

G633.6/132

ZHONGXUESHUXUETICUEJIEFENX

中学数学题错解分析

甘肃人民出版社

库存书

中学数学题错解分析

曹琦 程应钜 编

甘肃人民出版社

责任编辑：梅榆生

封面设计：谢艺平

中学数学题错解分析

曹 琦 程应钊

甘肃人民出版社出版

（兰州第一新村51号）

甘肃省新华书店发行 兰州新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 $1/32$ 印张5.75 字数118,000

1984年12月第1版 1984年12月第1次印刷

印数：1——27,600

书号：7096·215 定价：0.64元

前 言

解题是数学训练的一个重要组成部分。应当怎样解题呢？给了一道数学题，应当怎样解才能解对呢？很多数学家对这个问题发表过很有见地的意见，其中主要有：要对数学问题有兴趣、好奇心和探索精神；要对数学知识有深刻的理解；要掌握一定的数学方法，具备一定的数学能力。这种从正面指明大方向的作法无疑是非常重要的。然而在长期的数学教学实践中，我们还有这样的体会：对于一个概念、一个定理、特别是一个例题解法的讲解，如果总是只从正面去讲，有时效果并不理想。经常有这样的情况，在我们反复强调注意运算步骤以后，仍然出现 $-4 \div (1-i)(1+i) = -4 \div 2 = -2$ 这样的错误。相反，在教学过程中，我们如果能经常有意识地针对学生在解题中出现的错误解法，指出错误之所在，分析产生错误的原因，最后给出正确的解法，往往更能引起学生的注意，加深学生对数学基本概念的认识，从中吸取有益的教训，收到事半功倍的效果。本书就是在这方面为广大师生提供了一百多道初等数学问题的典型错误解法分析，其内容包括几何、代数、三角和解析几何四大部分，作为数学课本的补充，帮助读者更深刻地理解数学基本概念，更全面地掌握数学基础知识、更准确地运用数学基本方法，达到解好数学题，学好初等数学的目的。

内 容 提 要

本书为读者提供了一百多道初等数学题的错误解法分析；内容包括几何、代数、三角和解析几何四大部分。选题力求广泛，富于趣味性；解法力求典型，富于启发性。通过本书的学习，可以从反面帮助读者深刻地理解数学基本概念，全面地掌握数学基础知识，准确地运用数学基本方法，达到解好数学题，学好初等数学的目的。

目 录

第一部分	几何		(1)
第二部分	代数		(28)
第三部分	三角		(106)
第四部分	解析几何		(137)

第一部分 几 何

问题 1：一个命题的逆否命题的否命题是什么命题？

解：因为逆否命题与原命题等价，所以逆否命题的否命题是原命题的否命题。

答：是否命题。

解法分析：我们知道，从一个命题制作它的否命题，方法永远是：以原命题的前提和结论的反面分别作为它的前提和结论。若原命题为“若 A 则 B ”，则其否命题就为“若 $\overline{A}$ 则 $\overline{B}$ ”，这里 $\overline{A}$ 、 $\overline{B}$ 分别代表 A 、 B 的反面。因此逆否命题“若 $\overline{B}$ 则 $\overline{A}$ ”的否命题应为“若 $\overline{\overline{B}}$ 则 $\overline{\overline{A}}$ ”，由于 $\overline{\overline{B}} = B$ ， $\overline{\overline{A}} = A$ ，即逆命题“若 B 则 A ”。所以此题的 **正确答案**为：逆命题。

原来的解法错在哪里呢？错在把真假性相同的两个命题，视为形式上相同的同一个命题。此题并不要求考虑真假性，因此从形式上看，原命题就是原命题，逆否命题就是逆否命题，用原命题来代替逆否命题去制作否命题当然就完全错了。

问题 2：若三角形 ABC 任意两角之和的一半均不大于第三个角，对此三角形的三内角你有什么结论？

解：由 $\frac{1}{2}(\angle A + \angle B) \leq \angle C$,

有 $\angle A + \angle B + \angle C \leq 2\angle C + \angle C$,

即 $3\angle C \geq 180^\circ, \angle C \geq 60^\circ$.

同理 $\angle B \geq 60^\circ, \angle A \geq 60^\circ$.

所以三角形三内角满足:

$$\angle A \geq 60^\circ, \angle B \geq 60^\circ, \angle C \geq 60^\circ.$$

解法分析: 从本题条件推出的上述不等式, 仅是 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 应满足的部分条件, 作为三角形三内角, 还应检验它们之和是否满足重要等式: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. 显然, 结论里的三个不等式中若有一个取不等号, 则将推得 $\angle A + \angle B + \angle C > 180^\circ$, 因此三个不等式均应取等号. 正确答案为: $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$.

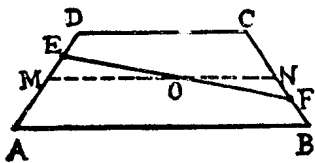


图 1

求证: $EF \geq \frac{1}{2}(AB + CD)$.

证明: 取梯形 $ABCD$ 的中位线 MN , 设 EF 交 MN 于 O . 由于 $\angle C > \angle B$, 推知

$$\angle ONF > \angle ONC,$$

对 $\triangle ONF$ 又有

$$\angle ONC > \angle OFN,$$

所以

$$\angle ONF > \angle OFN,$$

于是得

$$OF > ON.$$

同理可得

$$OE > OM.$$

把上面两个不等式相加得

此题错在没有用三角形内角和定理检验最后的结论.

问题 3: 如图 1, $ABCD$ 是等腰梯形, $AD = BC, DE = BF$,

$$EF > MN = \frac{1}{2}(AB + CD),$$

显然当 EF 与 MN 重合时有

$$EF = MN = \frac{1}{2}(AB + CD),$$

由此证得 $EF \geq \frac{1}{2}(AB + CD)$.

解法分析：在比较“细长的”梯形图形上还可以看出 $OE > OM$ ，在比较“平坦的”图 1 中无论怎样看也看不出这个结论了。实际上，用“同理”是推不出 $OE > OM$ 的。所以上述证法是完全错误的。

正确解法：如图 2，设 EF 不与中位线重合。把等腰梯形翻过来与原等腰梯形

并到一起，易证 AD'

$A'D$ 是平行四边形且

$EF = E'F$ 。连 EE' ，

在 $\triangle EE'F$ 中，有

即

$$2EF > AD' = AB + BD' = AB + DC,$$

所以

$$EF > \frac{1}{2}(AB + CD).$$

当 EF 与中位线重合时，有

$$EF = \frac{1}{2}(AB + CD).$$

所以证得

$$EF \geq \frac{1}{2}(AB + CD).$$

问题 4：把边长为 8 厘米的正方形（图 3）划为四块，

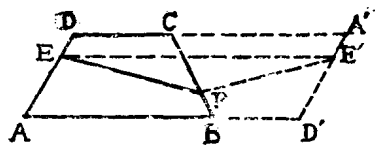


图 2

用这四块能否拼成一个长方形？

解：可以。把 I 与 II 在边长为 3 厘米的地方并起来得到一个勾与股分别为 5 厘米和 13 厘米的直角三角形。

同样处理 III 与 IV，又得一个勾与股分别为 5 厘米和 13 厘米的直角三角形。

把这两个全等的直角三角形沿斜边并到一起，所得图形为矩形，如图 4 所示。

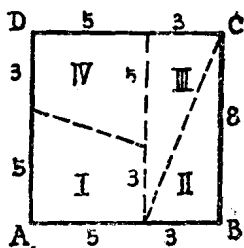


图 3

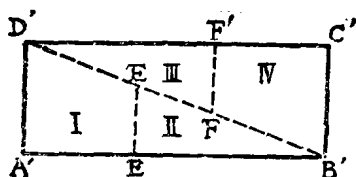


图 4

解法分析：如果真能拼成，则原来面积应等于后来的面积。但正方形面积为 $8^2 = 64$ 平方厘米，矩形面积为 $13 \times 5 = 65$ 平方厘米， $64 \neq 65$ ，所以答案是否定的。上面的解法完全错了。

错在哪里呢？错在未经严格证明，就断定 I 和 II，III 和 IV 拼成了直角三角形。事实上，在图形 $A'B'D'F'$ 中， $A'D' : EE' = 5 : 3$ ，而 $A'B' : EB' = 13 : 8$ ，显然 $A'D' : EE' \neq A'B' : EB'$ ， $B'、E'、D'$ 并不在一条直线上， $A'B'D'$ 不是直角三角形。同理， $B'C'D'$ 也不是直角三角形（图 5）。

面积从64平方厘米变为65平方厘米，这增加的一个单位，正是图5中间部分的面积。

读者还可以利用数列1、2、3、5、8、13……里连续三个数进行上述试验。

问题5：如图6，若 D 是 $\triangle ABC$ 的 AB 边上一点，线段 CD 分大三角形为两个相似的小三角形。你能由此判定 $\angle C = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ 吗？

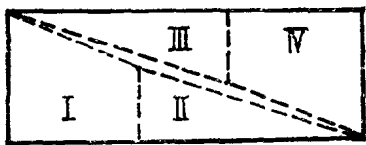


图5

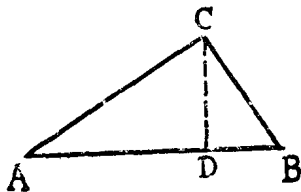


图6

解：能。

因为 $\triangle ADC \sim \triangle CDB$ ， $\angle ADC$ 在 $\triangle CDB$ 中应有对应角。由于外角大于不相邻的内角，对应角不可能是 $\angle DCB$ 和 $\angle CBD$ ，而只能是 $\angle CDB$ ，所以 $\angle ADC = \angle CDB$ ，但 $\angle ADC + \angle CDB = 180^\circ$ ，证得 $\angle ADC = \angle CDB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ 。

仍由 $\triangle ADC \sim \triangle CDB$ ， $\angle ADC = \angle CDB$ ， $\angle CAD$ 与 $\angle BCD$ 是对应角，有 $\angle CAD = \angle BCD$ ，在直角 $\triangle ADC$ 中， $\angle ACD + \angle CAD = 90^\circ$ ，于是 $\angle ACD + \angle BCD = \angle ACB = 90^\circ$ 。

解法分析：任意画一个顶角不是直角的等腰三角形 ABC ，作底边 AB 上的高，显然条件 $\triangle ADC \sim \triangle CDB$ 满足，

但 $\angle ACB \neq 90^\circ$ (图7)。因此由 $\triangle ADC \sim \triangle CDB$ 不能证得 $\angle C = 90^\circ$ 。上述证法后半部有错。

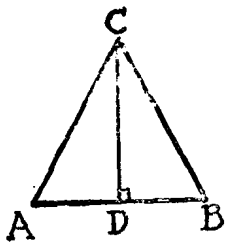


图 7

错在哪里呢？错在 $\angle CAD$ 在 $\triangle CDB$ 中的对应角不一定是 $\angle BCD$ 。当 $\angle CAD$ 与 $\angle BCD$ 对应时，如上述可以证得 $\angle C = 90^\circ$ ；当 $\angle CAD$ 与 $\angle CBD$ 对应时，由 $\angle CAD = \angle CBD$ ，只能推出 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，顶角 C 不一定是直角了。

如果把题目改为：若 D 是 $\triangle ABC$ 的 AB 边上一点， CD 分大三角形为两个相似而不全等的小三角形，你能由此判定 $\angle C = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ 吗？则答案就是肯定的了。读者可自己证明。

问题 6：若四边形 $ABCD$ 中， $AB = CD$ ，你能判定此四边形有一组对边平行吗？

解：能。

事实上，作 BC 的中垂线 EG ， AD 的中垂线 FG' 。

若 EG 和 FG' 不相交，则 $EG \parallel FG'$ ，但 $BC \perp EG$ ， $AD \perp FG'$ ，证得 $BC \parallel AD$ 。

若 EG 和 FG' 相交，设交点为 O 。

当 O 在四边形 $ABCD$ 内时 (图 8)，由 $BO = CO$ ， $AO = DO$ ， $AB = CD$ ，知 $\triangle ABO \cong \triangle CDO$ ，从而 $\angle ABO = \angle DCO$ ，但 $\angle OBE = \angle OCE$ ，把这两式相加得 $\angle ABC = \angle DCB$ 。同样可得 $\angle BAD = \angle CDA$ 。由四边形内角和为 360° ，知 $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$ ，同旁内角互补证得 $BC \parallel AD$ 。

$\parallel AD$.

当 O 在 $ABCD$ 外时(图9), 由 $BO=CO$, $AO=DO$,
 $AB=CD$

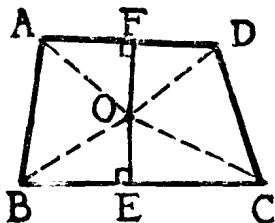


图 8

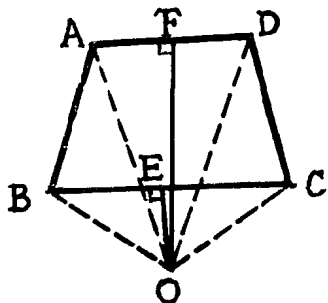


图 9

知 $\triangle ABO \cong \triangle CDO$, 从而 $\angle BOA = \angle COD$. 由 $\angle BOE = \angle COE$, 有 OE 为 $\angle AOD$ 的平分线. 但易见 OF 已为 $\angle AOD$ 的平分线, 所以 OE 重合于 OF , 证得 $BC \parallel AD$.

解法分析: 一组对边相等的四边形一定是等腰梯形, 这个结论显然是错误的. 那么上述证法错在哪里呢? 错在图8、图9完全画错了. 准确图形如图10所示. 对于这样一个图形, 读者容易判断上面的推理过程就完全无效了.

问题 7: 要在一平直河岸 l 上建一抽水站 P , 供应 l 同侧两居民点 A 、 B 的用水, 试问站址 P 应选在 l 上的什么地方, 才能使敷设的水管总长最短(不考虑 V 形路径)?

解: 如图11作点 A 关于直线 l 的对称点 A' , 连 $A'B$ 与 l 交于 P , 则 P 为所求.

事实上, 在 l 上除 P 点外任取一点 P' , 连 AP 、 AP' 、 $P'B$ 、 $A'P'$, 有

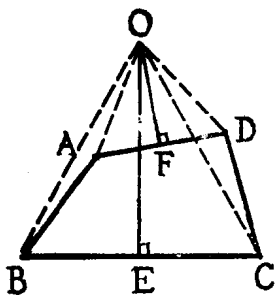


图10

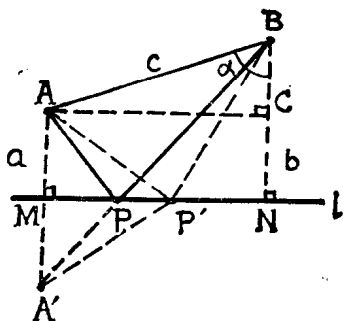


图11

$$\begin{aligned}
 AP + PB &= A'P + PB && (\text{因为 } AP = A'P) \\
 &< A'P' + P'B && (\text{三角形两边之和大于第三边}) \\
 &= AP' + P'B && (\text{因为 } A'P' = AP'),
 \end{aligned}$$

得证。

解法分析：设 A 、 B 到 l 的距离 AM 、 BN 分别为 a 、 b ，不妨假定 $a \leq b$ ，设 $AB = c$ ， $\angle ABN = \alpha$ 。上述解法只考虑了 APB 的线路，但水管还可沿 MAB 或 NBA 方向敷设，这时就需要用计算来比较哪一方向最短了。因此上述解法是不完善的。

正确解法：

当 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时，有 $a < b$ ， $\angle MAB = 180^\circ - \alpha$ 。于是

$$\begin{aligned}
 A'B^2 &= (2a)^2 + c^2 - 2 \cdot 2a \cdot c \cos(180^\circ - \alpha) \\
 &= c^2 + 4ab.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{有 } (MA + AB)^2 - (PA + PB)^2 &= (a + c)^2 - (c^2 + 4ab) \\
 &= a^2 + 2ac - 4ab.
 \end{aligned}$$

(1) 若 $a^2 + 2ac - 4ab > 0$, 即 $c > 2b - \frac{a}{2}$ 时,

有 $(MA + AB)^2 > (PA + PB)^2$,

即 $MA + AB > PA + PB$,

水站应设在 P 点处.

(2) 若 $a^2 + 2ac - 4ab = 0$, 即 $c = 2b - \frac{a}{2}$ 时,

有 $(MA + AB)^2 = (PA + PB)^2$,

即 $MA + AB = PA + PB$,

水站设在 P 点或 M 点均可.

(3) 若 $a^2 + 2ac - 4ab < 0$, 即 $c < 2b - \frac{a}{2}$ 时,

有 $(MA + AB)^2 < (PA + PB)^2$,

即 $MA + AB < PA + PB$,

水站应设在 M 点处.

当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 有 $a = b$. 仿上有结论:

(1) 若 $c > \frac{3}{2}a$ 时, 水站应设在 P 点处.

(2) 若 $c = \frac{3}{2}a$ 时, 水站可设在 P 处、 M 处或 N 处均可.

(3) 若 $c < \frac{3}{2}a$ 时, 水站可设在 M 处或 N 处均可.

问题 8: 有人用下法证明 “任意不等边三角形必是等腰三角形”. 试分析其错误之所在.

证明: 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $AB > AC$, 作 $\angle A$ 的平分线 AE 与 BC 的中垂线 DE' .

若 AE 与 DE' 不相交, 则 $AE \parallel DE'$, $AE \perp BC$, 推得 $AB = AC$, $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

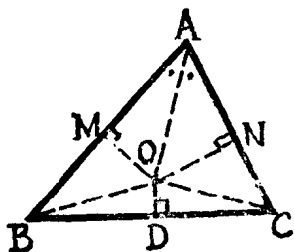


图12

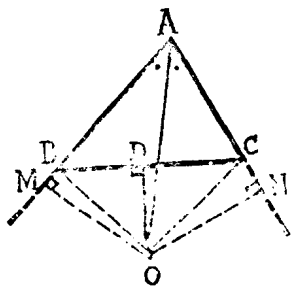


图13

若 AE 与 DE' 相交于 $\triangle ABC$ 内一点 O (图12), 过 O 作 $OM \perp AB$, $ON \perp AC$. 由 $BO = CO$, $MO = NO$, $\angle BMO = \angle CNO = 90^\circ$, 知 $\triangle BMO \cong \triangle CNO$, 推得 $\angle MBO = \angle NCO$. 但 $\angle OBC = \angle OCB$, 两式相加有 $\angle MBC = \angle NCB$, $\triangle ABC$ 仍为等腰三角形.

若 AE 与 DE' 相交于 $\triangle ABC$ 外一点 O (图13), 过 O 作 $OM \perp AB$, $ON \perp AC$. 由 $BO = CO$, $MO = NO$, $\angle BMO = \angle CNO = 90^\circ$, 知 $\triangle BMO \cong \triangle CNO$, 推得 $\angle MBO = \angle NCO$. 但 $\angle OBC = \angle OCB$, 两式相加有 $\angle MBC = \angle NCB$, 它们的补角 $\angle ABC = \angle ACB$, $\triangle ABC$ 仍为等腰三角形.

解法分析: 上述解法是错误的, 错在那里呢? 错在图形没有画准确, 准确图形如图 14 所示. 容易证明在 $AB > AC$ 时, AE 与 DE' 必相交.

首先证明交点 O 必在 $\triangle ABC$ 外部. 由角平分线定理, $BA' : A'C = AB : AC$, 所以 $BA' > A'C$, 由于 D 是 BC 中点, 知 D 在线段 BA' 上.

又 $\angle C > \angle B$, $\angle BAO = \angle CAO$, 所以 $\angle AA'B > \angle AA'C$, 而 $\angle AA'B + \angle AA'C = 180^\circ$, 有 $\angle AA'B$ 为钝角, 于是同旁内角之和 $\angle O'DA' + \angle AA'D > 180^\circ$, 所以 $O'D$ 与 AA' 相交于 BC 的另一侧, 即 $\triangle ABC$ 的外部。

其次证明 O 点必在 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O'$ 上. 事实上, 设 AE 交 $\odot O'$ 于 O'' . 因为 $\angle BAO'' = \angle CAO''$, 所以 O'' 为 BC 的中点, 从而 $O''O'$ 为 BC 的中垂线 DE' , 因而 O'' 即为 O .

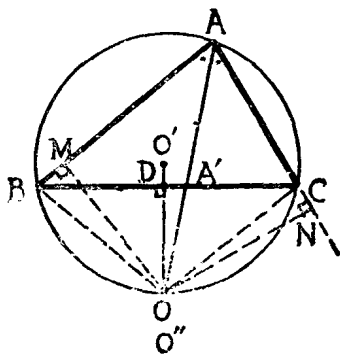


图14

最后证明由 O 向 AB 、 AC 分别引的垂线 OM 、 ON , 垂足 M 必

落在 AB 上, N 必落在 AC 延长线上. 因为 $\angle OBC = \angle OCB$, $\angle CBA < \angle BCA$, 所以 $\angle ABO < \angle ACO$. 但 $\angle ABO + \angle ACO = 180^\circ$, 故 $\angle ABO$ 为锐角, $\angle ACO$ 为钝角. 因此 O 在 AB 上的射影 M 在 AB 上, 在 AC 上的射影 N 在 AC 延长线上.

这样, 按照前面的“证明”, 显然就推不出 $\triangle ABC$ 是等腰三角形了.

通过此题和问题 4、6, 我们要记住, 做几何题时, 作图应尽可能准确, 要用工具画图, 否则会把自己引入歧途. 同时也看见了, 尽管直观因素有很大的用处, 但不能处处靠直观, 因为由直观得出的结论往往是不可靠的. 只有理论上