江苏省金陵科技著作出版基金

鞅测度及其极限定理

谢颖超 著

江苏科学技术出版社

江苏省金陵科技著作出版基金

鞅测度及其极限定理

谢颖超 著

江苏科学技术出版社

鞅测度及其极限定理
谢颖超　著

出版发行：江 苏 科 学 技 术 出 版 社
排　　版：南京理工大学激光照排公司
印　　刷：扬　中　市　印　刷　厂

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 11 插页 5 字数 266,000
1995 年 12 月第 1 版　1995 年 12 月第 1 次印刷
印数 1—600 册

ISBN　7—5345—2060—6

O・111　　定价：19.00 元
责任编辑　沈绍绪
我社图书如有印装质量问题，可随时向承印厂调换

致读者

社会主义的根本任务是发展生产力，而社会生产力的发展必须依靠科学技术。当今世界已进入新科技革命的时代，科学技术的进步不仅是世界经济发展、社会进步和国家富强的决定因素，也是实现我国社会主义现代化的关键。

科技出版工作肩负着促进科技进步，推动科学技术转化为生产力的历史使命。为了更好地贯彻党中央提出的“把经济建设转到依靠科技进步和提高劳动者素质的轨道上来”的战略决策，进一步落实中共江苏省委、江苏省人民政府作出的“科技兴省”的决定，江苏科学技术出版社于1988年倡议筹建江苏省科技著作出版基金。在江苏省人民政府、省委宣传部、省科委、省新闻出版局负责同志和有关单位的大力支持下，经省政府批准，由省科学技术委员会、省出版总社和江苏科学技术出版社共同筹集，于1990年正式建立了“江苏省金陵科技著作出版基金”，用作支持自然科学范围内符合条件的优秀科技著作的出版补助。

我们希望江苏省金陵科技著作出版基金的建立，能为优秀科技著作在江苏省及时出版创造条件，以通过出版工作这一“中介”，充分发挥科学技术作为第一生产力的作用，更好地为我国社会主义现代化建设和“科技兴省”服务；并能带动我省科技图书提高质量，促进科技出版事业的发展和繁荣。

建立出版基金是社会主义出版工作在改革中出现的新生事物，期待得到各方面的热情扶持，在实践中不断总结经验，使它逐步壮大和完善，更希望通过多种途径扩大这一基金，以支持更多优秀科技著作的出版。

这次获得江苏省金陵科技著作出版基金补助出版的科技著作的顺利问世，还得到江苏联合信托投资公司的赞助和参加评审工作的教授、专家的大力支持，特此表示衷心的感谢！

江苏省金陵科技著作出版基金管理委员会

前　言

随机过程极限定理的研究是近代概率论的一个重要分支. 自1956年Yu. V. Prokhorov和A. V. Skorokhod发表了他们的著名论文[32]和[33]后,随机过程极限定理的研究得到了飞速发展. 20世纪70年代至80年代,半鞅理论和随机分析的兴起,给这一理论注入了崭新的内容和研究方法,这一时期的成果已总结在由J. Jacod和A. N. Shiryeav合著的《Limit Theorems for Stochastic Processes》(1987)一书中.

1986年,J. B. Walsh在研究随机偏微分方程时,提出了鞅测度的概念,并研究了鞅测度的基本性质和随机积分. 1990年,N. El Karoui和S. Méleard发表了关于鞅测度的第二篇论文,他们主要研究正交鞅测度的表现定理和鞅问题. 1991年,D. H. Thang引入了向量值随机测度序列弱收敛的概念,并对对称独立散射的向量值随机测度的极限定理进行了研究. 因为鞅测度既有鞅的性质,又有向量值随机测度的性质,如何定义和研究鞅测度的极限定理是自然要提出的问题,本书的讨论将围绕这一问题展开. 本书作者在导师何声武教授的指导下,定义了鞅测度的极限,并对鞅测度的性质及其极限定理进行了深入、系统地研究,本书就是在作者博士学位论文的基础上进一步整理而成的. 全书比较系统地介绍了鞅测度及其极限定理的国内外最新研究成果,希望能有助于更多的概率论工作者开展对随机过程极限定理这一有意义课题的研究和应用,以促进这一理论的进一步发展.

阅读本书需要具备以下基础知识:S. W. He、J. G. Wang和J. A. Yan[13](1992)以及M. Métivier[25](1982)等专著中有关半

鞅理论和随机分析的内容；J. Jacod 和 A. N. Shiryeav[16](1987)中有关半鞅的极限定理等基本知识；Hilbert 空间上线性算子的基本知识.

本书按照所涉及随机过程的不同类型，共分为五个部分。第一部分绪论，集中叙述本书中要用到的预备知识. 第二部分介绍 Hilbert 空间值半鞅的极限定理这方面的成果，即取值于 Hilbert 空间的右连左极函数空间上关于 Skorokhod 拓扑为相对紧子集的结构定理——这是研究 Hilbert 空间值随机过程极限定理的基石，右连左极 Hilbert 空间值半鞅序列的胎紧性以及半鞅的极限定理. 第三部分随机测度的极限定理，主要研究整值随机测度的极限定理. 第四部分介绍实值鞅测度的性质及其极限定理，最后研究 Hilbert 空间值鞅测度的基本性质和极限定理，把 Hilbert 空间值鞅的性质及实值鞅测度的理论拓广到 Hilbert 空间值鞅测度上.

在本书的写作过程中，作者始终得到导师何声武教授的大力支持和热情鼓励，没有他的指导、关心和帮助，作者是不可能顺利地完成学业和写成此书的，可以说作者一切工作都凝聚着何先生的心血，其中的感激之情无法用语言来表达. 同时，作者深切感谢汪振鹏教授，他的鼓励和帮助，使作者在学习和研究过程中得到了巨大的精神上的宽慰和奋发拼搏的动力. 作者还要感谢汪嘉冈教授，他审阅并指出了作者博士学位论文中的错误. 同时，作者还想把一片感激之情献给妻子陈彬硕士，作为伴侣、同事和同行，她对作者的工作和生活倾注了极大的心力. 她含辛茹苦地抚养幼女、操持家务，单薄的肩头挑起了工作和生活两副重担. 没有她的帮助、鼓励和促进，作者是无法安心完成学业和写成此书的.

作者能有勇气整理、完成此书，与徐州师范学院副院长周明儒教授的热忱鼓励、支持和帮助是分不开的，南京大学钟瑚绵副教授、南京航空航天大学王月珍副教授对完成此书及出版工作给予了极大的帮助，在此作者向他们表示最真诚的谢意. 多年来，徐州

师范学院和数学系的领导和老师们，对作者及家庭给予了很多的关心和帮助，许多朋友给了热情的帮助和支持，在此一并向他们表示衷心的感谢．

由于作者水平有限，书中肯定会有错误和不当之处，敬请读者批评指正．

谢颖超

1995 年 7 月

目　录

1 预备知识

阅读本书的读者，须预先掌握 S. W. He、J. G. Wang 和 J. A. Yan[13]中随机分析的内容、J. Jacod 和 A. N. Shiryaev[16]中半鞅极限定理的基本知识，以及 Hilbert 空间上线性算子的基本知识. 本章主要取材于[13,16,25,40,42].

1.1 随机测度

1.1.1. 定义 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$是带流的完备概率空间，$(\boldsymbol{E},\mathscr{E})$是可测空间. 令

$$(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}})=(\Omega\times\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E},\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{E}),$$

$$\widetilde{\mathscr{O}}=\mathscr{O}\times\mathscr{E},\quad \widetilde{\mathscr{P}}=\mathscr{P}\times\mathscr{E},$$

其中$\mathscr{O}$和$\mathscr{P}$分别是$(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$的可选$\sigma$-域和可料$\sigma$-域；称$\widetilde{\mathscr{O}}$和$\widetilde{\mathscr{P}}$分别是$\widetilde{\Omega}$上的可选和可料$\sigma$-域；定义在$\widetilde{\Omega}$上的$\widetilde{\mathscr{O}}$ ($\widetilde{\mathscr{P}}$)-可测函数称为$\widetilde{\Omega}$上的可选(可料)过程.

假设$(\boldsymbol{E},\mathscr{E})$是Lusin空间，即紧距离空间的Borel子集带上它的 Borel σ-域. 例如$(\boldsymbol{E},\mathscr{E})$可以是一离散空间、$(\boldsymbol{R},\mathscr{B}(\boldsymbol{R}))$或者$n$-维欧氏空间$(\boldsymbol{R}^n,\mathscr{B}(\boldsymbol{R}^n))$.

1.1.2 引理 设W是$\widetilde{\Omega}$上的可选(可料)过程，$(\alpha_t)_{t\geqslant 0}$是可选(可料)过程，$T$是停时，则

$$W(\omega,T,\alpha_T(\omega))I_{\{T<\infty\}}(\omega)\in\mathscr{F}_T\quad(\mathscr{F}_{T-}).\tag{1.1}$$

证明 当$W(\omega,t,x)=f(\omega,t)g(x),f(\omega,t)\in\mathscr{O}(\mathscr{P}),g\in\mathscr{E}$时，易知(1.1)成立. 利用单调类定理容易证明对任意的可选(可料)的W，(1.1)仍然成立. 证毕.

1.1.3 定义 定义在$\Omega\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{E}$上的广义实值函数$\mu$称为是随机测度，如果

(Ⅰ)对任意的$\omega\in\Omega$，$\mu(\omega,\cdot)$是$\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{E}$上$\sigma$-有限测度；

(Ⅱ)对任意的$\hat{B}\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{E}$，$\mu(\cdot,\hat{B})$是$(\Omega,\mathscr{F})$上的$r.v.$

对任意的$\widetilde{B}\in\widetilde{\mathscr{F}}$，定义

$$M_\mu(\widetilde{B})=E\left[\int_{\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E}}I_{\widetilde{B}}(\omega,t,x)\mu(\omega,\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)\right],$$

则M_μ是$(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}})$上的测度，称之为由$\mu$生成的测度. 如果$M_\mu$有限，即$M_\mu(\widetilde{\Omega})<\infty$，则称$\mu$是可积的. 如果$M_\mu$限制在$\widetilde{\mathscr{O}}$或$\widetilde{\mathscr{P}}$上是$\sigma$-有限测度，则称$\mu$是可选$\sigma$-可积或可料$\sigma$-可积.

显然，随机测度的概念是增过程概念的推广. 设A是增过程，取$\boldsymbol{E}=\{x_0\}$为单点集，$\mathscr{E}=\{\varnothing,\boldsymbol{E}\}$，则

$$\mu(\omega,\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=\mathrm{d}A_t(\omega)\delta_{x_0}(\mathrm{d}x)$$

是一个随机测度，并且

$$\mu([0,t]\times\boldsymbol{E})=A_t.$$

应该强调的是对一般的随机测度μ，对任意的$t\geqslant 0,B\in\mathscr{E}$，$\mu([0,t]\times B)$可能是恒为$\infty$.

如果$W\in\widetilde{\mathscr{F}}^+$，则

$$v(\omega,\hat{B}) = \int_{\hat{B}} W(\omega,t,x)\mu(\omega,\mathrm{d}t,\mathrm{d}x), \quad \hat{B} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathscr{E} \tag{1.2}$$

仍为随机测度. 有时(1.2) 被记为 $v = W.\mu$ 或 $v = W\mu$.

对 $W \in \widetilde{\mathscr{F}}$,如果

$$\int_{[0,t]\times E} |W|\mathrm{d}\mu < \infty, \quad \forall\, t > 0,$$

则定义 $W.\mu = (W.\mu_t)_{t\geqslant 0}$ 为

$$W.\mu_t = \int_{[0,t]\times E} W\mathrm{d}\mu, \quad t \geqslant 0.$$

显然 $W.\mu$ 是有限变差过程.

随机测度 μ 称为是可选的(可料的),如果对任意使得 $W.\mu$ 存在的可选(可料) 过程 W,$W.\mu$ 仍是可选(可料) 过程.

显然,如果对任意的 $t \geqslant 0, 1.\mu_t < \infty$,则 μ 是可选(可料) 的充要条件是对任意的 $B \in \mathscr{E}, I_B.\mu = (\mu([0,t] \times B))_{t\geqslant 0}$ 是可选(可料). 容易推得下面的结论.

1.1.4 引理 设 μ 是可选(可料) 随机测度,W 是非负可选(可料) 过程,则 $v = W\mu$ 是可选(可料) 随机测度.

1.1.5 定理 设 μ 和 v 是两个可选(可料)σ- 可积的可选(可料) 随机测度. 如果在 $\widetilde{\mathscr{O}}$ ($\widetilde{\mathscr{P}}$) 上 M_μ 和 M_v 相同,则 $\mu = v$,即 μ 和 v 无区别:

$$P(\{\omega: \exists\, \hat{B} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathscr{E} \text{ 使得 } \mu(\omega,\hat{B}) \neq v(\omega,\hat{B})\}) = 0.$$

证明 设 $\widetilde{A}_n \in \widetilde{\mathscr{O}}$ ($\widetilde{\mathscr{P}}$),使得 $\widetilde{A}_n \uparrow \widetilde{\Omega}$,并且

$$M_\mu(\widetilde{A}_n) = M_v(\widetilde{A}_n) < \infty, \quad \forall\, n \geqslant 1.$$

令 $\mathscr{D}$ 是一可数 Π- 系,使得 $\sigma(\mathscr{D}) = \mathscr{E}$. 对每个 $n \geqslant 1, D \in \mathscr{D}$,定义

$$U = (I_{\widetilde{A}_n} I_D).\mu, \qquad V = (I_{\widetilde{A}_n} I_D).v,$$

则 U 和 V 均为可选(可料) 的可积增过程. 从而对任一非负可选(可料) 过程 H,我们有

$$E\left[\int_{\mathbf{R}_+} H_t \mathrm{d}U_t\right] = M_\mu[I_{\widetilde{A}_n} I_D H] = M_\upsilon(I_{\widetilde{A}_n} I_D H)$$

$$= E\left[\int_{\mathbf{R}_+} H_t \mathrm{d}V_t\right].$$

因此 U 和 V 无区别. 所以

$$P\left(\left\{\omega: \int_{[0,t]\times D} I_{\widetilde{A}_n} \mathrm{d}\mu = \int_{[0,t]\times D} I_{\widetilde{A}_n} \mathrm{d}\upsilon, \forall\ t \geqslant 0, \forall\ D \in \mathscr{D}\right\}\right)$$

$$= 1.$$

由测度扩张的唯一性可得

$$P\left(\left\{\omega: \int_{\hat{B}} I_{\widetilde{A}_n} \mathrm{d}\mu = \int_{\hat{B}} I_{\widetilde{A}_n} \mathrm{d}\upsilon, \forall\ \hat{B} \in \mathscr{B}(\mathbf{R}_+) \times \mathscr{E}\right\}\right) = 1. \tag{1.3}$$

在(1.3) 中令 $n \to \infty$, 即得 $\mu = \upsilon$. 证毕.

1.1.6 定理 设 m 是$(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{F}})$ 上的测度, 并且限制在 $\widetilde{\mathscr{O}}$ ($\widetilde{\mathscr{P}}$) 上是 σ- 有限, 则存在一可选(可料) 随机测度 μ 使得 $m = M_\mu$ 的充要条件是:

(Ⅰ) 对每个不足道集 $N \subset \Omega \times \mathbf{R}_+$, $m(N \times \mathbf{E}) = 0$;

(Ⅱ) 对任意使得 $m(\widetilde{A}) < \infty$ 的集 $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathscr{O}}$ ($\widetilde{\mathscr{P}}$) 及任意有界可测过程 X,

$$m(XI_{\widetilde{A}}) = m({}^oXI_{\widetilde{A}}) \ (m(XI_{\widetilde{A}}) = m({}^pXI_{\widetilde{A}})),$$

其中 ${}^oX$ 和 ${}^pX$ 分别表示 X 的可选和可料投影. 在这种情况下, 可选(可料) 随机测度是唯一确定的.

证明 我们只讨论可料情形.

必要性 (Ⅰ) 是显然的, 即对任意的不足道集 N, $M_\mu(N \times \mathbf{E}) = 0$. 注意到 $Y = I_{\widetilde{A}}.\mu$ 是可料增过程, 从而对任意有界可测过程 X, 我们有

$$m(XI_{\widetilde{A}}) = M_\mu(XI_{\widetilde{A}}) = E\left[\int_{\mathbf{R}_+} X_t \mathrm{d}Y_t\right] = E\left[\int_{\mathbf{R}_+} {}^pX_t \mathrm{d}Y_t\right]$$

$$= M_\mu({}^pXI_{\tilde{A}}) = m({}^pXI_{\tilde{A}}).$$

充分性　首先假设 m 是有限测度，则 m 可分解为

$$m(\mathrm{d}\omega,\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = n(\omega,t,\mathrm{d}x)m(\mathrm{d}\omega,\mathrm{d}t,\boldsymbol{E}), \tag{1.4}$$

其中对任意的 $B \in \mathscr{E}$，$n(\omega,t,B)$ 是 $m(\mathrm{d}\omega,\mathrm{d}t,B)$ 在 $\mathscr{P}$ 上关于 $m(\mathrm{d}\omega,\mathrm{d}t,\boldsymbol{E})$ 的 Radon-Nikodym 导数，并且也是一个可料过程；对任意的 (ω,t)，$n(\omega,t,\cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的概率测度.

因为 m 有限，所以由假设条件(Ⅰ)知对任意 $t \geqslant 0$，$(\Omega,\mathscr{F})$ 上的集函数

$$Q_t(F) = m(F \times [0,t] \times \boldsymbol{E}), \quad F \in \mathscr{F}$$

是有限的，并且关于 P 绝对连续. 因此存在唯一的可积增过程 $A = (A_t)_{t\geqslant 0}$，使得对任意非负可测过程 X，

$$m(X) = E\left[\int_{\boldsymbol{R}_+} X_t \mathrm{d}A_t\right]. \tag{1.5}$$

由条件(Ⅱ)知 m 可料，从而 A 是可料增过程. 令

$$\mu(\omega,\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = n(\omega,t,\mathrm{d}x)\mathrm{d}A_t(\omega),$$

容易验证 μ 是可料可积的随机测度.

对任意的 $B \in \mathscr{E}$ 和任意有界可测过程 X，由(1.4)和(1.5)，我们有

$$\begin{aligned} m(XI_B) &= m({}^pXI_B) \\ &= \int_{\Omega\times\boldsymbol{R}_+} {}^pX_t(\omega)n(\omega,t,B)m(\mathrm{d}\omega,\mathrm{d}t,\boldsymbol{E}) \\ &= E\left[\int_{\boldsymbol{R}_+} {}^pX_t(\omega)n(\omega,t,B)\mathrm{d}A_t(\omega)\right] \\ &= E\left[\int_{\boldsymbol{R}_+} X_t(\omega)n(\omega,t,B)\mathrm{d}A_t(\omega)\right] \\ &= E\left[\int_{\boldsymbol{R}_+\times B} X_t(\omega)\mu(\omega,\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)\right] = M_\mu(XI_B). \end{aligned}$$

从而由测度扩张的唯一性，我们知道在 $\mathscr{F}$ 上 $m = M_\mu$.

假设 m 在 $\mathscr{P}$ 上 σ- 有限，则存在 $\mathscr{P}$ 的两两互不相交序列

$\{\widetilde{A}_n\}_{n\geqslant 1}$,使得$\widetilde{\Omega}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n$和$m(\widetilde{A}_n)<\infty(n\geqslant 1)$.应用前面已证的结论到有限测度$m(WI_{\widetilde{A}_n})$上,存在可料可积的随机测度$\mu_n$,使得$m(WI_{\widetilde{A}_n})=M_{\mu_n}(W)$,$\forall\ W\in\mathscr{F}^+$.令

$$\mu=\sum_{n=1}^{\infty}I_{\widetilde{A}_n}\mu_n,$$

容易证明μ是可料的随机测度,并且$m=M_\mu$.证毕.

1.1.7 定义 设μ是一随机测度,如果存在一可料随机测度υ满足

(Ⅰ)υ是可料σ-可积,

(Ⅱ)限制在$\mathscr{P}$上,$M_\mu=M_\upsilon$,

则称μ存在可料对偶投影,并称υ为μ的可料对偶投影.由定理1.1.6知一个随机测度μ,如果其可料对偶投影存在,则其可料对偶投影是唯一的,以后记μ的可料对偶投影为μ^p.

1.1.8 定理 随机测度μ存在可料对偶投影的充要条件是μ可料σ-可积.

证明 必要性是显然的.下面只要证明充分性.

对任一非负有界可测过程X及非负有界$\mathscr{E}$-可测函数h,令

$m(Xh)=M_\mu({}^pXh)$.

因为M_μ在$\mathscr{P}$上σ-有限,所以我们把m唯一地扩张成$\mathscr{F}$上的测度.显然,限制在$\mathscr{P}$上$m=M_\mu$.容易验证m满足定理1.1.6中的条件.因此存在一可料随机测度υ,使得$m=M_\upsilon$.所以υ是可料σ-可积的,并且$\upsilon=\mu^p$.证毕.

1.1.9 定理 假设随机测度μ存在可料对偶投影,取$W\in\mathscr{F}^+$,使得$\upsilon=W.\mu$是可料σ-可积随机测度,则υ存在可料对偶投影

$\upsilon^p=U.\mu^p$,