天津师范学院

科研论文选编

1976—1980

（一）

KE YAN LUN WEN XUAN BIAN

一九八〇

目　录

数　学　系

物　理　系

化　学　系

地　理　系

生　物　系

两 相 微 积 分 学

黄 乘 规

§1. 引 言

本文在Robino的非标准分析〔2〕第二章的逻辑基础上构成了两相微积分学。在两相微积分的理论中，可以十分简单地给出Dirac函数的定义。有关Diac函数的乘积等问题，也自然得到解决。再者，在两相微积分的理论中，可以给出求解奇异积分的一般原则和方向，即扩张求解的方法。这种方法将为统一奇异积分的理论与解决量子力学中与奇异积分有关的发散困难提供一个新的出发点。

本文中常用的一些数学运算符号，按其结合能力，由弱到强，分为以下九个等级：1 $\dashv\vdash$,$\vdash$； 2.$\models$； 3.$\rightarrow$，$\longleftrightarrow$； 4.$\wedge$，$\vee$； 5.$\neg$；； 6.$\in$,$\subset$,$<$，$=$，$=(\tau,\tau)$，$\bullet=(\tau,\tau)$，$=②(\tau,\tau)\equiv$； 7.$\cap$，$\cup$,$\setminus$； 8 $+$，$-$； 9.$\cdot$，$\div(/)$。其中“$\dashv\vdash$”，“$\vdash$”和“$\models$”是元数学符号。“$\equiv$”是不区分类型的等词。当然，在形式语句中还用到量词（$\exists$），（$\forall$）和方括号〔,〕。此外,空集合符号为ϕ，单元素x的集合以$\{x\}$记之。我们以N（首元素取为1）代表标准的自然数集，或称为第①相的自然数集；以Q代表标准的有理数集，或称为第①相的有理数集；以R代表标准实数集，或称为第①相的实数集；以M代表标准的分析模型，或称为第①相的分析模型。

关于非标准的分析模型，我们以下说明。我们将M扩大为某个非标准的分析模型，扩大后的内的和外的理论 综 合 在 一起所组成的模型以M②记之，称为第②相的分析模型。将M的句子或公式形式化后翻译到M②中所得的M②的子模型以$\bullet M$（或M②i）记之,称为第②相的内的分析模型。$\bullet M$是M的形式语句的另一解释。将$\bullet M$中的O型个体所组成的集合记为$\bullet$R（或R②），称为第②相的实数集。又以$\bullet N$（或N②记第②相的自然集，以$\bullet Q$（或Q②）记第②相的有理数集。

“$=(\tau,\tau)$”表示M中τ型个体间的等词 。$\bullet=(\tau,\tau)$表示$\bullet M$中τ型个体间的等词。“$=②(\tau,\tau)$”表示M②中τ型个体间的等词。如果局限在$\bullet M$上，“$=②(\tau,\tau)$”与“$\bullet=(\tau,\tau)$”的含义相同。附在O型个体间的等词“$=(o,o)$”后面的型符可以省去，写成“$=$”。

如无特别申明，我们以$l,m,n,\cdots,x,y,z,\varepsilon,\delta,\varphi,\cdots$表示变量，必要时可带下标。对$\bullet M$中只取标准值的变量则以$\bullet x$，$\bullet y$，$\bullet z$，…等表示。有时需指明变量$x$是$\tau_1$型的，变量$y$是$\tau_2$型的，…，可以记为$\widetilde{xT}\tau_1$，$\widetilde{yT}\tau_2$，…。$M$中的常量符号为$a$，b， c, …, i,j,k, 0, 1, 2,…,必要时可带下标。$*M$中的常量符号为$*a$, $*b$, $*c$,…, $*k$, $*0$, $*1$, $*2$, …, $a②i$, $b②i$, …, $k②i$, …。M②中的常量符号为a②,b②, c②, …, k②, 0②, 1②, 2②, …, 必要时可带下标。这里$*0$, $*1$, $*2$分别与0②, 1②, 2②相同。M中的常量a所对应在$*M$中的解释自然记为$*a$。"小于", "加", "减", "乘"和"除"的符号分别为"<", "+", "-", "·"和"÷(/)"。在特别需要区别时,可将M, $*M$和M②中的"小于"分别记为"<", "$*$<"和"<②", 等等。

本文的基本论述方法是把M中的公式形式化,转移到$*M$中去,做为M②的内公式,并解毯清楚这种内公式的含义。然后在M②中考文相应的外公式是否成立,与其相应的内公式的关系如何,等等。

我们的公式有的是$*M$中的,有的是M②中的。但$*$M是M②的子理论。如何将$*$M中的公式表成M②的公式,我们提出以下三原则:

(1,1)② 1. 若$A(a_1, \cdots, a_j)$是M②的分层公式,$j\in N$,则

$$*M\models A(a_1, \cdots, a_j) \dashv\vdash M② \models A\in *M\wedge a_1\in *M\wedge\cdots\wedge \wedge a_j\in *M\wedge A(a_1, \cdots a_j);$$

2. 若$A(x)$是M②的分层公式,则

$$*M\models(\forall x)A(x)\dashv\vdash M②\models A\in *M\wedge(\forall x))[x\in *M\rightarrow A(x)];$$

3. 若$A(x)$是M②的分层公式,则

$$*M\models(\exists x)A(x)\dashv\vdash M②\models A\in *M\wedge(\exists x)[x\in *M\wedge A(x)]。$$

此外对于M的公式的标号不附以其它标志;对$*M$的公式在标号前附以"$*$"号(或在其后附以"②i"号;对M②的公式,在其标号后附以"②"。

按Robinson的约定,我们的公式是分层的。设(τ_1, τ_2)型变量t是M中由t_1型变量到τ_2型变量的函数,记做$t\in fct(\tau_1\tau_2)$与Roinson一致,它的含义是

(1, 2) $$t\in fct(\tau_1, \tau_2)\longleftrightarrow(\forall x\tilde{T}\tau_1)(\forall y)(\forall z)[t(x, y)\wedge \wedge t(x, z)\rightarrow y=(\tau_2, \tau_2)z]。$$

按习惯,我们约定

(1, 3) $$t\in fct(\tau_1, \tau_2)\rightarrow[t(x, y)\longleftrightarrow y=(\tau_2, \tau_2)t(x)]。$$

将以上两式转到$*M$,我们有

$*$(1, 4) $$t\in *fct(\tau_1, \tau_2)\longleftrightarrow(\forall x\tilde{T}\tau_1)(\forall y)(\forall z)[t(x, y)\wedge \wedge t(x, z)\rightarrow y *=(\tau_2, \tau_2)z],$$

$*$(1, 5) $$t\in *fct(\tau_1, \tau_2)\rightarrow[t(x,y)\longleftrightarrow y *=(\tau_2, \tau_2)t(x)]。$$

如果(τ_1, τ_3)型变量t是M②中由τ_1型变量到τ_2型变量的函数,记做$t\in fct②(t_1, {}_2)$,其含义是

(1, 6)② $$t\in fct②(\tau_1, \tau_2)\longleftrightarrow(\forall x\tilde{T}\tau_1)(\forall y)(\forall z)[t(x,y)\wedge$$

$\wedge t(x,z)\to y=\text{②}(\tau_2,\tau_2)z]$。

进一步约定

(1，7)② $\qquad t\in fct\text{②}(\tau_1,\tau_2)\to[t(x,y)\longleftrightarrow y=\text{②}(\tau_2,\tau_2)t(x)]$。

这样，我们可以证明（详见〔17〕）

(1,8)② $\qquad t\in {}^*fct(\tau_1,\tau_2)\longleftrightarrow t\in {}^*M\wedge t\in fct\text{②}(\tau_1,\tau_2)$。

为了方便，我们记

(1，9)②
$$R(\text{②},\text{①})=\text{②}((o),(o))\{x\mid x={}^*t\wedge t\in \mathbf{R}\}$$
$$Q(\text{②},\text{①})=\text{②}((o),(o))\{x\mid x={}^*t\wedge t\in Q\}$$
$$N(\text{②},\text{①})=\text{②}((o),(o))\{x\mid x={}^*t\wedge t\in N\}。$$

那么N(②，①)是N②的真子集且与N同构，Q(②,①)是Q②的真子集且与Q同构，R(②，①)是R②的真子集且与R同构。

对于每个$g\in\mathbf{R}$，转到*M是${}^*g\in{}^*\mathbf{R}$。以$mon({}^*g)$记${}^*g$所在的单子，那么${}^*g\in mon({}^*g)$。不难看出，$mon({}^*o)\equiv\bigcap\limits_{n\in N(\text{②},\text{①})}\left(-\frac{{}^*1}{n},\frac{{}^*1}{n}\right)$。我们还规定

(1,10)②
$$x\in infs\,imR\text{②}\longleftrightarrow x\in R\text{②}\wedge x\in mon({}^*o),$$
$$x\in +infsim\mathbf{R}\text{②}\longleftrightarrow x\in infs\,im\mathbf{R}\text{②}\wedge x>{}^*o,$$
$$x\in -infs\,im\mathbf{R}\text{②}\longleftrightarrow x\in infs\,im\mathbf{R}\text{②}\wedge x<{}^*o,$$
$$x\in finit\mathbf{R}\text{②}\longleftrightarrow x\in\mathbf{R}\text{②}\wedge(\exists y)[y\in\mathbf{R}(\text{②},\text{①})\wedge|x|<|y|],$$
$$x\in +finit\mathbf{R}\text{②}\longleftrightarrow x\in finit\mathbf{R}\text{②}\wedge x>{}^*o,$$
$$x\in -finit\mathbf{B}\text{②}\longleftrightarrow x\in finit\mathbf{R}\text{②}\wedge x<{}^*o,$$
$$x\in infinit\mathbf{R}\text{②}\longleftrightarrow x\in\mathbf{R}\text{②}\wedge(\forall y)[y\in R(\text{②},\text{①})\to|y|<|x|],$$
$$x\in +infinit\mathbf{R}\text{②}\longleftrightarrow x\in infinit\mathbf{R}\text{②}\wedge x>{}^*o,$$
$$x\in -infinit\mathbf{R}\text{②}\longleftrightarrow x\in infinit\mathbf{R}\text{②}\wedge x<{}^*o。$$

由此可见，无限大和无限小的概念是相对的，是R②的数与R(②，①)和$mon({}^*o)$的数相比较而产生的。

设$P_1\ \widetilde{T}(\tau_1)$，$P_2\widetilde{T}(\tau_2)$和$P\widetilde{T}(\tau_1,\tau_2)$，关于有定义域的函数，在M有定义

(1,11) $\qquad P\in fctd(P_1,P_2)\longleftrightarrow P\in fct(t_1,\tau_2)\wedge$
$\qquad\wedge(\forall x)[x\in P_1\to(\exists y)[y\in P_2\wedge y=(\tau_2,\tau_2)P(x)]]$，

*(1,12) $\qquad P\in{}^*fctd(P_1,P_2)\longleftrightarrow P\in{}^*fct(\tau_1,\tau_2)\wedge$
$\qquad\wedge(\forall x)[x\in P_1\to(\exists y)[y\in P_2\wedge x^*=(\tau_2,\tau_2)P(x)。]]$

在M②可直接定义

(1,13)② $\qquad P\in fct\text{②}d(P_1,P_2)\longleftrightarrow P\in fct\text{②}(\tau_1,\tau_2)\wedge$
$\qquad\wedge(\forall x)[x\in P_1\to(\exists y)[y\in P_2\wedge y=\text{②}(\tau_2,\tau_2)P(x)]]$。

並且可以证明

(1,14)② $\qquad P\in{}^*fctd(P_1,P_2)\longleftrightarrow P\in{}^*\mathrm{M}\wedge P_1\in{}^*\mathrm{M}\wedge P_2\in{}^*\mathrm{M}\wedge P\in fet\text{②}d(P_1,P_2)$，

§ 2. 两相的极限和连續概念

在M中极限的定义如下

(2, 1) $y\in cds(q)\wedge P\in fctd(q,\mathrm{R}\wedge x\in R\rightarrow[\lim\limits_{x\to y}P(x)=s\leftarrow\rightarrow$

$\leftarrow\rightarrow(\forall\varepsilon)[\varepsilon>o\rightarrow(\exists\delta)[\delta>o\wedge(\forall x)[x\in q\wedge|x-y|<\delta\rightarrow|P(x)-s|<\varepsilon]]]]$,

其中$y\in edx(q)$的含义是y是标准实数集q的凝聚点。转到$*$M得极限的定义为

$*$(2, 2) $y\in *cds(q)\wedge p\in *fctd(q,*\mathrm{R})\wedge s*\mathrm{R}\rightarrow[*\lim\limits_{x\to y}p(x)=s\leftarrow\rightarrow$

$\leftarrow\rightarrow(\forall\varepsilon)[\varepsilon>*o\rightarrow(\exists\delta)[\delta>*o\wedge(\forall x)[x\in q\wedge|x-y|<\delta\rightarrow|p(x)-s|<\varepsilon]]]]$。

在M②可直接定义

(2, 3)② $y\in cds②(p)\wedge p\in fct②d(q,*\mathrm{R})\wedge s\in *\mathrm{R}\rightarrow[\lim\limits_{x\to y}②p(x)=s\leftarrow\rightarrow$

$\leftarrow\rightarrow(\forall\varepsilon)[\varepsilon>*o\rightarrow(\exists\delta)[\delta>*o\wedge(\forall x)[x\in q>|x-y|<\delta\rightarrow|p(x)-s|<\varepsilon]]]]$。

至于$y\in *cds(q)$和$y\in cds②(q)$的详细解释清参阅〔17〕§ 7。我们可证明以下公式

(2, 4)② $y\in *cds(q)\wedge p\in *fctd(q,*\mathrm{R})\wedge s\in *\mathrm{R}\wedge *\lim\limits_{x\to y}p(x)=s\leftarrow\rightarrow p\in *\mathrm{M}\wedge$

$\wedge q\in *\mathrm{M}\wedge y\in cds②(q)\wedge p\in fct②d(q*\mathrm{R})\wedge s\in *\mathrm{R}\wedge\lim\limits_{x\to y}②p(x)=s$。

进一步，我们可以证明以下定理

(2, 5)② $a\in fctd(b,\mathrm{R}),\sigma\in cds(b)\vdash\lim\limits_{x\to\sigma}a(x)=g\leftarrow\rightarrow(\forall y)[y\in *b\wedge$

$\wedge y\neq *\sigma\wedge|y-*\sigma|\in infsim\mathrm{R}②\rightarrow|*a(y)-*g|\in infsim\mathrm{R}②]$。

证明从略，可参阅〔17〕的§ 9。

我们可以定义一些常见的函数类。如增函数类可以如下定义

(2, 6) $p\in Incfctd(p_1\widetilde{\mathrm{T}}(o),\mathrm{R})\leftarrow\rightarrow p\in fctd(p_1\widetilde{\mathrm{T}}(o),\mathrm{R})\wedge$

$\wedge(\forall s)(\forall t)[s\in p_1\wedge t\in p_1\wedge s<t\rightarrow p(s)<p(t)]$。

转到$*$M有定义

$*$(2, 7) $p\in *Incfctd(p_1\widetilde{\mathrm{T}}(o),*\mathrm{R})\leftarrow\rightarrow p\in *fctd(p_1\widetilde{\mathrm{T}}(o),*\mathrm{R})\wedge$

$\wedge(\mathrm{A}s)(\forall t)[s\in p_1\wedge t\in p_1\wedge s<t\rightarrow p(s)<p(t)]$。

在M②可直接定义

(2, 8)② $p\in Incfct②d(p_1\widetilde{\mathrm{T}}(o),*\mathrm{R})\leftarrow\rightarrow p\in fct②d(p_1\widetilde{\mathrm{T}}(o),*\mathrm{R})\wedge$

$\wedge(\forall s)(\forall t)[s\in p_1\wedge t\in p_1\wedge s<t\to p(s)<p(t)]$。

并且可以证明

(2, 9)② $$P\in *Incfctd(p_1, *R)\longleftrightarrow p\in *M\wedge p_1\in *M\wedge p\in Incfct②d(p_1, *R)。$$

关于函数在某实数集合q的点y的连续性，在M可如下定义

(2,10) $$y\in cds(q)\wedge y\in q\to[p\in Cp(y,q)\longleftrightarrow p\in fctd(q,R)\wedge \lim_{x\to y} p(x)=p(y)]。$$

若以$q\in Itvl$表示q是区间，以$t\in In(q)$表示t是q的内点，那么函数在区间的连续性可表为

(2,11) $$q\in Itvl\wedge(\exists t)[t\in In(q)]\to[p\in C(q)\longleftrightarrow(\forall y)[y\in q\to p\in Cp(y,q)]]$$

将以上两式转到$*$M有

$*$(2,12) $$y\in *cds(q)\wedge y\in q\to[p\in *Cp(y,q)\longleftrightarrow p\in *fctd(q,*R)\wedge *\lim_{x\to y} p(x)=p(y)],$$

$*$(2,13) $$q\in *Itvl\wedge(\exists t)[t\in *In(q)\to[p\in *C(q)\longleftrightarrow(\forall y)[y\in q\to p\in *Cp(y,q)]]。$$

在M②可直接定义

(2,14)② $$y\in cds②(q)\wedge y\in q\to[p\in Cp②(y,q\longleftrightarrow p\in fct②d(q,*R)\wedge \lim_{x\to y}②p(x)=p(y)],$$

(2,15)② $$q\in Itvl②\wedge(\exists t)[t\in In②(q)]\to[p\in C②(q)\longleftrightarrow(\forall y)[y\in q\to p\in Cp②(y,q)]]。$$

所以当$y\in *cds(q)$和$y\in q$成立时有

(2,16)② $$p\in *Cp(y,q)\longleftrightarrow p\in *M\wedge p\in Cp②(y,q)。$$

当$q\in *Itvl$和$(\exists t)[t\in *In(q)]$成立时有

(2,17)② $$p\in *C(q)\longleftrightarrow p\in *M\wedge p\in C②(q)。$$

在M有以下定理（Cauchy）

(2,18) $$q_1<q_2\wedge p\in C([q_1,q_2])\wedge p(q_1)<r<p(q_2)\to(\exists x)[x\in(q_1,q_2)\wedge p(x)=r]。$$

转到$*M$有

$*$(2,19) $$q_1<q_2\wedge p\in *C([q_1,q_2])\wedge p(q_1)<r<p(q_2)\to(\exists x)[x\in(q_1,q_2)\wedge p(x)=r]。$$

在M②却成立

(2,20)② $$(\exists p)(\exists q_1)(\exists q_2)(\exists r)[p\in C②([q_1,q_2])\wedge q_1<q_2\wedge p(q_1)<r<p(q_2)\wedge(\forall x)[x\in(q_1,q_2)\to p(x)\neq r]]。$$

反例见[18]§10。

如果以$p\in fuB([q_1,q_2])$表示函数p在闭区间$[q_1,q_2]$有上界，以$p\in flB([q_1,q_2])$

表示p在〔q_1,q_2〕有下界，那么在M有定理(Weierstrass).

(2,21) $$q_1<q_2\wedge p\in C([q_1,q_2])\to p\in fuB([q_1,q_2])\wedge p\in flB([q_1,q_2])。$$

转到$*M$有

$*$(2,22) $$q_1<q_2\wedge p\in *C([q_1,q_2])\to p\in *fuB([q_1,q_2])\wedge p\in *flB([q_1,q_2])。$$

在M②未作讨论。

如果以$m=fmin(p,[q_1,q_2])$表示m是函数p在$[q_1,q_2]$的最小值，以$m=fmax(p,[q_1,q_2])$表示m是函数p在$[q_1,q_2]$的最大值，在M有定理(Weierstrass)

(2,23) $$q_1<q_2\wedge p\in C([q_1,q_2])\to(\exists m)[m=fmin(p,[q_1,q_2])]\wedge \wedge(\exists m)[m=fmax(p,[q_1,q_2])]。$$

转到$*M$有

$*$(2,24) $$q_1<q_2\wedge p\in *C([q_1,q_2])\to(\exists m)[m=*fmin(p,[q_1,q_2])]\wedge \wedge(\exists m)[m=*fmax(p,[q_1q_2])]。$$

在M②则成立

(2,25)② $$(\exists p)(\exists q_1)(\exists q_2)[q_1<q_2\wedge p\in C②([q_1,q_2])\wedge \wedge(\forall m)[m\doteqdot fmax②(p,[q_1,q_2])]]。$$

如果以$p\in unifC([q_1,q_2])$表示p在〔q_1,q_2〕一致连续，在M有定 理（Cantor）

(2,26) $$q_1<q_2\wedge p\in C([q_1q_2])\to p\in unifC([q_1,q_2])。$$

转到$*M$有

$*$(2,27) $$q_1<q_2\wedge p\in *C([q_1,q_2])\to p\in *unifC([q_1,q_2])。$$

在M②未做出相应的讨论。

§3.两相的导数概念

在M导数的定义为

(3,1) $$q\in Itvl\wedge(\exists t)[t\in In(q)]\wedge p\in fctd(q,R)\wedge x\in q\to \to\left[p^{*\prime}(x)=r\longleftrightarrow\frac{dp(x)}{dx}=r\longleftrightarrow\lim_{\triangle x\to 0}\frac{p(x+\triangle x)-p(x)}{\triangle x}=r\right]。$$

转到$*M$有定义

$*$(3,2) $$q\in *Itvl\wedge(\exists t)[t\in *In(q)]\wedge p\in *fctd(q,*R)\wedge x\in q\to \to\left[p^{*\prime}(x)=r\longleftrightarrow\frac{*dp(x)}{dx}=r\longleftrightarrow *\lim_{\triangle x\to *0}\frac{p(x+\triangle x)-p(x)}{\triangle x}=r\right]。$$

在M②可直接定义

(3,3)② $$q\in Itvl②\wedge(\exists t)[t\in In②(q)]\wedge p\in fct②d(q,*R)\wedge x\in q\to \to\left[p^{\prime②}(x)=r\longleftrightarrow\frac{d②p(x)}{dx}=r\longleftrightarrow \lim②_{\triangle x\to 0}\frac{p(x+\triangle x)-p(x)}{\triangle x}=r\right]。$$

因此有

(3,4)② $q \in {}^{\bullet}Itvl \wedge (\exists t)[t \in {}^{\bullet}In(q)] \wedge p \in {}^{\bullet}fctd(q, {}^{\bullet}\mathrm{R}) \wedge x \in q \wedge$
$\wedge p^{\bullet\prime}(x) = r \longleftrightarrow p \in {}^{\bullet}M \wedge q \in Itvl\textcircled{2} \wedge (\exists t)[t \in In\textcircled{2}(q)] \wedge$
$\wedge p \in fct\textcircled{2}d(q, {}^{\bullet}\mathrm{R}) \wedge x \in q \wedge p'^{\textcircled{2}}(x) = r$.

关于函数在点和区间的可导性，在M有定义

(3,5) $q \in Itvl \wedge (\exists t)[t \in In(q)] \wedge x \in q \rightarrow [p \in deriv(x,q) \longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow p \in fctd(q, R) \wedge (\exists r)[p'(x) = r]]$,

(3,6) $q \in Itvl \wedge (\exists t)[t \in In(q)] \rightarrow$
$\rightarrow [p \in derivI(q) \longleftrightarrow (\forall x)[x \in q \rightarrow p \in deriv(x,q)]]$。

转到•M有定义

•(3,7) $q \in {}^{\bullet}Itvl \wedge (\exists t)[t \in {}^{\bullet}In(q)] \wedge x \in q \rightarrow [p \in {}^{\bullet}deriv(x,q) \longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow p \in {}^{\bullet}fctd(q, {}^{\bullet}\mathrm{R}) \wedge (\exists r)[p^{\bullet\prime}(x) = r]]$,

•(3,8) $q \in {}^{\bullet}Itvl \wedge (\exists t)[t \in {}^{\bullet}In(q)] \rightarrow$
$\rightarrow [p \in {}^{\bullet}derivI(q) \longleftrightarrow (\forall x)[x \in q \rightarrow p \in {}^{\bullet}deriv(x,q)]]$。

在M②可直接定义

(3,9)② $q \in Itvl\textcircled{2} \wedge (\exists t)[t \in In\textcircled{2}(q)] \wedge x \in q \rightarrow [p \in deriv\textcircled{2}(x,q) \longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow p \in fct\textcircled{2}d(q, {}^{\bullet}\mathrm{R}) \wedge (\exists r)[p'^{\textcircled{2}}(x) = r]]$,

(3,10)② $q \in Itvl\textcircled{2} \wedge (\exists t)[t \in In\textcircled{2}(q)] \rightarrow$
$\rightarrow [p \in derivI\textcircled{2}(q) \longleftrightarrow (\forall x)[x \in q \rightarrow p \in deriv\textcircled{2}(x,q)]]$.

因此有

(3,11)② $q \in Itvl\textcircled{2} \wedge (\exists t)[t \in In\textcircled{2}(q)] \wedge x \in q \rightarrow$
$\rightarrow [p \in {}^{\bullet}deriv(x,q) \longleftrightarrow p \in {}^{\bullet}\mathrm{M} \wedge p \in deriv\textcircled{2}(x,q)]$

(3,12)② $q \in Itvl\textcircled{2} \wedge (\exists t)[t \in In\textcircled{2}(p)] \rightarrow$
$\rightarrow [p \in {}^{\bullet}derivI(q) \longleftrightarrow p \in {}^{\bullet}\mathrm{M} \wedge p \in derivI\textcircled{2}(q)]$。

微分中值公式（*Lagrange*），它在M的表述为

(3,13) $q_1 < q_2 \wedge p \in C([q_1, q_2]) \wedge p \in derivI((q_1, q_2)) \rightarrow$
$$\rightarrow (\exists x)\left[q_1 < x < q_2 \wedge p'(x) = \frac{p(q_2) - p(q_1)}{q_2 - q_1}\right],$$

转到•M则是

•(3,14) $q_1 < q_2 \wedge p \in {}^{\bullet}C([q_1, q_2]) \wedge p \in {}^{\bullet}derivI((q_1, q_2)) \rightarrow$
$$\rightarrow (\exists x)\left[q_1 < x < q_2 \wedge p^{\bullet\prime}(x) = \frac{p(q_2) - p(q_1)}{q_2 - q_1}\right]。$$

在M②则成立

(3,15)② $(\exists q_1)(\exists q_2)(\exists p)[q_1 < q_2 \wedge p \in C\textcircled{2}([q_1, q_2]) \wedge$
$\wedge p \in derivI\textcircled{2}((q_1, q_2)) \wedge (\forall x)[q_1 < x < q_2 \rightarrow$
$$\rightarrow p'^{\textcircled{2}}(x) \neq \frac{p(q_2) - p(q_1)}{q_2 - q_1}]]。$$

为了方便，在M定义

(3,16) $q\in InI \longleftrightarrow q\in Itvl \wedge (\exists t)[t\in In(q)]$。

类似地在$\bullet$M和M②可定义$q\in \bullet InI$和$q\in InI②$。

对标准函数在标准点上的导数，由(2,5)可得定理

(3,17)② $b\in InI, c\in b, a\in deriv(c,b) \vdash a'(c)=f \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow (\forall t)[\bullet c+t\in \bullet b \wedge t\neq \bullet 0 \wedge t\in infsim R② \rightarrow$

$\rightarrow \left|\dfrac{\bullet a(\bullet c+t)-\bullet a(\bullet c)}{t} - \bullet f\right| \in infsim R②]$。

关于反导数的概念，在M有定义

(3,18) $q\in InI \wedge p\in derivI(q) \wedge s\in fctd(q,R) \rightarrow$

$\rightarrow [p\in antideriv(s,q) \longleftrightarrow (\forall x)[x\in q\rightarrow p'(x)=s(x)]]$。

转到$\bullet$M有定义

$\bullet$(3,19) $q\in \bullet InI \wedge p\in \bullet derivI(q) \wedge s\in \bullet fctd(q,\bullet R) \rightarrow$

$\rightarrow [p\in \bullet antideriv(s,q) \longleftrightarrow (\forall x)[x\in q\rightarrow p^{\bullet\prime}(x)=s(x)]]$。

在M②可直接定义

(3,20)② $q\in InI② \wedge p\in derivI②(q) \wedge s\in fct②d(q,\bullet R) \rightarrow$

$\rightarrow [p\in antideriv②(s,q) \longleftrightarrow (\forall x)[x\in q\rightarrow p'^{②}(x)=s(x)]]$。

并且成立以下公式

(3,21)② $q\in \bullet InI \wedge p\in \bullet derivI(q) \wedge s\in \bullet fctd(q,\bullet R) \wedge$

$\wedge p\in \bullet antideriv(s,q) \longleftrightarrow p\in \bullet M \wedge s\in \bullet M \wedge q\in InI② \wedge$

$\wedge p\in derivI②(q) \wedge s\in fct②d(q,\bullet R) \wedge p\in antideriv②(s,q)$

§4. 两相的定积分概念

关于分割，求和，取极限的Biemann积分的定义，在M是如下进行的

(4,1) $q_1<q_2 \vdash p\in cut([q_1,q_2],n_2) \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow p\in lncfctd(N,R) \wedge n_2\in N \wedge p(1)=q_1 \wedge p(n_2+1)=q_2$。

(4,2) $q_1<q_2 \wedge p\in cut([q_1,q_2],n_2) \vdash step(p)\in fctd(N,R) \wedge$

$\wedge (\forall n)[n\in N\rightarrow step(p)(n)=p(n+1)-p(n)]$。

(4,3) $q_1<q_2 \wedge p\in cut([q_1,q_2],n_2) \vdash$

$maxstep(p,n_2)=fmax(step(p),|1,n_2|)$。

(这里$n\in|1,n_2| \longleftrightarrow n\in N \wedge n_2\in N \wedge 1\leqslant n\leqslant n_2$。)

(4,4) $q_1<q_2 \wedge x\in cut([q_1,q_2],n_2) \vdash \xi\in chos(x) \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow \xi\in fctd(N,R) \wedge (\forall n)[n\in N\rightarrow x(n)\leqslant \xi(n)\leqslant x(n+1)]$。

(4,5) $q_1<q_2 \wedge x\in cut([q_1,q_2],n_2) \wedge \xi\in chos(x) \wedge$

$\wedge \varphi\in fctd([q_1,q_2],R) \vdash \psi\equiv ccs(\varphi,x,\xi,[q_1,q_2],n_2) \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow \psi\in fctd(N,R) \wedge (\forall n)[n\in|1,n_2|\rightarrow \psi(n)$

$= \varphi(\xi(n)) \cdot step(x)(n)] \wedge (\forall n)[n \in N \wedge n_2 < n \rightarrow \psi(n) = 0]$。

(4,6) $q_1 < q_2 \wedge \varphi \in fctd([q_1, q_2], R) \vdash s = \int_{q_1}^{q_2} \varphi(t)\, dt \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow (\forall \varepsilon)[\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists \delta)[\delta > 0 \wedge (\forall n_2)(\forall x)(\forall \xi)[x \in cut([q_1, q_2], n_2) \wedge \xi \in chos(x) \wedge \psi \equiv ccs(\varphi, x, \xi, [q_1, q_2], n_2) \wedge$

$\wedge maxstep(x, n_2) < \delta \rightarrow \left|\sum_{n=1}^{n_2} \psi(n) - s\right| < \varepsilon]]]$。

(4,7) $q_1 < q_2 \wedge \varphi \in fctd([q_1, q_2], R) \vdash$

$\varphi \in Riemannint([q_1, q_2]) \longleftrightarrow (\exists s)[s = \int_{q_1}^{q_2} \varphi(t)\, dt]$。

将以上七式转到 $*M$ 得其Riemann积分的定义为

$*$(4,8) $q_1 < q_2 \vdash p \in *cut([q_1, q_2], n_2) \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow p \in *Incfctd(*N, *R) \wedge n_2 \in N \wedge p(1) = q_1 \wedge p(n_2 + 1) = q_2$。

$*$(4,9) $q_1 < q_2 \wedge p \in *cut([q_1, q_2], n_2) \vdash *step(p) \in *fctd(*N, *R) \wedge$

$\wedge (\forall n)[n \in *N \rightarrow *step(p)(n) = p(n+1) - p(n)]$。

$*$(4,10) $q_1 < q_2 \wedge p \in *cut([q_1, q_2], n_2) \vdash$

$*maxstep(p, n_2) = *fmax(*step(p), *|1, n_2|)$。

$*$(4,11) $q_1 < q_2 \wedge x \in *cut([q_1, q_2], n_2) \vdash \xi \in *chos(x) \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow \xi \in *fctd(*N, *R) \wedge (\forall n)[n \in *N \rightarrow x(n) \leqslant \xi(n) \leqslant x(n+1)]$。

$*$(4,12) $q_1 < q_2 \wedge x \in *cut([q_1, q_2], n_2) \wedge \xi \in chos(x) \wedge$

$\wedge \varphi \in *fctd(*N, *R) \vdash \psi \equiv *ccs(\varphi, x, \xi, [q_1, q_2], n_2) \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow \psi \in *fctd(*N, *R) \wedge (\forall n)[n \in *|1, n_2| \rightarrow \psi(n) = \varphi[\xi(n) \cdot *step(x)(\forall n)] \wedge (\forall n)[n \in *N \wedge n_2 < n \rightarrow \psi(n) = *0]$

$*$(4,13) $q_1 < q_2 \wedge \varphi \in *fctd([q_1, q_2], *R) \vdash s = *\int_{q_1}^{q_2} \varphi(t)\, dt \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow (\forall \varepsilon)[\varepsilon > *0 \rightarrow (\exists \delta)[\delta > *0 \wedge (\forall n_2)(\forall x)(\forall \xi)[x \in *cut([q_1, q_2], n_2) \wedge \xi \in *chos(x) \wedge \psi \equiv *ccs(\varphi, x, \xi, [q_1, q_2], n_2) \wedge$

$\wedge *maxstep(x, n_2) < \delta \rightarrow \left| *\sum_{n=1}^{n_2} \psi(n) - s\right| < \varepsilon]]]$。

（至于 $*\Sigma$ 的含义在〔17〕§5中有详细解释。）

$*$(4,14) $q_1 < q_2 \wedge \varphi \in *fctd([q_1, q_2], *R) \vdash$

$\varphi \in *Riemannint([q_1, q_2]) \longleftrightarrow (\exists s)[s = *\int_{q_1}^{q_2} \varphi(t)\, dt]$。

由于在M②中不能像M那样定义"Σ(和)"，详见[17]§5。所以在M②中也无法象M那样一般地引进定积分的定义。

积分中值公式在M中的表述为

(4,15)
$$q_1<q_2\wedge\varphi\in fctd([q_1,q_2],R)\wedge\psi\in fctd([q_1,q_2],R)\wedge$$
$$\wedge\varphi\in Riemannint([q_1,q_2])\wedge\psi\in Riemannint([q_1,q_2])\wedge$$
$$\wedge(\forall x)[x\in[q_1,q_2]\rightarrow m\leqslant\varphi(x)\leqslant M\wedge\psi(x)\geq 0]\vdash$$
$$(\exists\mu)[m\leqslant\mu\leqslant M\wedge\int_{q_1}^{q_2}\varphi(t)\psi(t)\,dt=\mu\int_{q_1}^{q_2}\psi(t)dt]。$$

转到$*M$有

$*$(4,16)
$$q_1<q_2\wedge\varphi\in *fctd([q_1,q_2],*R)\wedge\psi\in *fctd([q_1,q_2],*R)\wedge$$
$$\wedge\varphi\in *Riemannint([q_1,q_2])\wedge\psi\in *Riemannint([q_1,q_2])\wedge$$
$$\wedge(\forall x)[x\in[q_1,q_2]\rightarrow m\leqslant\varphi(x)\leqslant M\wedge\phi(x)\geq *0]\vdash$$
$$(\exists\mu)[m\leqslant\mu\leqslant M\wedge *\int_{q_1}^{q_2}\varphi(t)dt=\mu *\int_{q_1}^{q_2}\psi(t)dt]。$$

此外，Newton—Leibnitz公式，在M的表述为

(4,17)
$$q_1<q_2\wedge\varphi\in fctd([q_1,q_2],R)\wedge\varphi\in Riemannint([q_1,q_2])\wedge$$
$$\wedge\Phi(x)=\int_{q_1}^{x}\varphi(s)ds\vdash\Phi\in C([q_1,q_2])\wedge(\forall t)[t\in[q_1,q_2]\wedge$$
$$\wedge\varphi\in Cp(t,[q_1,q_2])\rightarrow\Phi\in deriv(t,[q_1,q_2])\wedge\Phi'(t)=\varphi(t)]\wedge$$
$$\wedge[\varphi\in C([q_1,q_2])\rightarrow\Phi\in antideriv(\varphi,[q_1,q_2])\wedge(\forall\Psi)[\Psi\in$$
$$\in antideriv(\varphi,[q_1q_2])\rightarrow\Phi(q_2)=\int_{q_1}^{q_2}\varphi(t)dt=\Psi(q_2)-\Psi(q_1)]]。$$

转到$*M$有

$*$(4,18)
$$q_1<q_2\wedge\varphi\in *fctd([q_1,q_2],*R)\wedge\varphi\in *Riemannint([q_1,q_2])\wedge$$
$$\wedge\Phi(x)=*\int_{q_1}^{x}\varphi(s)ds\vdash\Phi\in *C([q_1,q_2])\wedge(\forall t)t\in[q_1,q_2]\wedge$$
$$\wedge\varphi\in *Cp(t,[q_1,q_2])\rightarrow\Phi\in *deriv(t,[q_1,q_2])\wedge\Phi^{*\prime}(t)=\varphi(t)]\wedge$$
$$\wedge[\varphi\in *C([q_1,q_2])\rightarrow\Phi\in *antideriv(\varphi,[q_1,q_2])\wedge(\forall\Psi)[\Psi\in$$
$$\in *antideriv(\varphi,[q_1,q_2])\rightarrow\Phi(q_2)=*\int_{q_1}^{q_2}\varphi(t)=\Psi(q_2)-\Psi(q_1)]]。$$

我们与Robinson一致，使用下面的符号

(4,19)② $x\in R\wedge r\in finitR② \rightarrow[x=st(r)\longleftrightarrow r\in mon(*x)]$。

在M②我们有以下两个定理

(4,20)② 1. $a,b\in R$; $a<b$; 2. $g\in *fctd([*a,*b],*R)$;

$(\forall y)[y\in[*a,*b]\rightarrow g(y)\in finitR②]$;

3. $(\forall x)(\forall\alpha)[x\in[*a,*b]\wedge x+\alpha\in[*a,*b]\wedge$

$\wedge\alpha\in infsimR② \rightarrow g(x+\alpha)-g(x)\in infsimR②]$;

4. $f\in fctd([a,b],R)$; $(\forall x)[x\in[a,b]\rightarrow f(x)=st(g(*x))]$;

$\vdash$1. $f\in C([a,b])$; 2. $(\forall y)[y\in[*a,*b]\rightarrow *f(y)-g(y)\in infsimR②]$。

(4,21)② 1. $a,b\in R$; $a<b$; 2. $g\in {}^{*}fctd([{}^{*}a,{}^{*}b],{}^{*}R)$;

$(\forall y)[y\in[{}^{*}a,{}^{*}b]\to g(y)\in finitR②]$;

3. $f\in fctd([a,b],R)$; $(\forall x)[x\in[a,b]\to f(x)=st(g({}^{*}x))]$;

4. $g\in {}^{*}derivI([{}^{*}a,{}^{*}b])$; $g^{*\prime}\in {}^{*}C([{}^{*}a,{}^{*}b])$;

5. $(\forall y)[y\in[{}^{*}a,{}^{*}b]\to g^{*\prime}(y)\in finitR②]$;

6. $(\forall y)(\forall\alpha)[y\in[{}^{*}a,{}^{*}b]\wedge y+\alpha\in[{}^{*}a,{}^{*}b]\wedge$

$\wedge\alpha\in infsimR②\to g(x+\alpha)-g(x)\in infsimR②]$;

7. $f_1\in fctd([a,b],R)$; $(\forall x)[x\in[a,b]\to f_1(x)=st(g^{*\prime}({}^{*}x))]$;

$\vdash(\forall x)[x\in[a,b]\to f'(x)=f_1(x)]$。

以上两定理的证明见〔17〕§15。

关于标准函数在标准区间上的定积分，在M有公式

(4,22) $b_1<b_2\wedge a\in fctd([b_1,b_2],R)\wedge a\in Riemannint([b_1,b_2])\wedge$

$\wedge I=\int_{b_1}^{b_2}a(t)\,dt\vdash(\forall\varepsilon)[\varepsilon>0\to(\exists\delta)[\delta>0\wedge$

$\wedge(\forall n_2)(\forall x)(\forall\xi)[x\in cut([b_1,b_2],n_2)\wedge\xi\in chos(x)\wedge$

$\wedge\psi\equiv ccs(a,x,\xi,[b_1,b_2],n_2)\wedge maxstep(x,n_2)<\delta\to$

$\to\left|\sum_{n=1}^{n_2}\psi(n)-I\right|<\varepsilon]]]$。

因此与(2,5)类似，在M②有以下定理

(4,23)② $b_1<b_2\wedge a\in fctd([b_1,b_2],R)\wedge a\in Riemannint([b_1,b_2])\wedge$

$\wedge I=\int_{b_1}^{b_2}a(t)dt\vdash(\forall n_2)(\forall x)(\forall\xi)[x\in {}^{*}cut([{}^{*}b_1,{}^{*}b_2],n_2)\wedge$

$\wedge\xi\in {}^{*}chos(x)\wedge\psi\equiv {}^{*}ccs({}^{*}a,x,\xi,[{}^{*}b_1,{}^{*}b_2],n_2)\wedge$

$\wedge {}^{*}maxstep(x,n_2)\in +infsimR②\to st({}^{*}\sum_{n=1}^{n_2}\psi(n))=I]$。

特别在M②有

(4,24)② $b_1<b_2\wedge a\in fctd([b_1,b_2],R)\wedge a\in Riemannint([b_1,b_2])\wedge$

$\wedge I=\int_{q_1}^{q_2}a(t)\,dt\wedge n_2\in {}^{*}N\wedge n_2\in infinitR②\wedge$

$\wedge b(n_2)\in {}^{*}cut([{}^{*}b_1,{}^{*}b_2],n_2)\wedge(\forall m)[m\in {}^{*}|1,n_2+1|\to$

$\to b(n_2)(m)={}^{*}b_1+\frac{{}^{*}b_2-{}^{*}b_1}{n_2}(m-1)]\wedge g(n_2)\in {}^{*}chos(b(n_2))\wedge$

$\wedge g(n_2)\equiv b(n_2)\wedge\psi\equiv {}^{*}ccs({}^{*}a,b(n_2),g(n_2),[{}^{*}b_1,{}^{*}b_2],n_2)\vdash$

${}^{*}maxstep(b(n_2),n_2)\in +infsimR②\wedge st({}^{*}\sum_{n=1}^{n_2}\psi(n))=I$。

§ 5. 关于 Dirac 函数的一般理论

关于$Dirac$函数，在M②可如下定义

(5,1)② $\quad \alpha,\beta\in infsimR$②；$a,b\in R$；$*a<\alpha<\beta<*b$；

$a<0<b$；$\vdash q\in Diracf([*a,*b],[\alpha,\beta])\longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow p\in *fctd([*a,*b],*R)\wedge p\in *Riemannint([*a,*b])\wedge$

$\wedge(\forall x)[\alpha\leqslant x\leqslant\beta\rightarrow p(x)\geq *0]\wedge st(*\int_{\alpha}^{\beta}p(x)dx)=1\wedge$

$\wedge(\forall y)[y\leqslant\alpha\vee y\geq\beta\rightarrow p(y)\in infsimR$②$]$。

这样，在M②成立以下定理

(5,2)② $\quad$ 1. $\alpha,\beta\in infsimR$②；$a,b\in R$；$*a<\alpha<\beta<*b$；

$\alpha<0<b$；2. $p\in Diracf([*a,*b],[\alpha,\beta])$；

3. $f\in fctd([a,b],R)$；$f\in Riemannint([a,b])$；$f\in Cp(0,[a,b])$；

$$\vdash st(*\int_{*a}^{*b}p(x)*f(x)dx)=f(0)$$

证明。由于

$$*\int_{*a}^{*b}p(x)*f(x)dx=*\int_{*a}^{\alpha}p(x)*f(x)dx+*\int_{\alpha}^{\beta}p(x)*f(x)dx+$$

$$+*\int_{\beta}^{*b}p(x)*f(x)dx=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}。$$

由$*(4,16)$我们有

$$\mathrm{I}=*\int_{*a}^{\alpha}p(x)*f(x)dx=\mu(\alpha-*a)。$$

因为$x\leqslant\alpha\rightarrow p(x)\in infsimR$②，故$\mu\in infsimR$②，故$\mathrm{I}\in infsimR$②。同理，$\mathrm{III}\in infsimR$②。

又利用$*(4,16)$得

$$\mathrm{II}=*\int_{\alpha}^{\beta}p(x)*f(x)dx=\mu_1*\int_{\alpha}^{\beta}p(x)dx。$$

又由于$*f\in *Cp(*0,[*a,*b])$，所以$st(\mu_1)=f(0)$。因此

$$st(\mathrm{II})=st(\mu_1)\cdot st(*\int_{\alpha}^{\beta}p(x)dx)=f(0)。$$

故最后得到

$$st(*\int_{*a}^{*b}p(x)*f(x)dx)=f(0)$$

证完。

定理(5,2)实际上只是$*(4,16)$在某些条件下的一个推论。按照我们的定义，在M②中任意个$Dirac$函数的乘积和$Dirac$函数的任意次方幂也自然解决了，这是因为

我们定义$Dirac$函数类为$*fctd([*a,*b],R)$的子集合。我觉得重要的是在不同情况下给出$Dirac$函数的具体表达式。关于$Dirac$函数及其乘积的例题在〔17〕§25至§27给出。

§6. 奇异积分论

1.我们首先在M中讨论一下定义不完全的函数的积分。设

$$f(x)=\begin{cases}1,-2\leqslant x\leqslant-1,\\1,1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}\tag{6.1}$$

但对$-1<x<1$，$f(x)$尚未定义。现在问

$$\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=?\tag{6.2}$$

要回答这个问题，唯一的办法是对函数$f(x)$在$-1<x<1$进行补充定义。这种补充定义的方法很多，例如令

$$g_1(x,\lambda)=\begin{cases}1,-2\leqslant x\leqslant-1,\\\lambda x^2+1-\lambda,-1<x<1,\\1,1\leqslant x\leqslant 2。\end{cases}\tag{6.3}$$

那么有

$$\int_{-2}^{2}g_1(x,\lambda)\,dx=\frac{4}{3}(3-\lambda)。\tag{6.4}$$

当λ在R中变化时，（6,4）中的积分可以取到R中的每一个数。如果把（6,4）中积分的值看成（6,2）中积分的可能解答，则（6,2）中的积分可以取到R中的任意一个数。

进一步，如果令

$$g_2(x)=\begin{cases}1,-2\leqslant x\leqslant-1,\\\dfrac{1}{|x|},-1<x<1,\\1,1\leqslant x\leqslant 2。\end{cases}\tag{6.5}$$

那么

$$\int_{-2}^{2}g_2(x)\,dx\tag{6,6}$$

为奇异积分。我们也不能排斥（6,6）是（6,2）的积分的一种可能解答。总之，对函数$f(x)$进行不同的补充定义将对积分（6,2）给出不同的解答。

2.一般地说，在M可以引入以下定义

（6.7）　$a<b;\ q\subset[a,b];\ f\in fctd([a,b]\setminus q,R);$

$\vdash g\in Riemannext([a,b],f)\longleftrightarrow g\in fctd([a,b],R)\wedge$

$\wedge g\in Riemannint([a,b])\wedge(\forall x)[x\in[a,b]\setminus q\rightarrow g(x)=f(x)]$。

称g为函数f在$[a,b]$上的$Riemannint$可积扩张。进一步可定义

(6.8) $a<b$; $q\subset[a,b]$; $f\in fctd([a,b]\setminus q,\mathbf{R})$;

$g\in \mathbf{R}iemanucxt([a,b],f)$; $\vdash\int_a^b g(x)dx\in Solut(\int_a^b f(x)dx)$。

称$g(x)$在$[a,b]$的定积分为$\int_a^b f(x)dx$的一个解。

3.在以上思想的启发之下，我们可以在M②引进定义

(6,9)② $a,b\in R$; $a<b$; $q\subset[a,b]$, $f\in fctd([a,b]\setminus q,R)$;

$\vdash g\in Rjemannext②([{}^*a,{}^*b],f)\longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow g\in {}^*fctd([{}^*a,{}^*b],{}^*R)\wedge g\in {}^*Riemannint$

$([{}^*a,b])\wedge$

$\wedge(\forall x)(\forall y)[x\in[a,b]\setminus q\wedge y\in mon({}^*x)\rightarrow g(y)-{}^*f$

$(y)\in infsimR②]$。

可称g为f在M②中$[{}^*a,{}^*b]$上的$Riemann$可积扩张。进一步定义

(6,10)② $a,b\in R$; $a<b$; $q\subset[a,b]$; $f\in fctd([a,b]\setminus q,R)$;

$g\in Rielnannext②([{}^*a,{}^*b],f)$;

$\vdash{}^*\int_{{}^*a}^{{}^*b}g(x)dx\in Sotut②(\int_a^b f(x)dx)$

可称$g(x)$在$[{}^*a,{}^*b]$上的内积分为$\int_a^b f(x)dx$在M②的一个解答。

例如，在M中研究积分

(6,11) $$i(\lambda)=\int_c^{\frac{1}{2}}f(t)dt$$

其中$f(t)=t^\lambda$。当$\lambda\geq0$时，积分并不奇异。这时$i(\lambda)=\frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\lambda}$。

如果将$i(\lambda)$对λ进行解析开拓，则对一切$\lambda(\lambda\neq-1)$都有$i(\lambda)=\frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda+1}$。特别当$\lambda=-\frac{3}{2}$时有

(6,12) $$i\left(-\frac{3}{2}\right)=-2\sqrt{2}。$$

再者，我们取$\sigma\in+infsimR②$。令

(6,13)②i $$g(t)=\begin{cases}t^\lambda, \sigma\leqslant t\leqslant{}^*\frac{1}{2},\\ {}^*0, {}^*0\leqslant t<\sigma。\end{cases}$$

并令

(6,14)②i $$I(\lambda)={}^*\int_{{}^*0}^{{}^*\frac{1}{2}}g(t)dt=\frac{1}{\lambda+1}\left[\left({}^*\frac{1}{2}\right)^{\lambda+1}-\sigma^{\lambda+1}\right]。$$

当$\lambda>-1$时成立

(6,15)② $$St(I(\lambda))\frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda+1}。$$

那么有

(6,16)② $\quad St(I(\lambda))=i(\lambda)$。

但当 $\lambda=-{}^*\frac{3}{2}$时有

(6,17)②i $\quad I\left(-{}^*\frac{3}{2}\right)={}^*2\left(\sigma^{-\frac{1}{2}}-\sqrt{{}^*2}\right)$.

故 $I\left(-{}^*\frac{3}{2}\right)\in infinitR$②。这时(6,12)与(6,17)两个结果之间相差无限大量。那么，倒底哪一个结果是合理的呢？二者之间是否会发生矛盾呢？如果局限在古典的标准分析的范围之内，这个问题是不好回答的，而现在我们可以回答这个问题了。

对$\lambda<0$的情况，一方面按定义(6,9)我们有$g\in Riemannext$②$\left(\left[{}^*0,{}^*\frac{1}{2}\right],f\right)$，所以$I(\lambda)\in Solut$②$\left(\int_0^{\frac{1}{2}}t^\lambda dt\right)$。另方面，我们又可以引进

(6,18)②i $\quad g_1(t)=\begin{cases}t^\lambda, & \sigma\leqslant t\leqslant{}^*\frac{1}{2}\\ \sigma+K(t-\sigma), & {}^*0\leqslant t<\sigma\end{cases}$。

那么$g_1\in Riemannext$②$\left(\left[{}^*0,{}^*\frac{1}{2}\right],f\right)$。于是

(6,19)②i $\quad i_1(\lambda)={}^*\int_{{}^*0}^{{}^*\frac{1}{2}}g_1(t)\,dt=\frac{\lambda}{\lambda+1}\sigma^{\lambda+1}+\frac{1}{\lambda+1}\left({}^*\frac{1}{2}\right)^{\lambda+1}$

$-\frac{K}{2}\sigma^2$.

如果特别取$K=\frac{2\lambda}{\lambda+1}\sigma^{\lambda-1}$，那么$St(I_1(\lambda))=i(\lambda)$。所以

(6,20)② $\quad i(\lambda)\in Solut$②$\left(\int_0^{\frac{1}{2}}t^\lambda dt\right)$。

这样，在我们的理论中，$I(\lambda)$和$i(\lambda)$二者都是解答。此外，还有别的解答。因此，在求解物理中的发散积分时，必须根据其它附加条件，去寻找每个问题的合理的扩张解。从数学上讲，任何一种古典的求解奇异积分的方法，都相当于我们的扩张求解法中的某一特殊情况。解析开拓方法只是许多可能方法中的一个。

4．带奇异核的积分在M②可如下扩张。先引进定义

(6,21)② $\quad y,a,b\in R;\ a<b;\ a\leqslant y\leqslant b;$

$k\in fctd([a,b],fctd([a,b]\setminus\{y\},R));$

$k(y)\in fctd([a,b]\setminus\{y\},R);$

$\vdash K\in Coutext$②$([{}^*a,{}^*b]\otimes[{}^*a,{}^*b],k)\longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow K\in{}^*fctd([{}^*a,{}^*b],{}^*fctd([{}^*a,b],{}^*R))\wedge$

$\wedge K(t)\in{}^*fctd([{}^*a,{}^*b],{}^*R)\wedge K(t)\in{}^*C([{}^*a,{}^*b])\wedge$

$\wedge(\forall x)(\forall z)[x\in[a,b]\setminus\{y\}\wedge z\in mon({}^*x)\rightarrow$