意义，即得矩陣的一般定义．

定义1 由$m\times n$个数按一定次序排成的含m行n列的表

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix}$$

叫做矩陣，其中a_{ij}叫做矩陣的元素．

当$m=n$时，矩陣A叫做n阶矩陣(或n阶方陣)．

当$n=1$时，矩陣A叫做列矩陣，或列向量，即

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}.$$

当 $m=1$ 时，矩陣 A 叫做行矩陣，或行向量，即

$$A=(a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}).$$

在电桥网絡中，我們常常見到下列矩陣:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

即 $a_{ij}(i\neq j)$都等于零，我們将这种矩陣叫做对角綫矩陣，当对角綫矩陣中 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1$ 时，則称为么陣，或单位矩陣，記作 E，即

$$E=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

将矩陣 A 的列换成行所得到的矩陣 A'，称为 A 的轉置矩陣，例如:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Ⅱ. 綫性变换与矩陣的运算 矩陣的运算是指二个矩陣的加、乘以及数与矩陣相乘等. 我們以乘法为例来說明矩陣运算的实际意义.

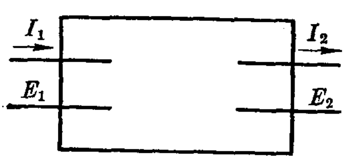

图 2

設有一个四端网絡(图 2)，其参数 A,B,C,D. 根据电工原理，两端的电流 I_1,I_2，电压 E_1,E_2 有下面关系式:

$$\begin{cases} E_1=AE_2+BI_2, \\ I_1=CE_2+DI_2. \end{cases} \tag{2}$$

关系式(2)在数学上就是說用 E_2,I_2 綫性地表示 E_1,I_1. 这就叫做綫性变换.

关系式(2)右端的系数可构成一个矩陣:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

称这矩陣为这网絡的阻抗矩陣.

若有二个四端网絡連接(图3), 由于这二个网絡的結构, 第一个网絡的輸出为第二个网絡的輸入, 我們可以得到下面关系式:

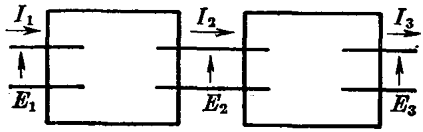

图 3

$$\begin{cases} E_1 = a_{11}E_2 + a_{12}I_2, \\ I_1 = a_{21}E_2 + a_{22}I_2. \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} E_2 = b_{11}E_3 + b_{12}I_3, \\ I_2 = b_{21}E_3 + b_{22}I_3. \end{cases} \tag{4}$$

这个网絡的阻抗矩陣分别为:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

如果我們要在輸出端有电流 I_3, 电压 E_3, 那么輸入端的电流、电压应为多少. 这問題反映在数学上就是要求出 E_1, I_1 用 E_3, I_3 来表示的关系式, 将(4)代入(3)得到:

$$E_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})E_3 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})I_3,$$

$$I_1 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})E_3 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})I_3,$$

即为所求的結果. 也就是說这二个网絡与具有阻抗矩陣 C 的网絡等效. 这里

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

把矩陣 C 叫做矩陣 A 乘以 B 的积.

由于网絡問題和其他問題的需要，在数学上就有下面一般定义.

定义 2 設变数 $y_1, \cdots, y_m$ 能用变数 $x_1, \cdots, x_n$ 綫性地表示，即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{cases} \tag{5}$$

则从变量 $x_1, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, \cdots, y_m$ 的变换叫做綫性变换.

綫性变换(5)的系数能唯一地确定矩陣 A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

反之，有了矩陣 A 也能唯一确定綫性变换 (5)，綫性变换与矩陣成了一一对应关系. 因此研究綫性变换的性质可以轉移到研究所对应的矩陣上去.

設有二个綫性变换:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2, \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2, \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2. \end{cases} \tag{7}$$

将(7)代入(6)中去，我們就得到用 z_1, z_2 綫性地表示 x_1, x_2 的关系式. 即二个綫性变换的結果为:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2, \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2. \end{cases}$$

这里

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31},$$
$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32},$$
$$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31},$$
$$c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}.$$

簡写为: $c_{ij}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}$. $(i=1,2;\ j=1,2)$

与此对应,我們有下列矩陣乘法的定义。

設矩陣A的列数等于矩陣B的行数

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\cdots b_{1s}\\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2s}\\ \cdots & \cdots\cdots\\ b_{n1} & b_{n2}\cdots b_{ns}\end{pmatrix}.$$

定义 3 設有矩陣

$$C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\cdots c_{1s}\\ c_{21} & c_{22}\cdots c_{2s}\\ \cdots & \cdots\cdots\\ c_{m1} & c_{m2}\cdots c_{ms}\end{pmatrix},$$

这里 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$, 則$C$称为$A$乘$B$之积,記作$AB$.

若E为m阶单位矩陣, 則$EA=A$; 若E为n阶单位矩陣, 則$AE=A$.

例 設

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

求 AB 和 BA.