数列方法与技巧

刘佛清 编著

华中工学院出版社

内 容 提 要

本书是根据中学数学教学大纲的内容，参考历年高考的要求，集作者多年教学经验和研究的成果编著而成。本书系统地阐明了等差数列、等比数列、阶差数列、分群数列、递推数列的概念、基本性质，及通项与前n项和的求法．此外，还深入浅出地介绍了各种数列不等式的证明方法，及数列极限的求法技巧．为了便于阅读理解，这些方法与技巧都是通过精选例题来阐述的．在每节的后面配有典型的习题，供读者练习，并附有解答提示．

本书可供在校高中学生阅读，是中学数学教师较好的教学参考书，也是自学青年、电视大学学生的良好读物．

数列方法与技巧

刘佛清　编著

责任编辑　李立鹏

华中工学院出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中工学院出版社印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：11.375　字数：258,000

1986年12月第一版　1986年12月第一次印刷

印数：1—3,000

统一书号：13255—063　定价：1.90元

前　言

数列是中学数学教材的重要组成部分，它是与高等数学密切衔接的内容。一个中学生，如果能够对数列的知识有比较全面的了解，那么毕业后无论是进入高等学校学习还是走自学成才的道路都是非常有益的。当前，提高数列的教学质量，培养数列方面的解题能力，已经成为有经验的老师十分重视的问题。为了帮助中学生和准备自修高等数学的青年学习数列知识，开阔视野，增强处理数列问题的能力，同时考虑到中学数学教学的实际需要，特编写了这本书。

全书共分四章：第一章数列通论，介绍了几种给定数列的常用方法，以及一般数列求通项、前 n 项和的基本方法；第二章等差数列和等比数列，系统地总结了这两种基本数列问题的解题方法，此外还介绍了高阶等差、等比数列和分群数列的概念及它们的求通项的方法；第三章递归数列，较全面地讨论了一、二阶线性递归数列、斐波那契级数、分式递归数列和线性组递归数列的通项及前 n 项和的求法；第四章数列不等式与数列极限，根据中学生的实际，在尽可能严谨的前提下，阐述了数列不等式的证明方法，以及求数列极限的常用方法。

本书在内容安排上，对数列有关的重要概念仅作了简要的叙述，而重点放在处理数列问题的方法和技巧上。为了容易被中学生接受，我们尽可能地通过典型的例子来阐明这些方法和技巧，希望读者在阅读过程中注意理解，仔细揣摸例题中揭示的解题规律和思想方法。为了及时巩固所学知识，在每一节后面都附有一定数量的习题，希望读者尽可能地选做多练，为以

后的进一步学习打下坚实的基础。

就作者的主观愿望而言，希望本书除了对高中学生和自学高等数学的青年有所帮助之外，对中学、中专、电大、函大的数学教师的教学也能有一定的参考作用。限于作者本人的水平，可能难于达到上述目的。另外，书稿又是在繁忙的教学和行政工作之余写成的，不妥之处，甚至错误的地方在所难免，诚恳地欢迎广大读者批评指正。

在编写本书的时候，作者曾经参考了许多书刊上的有关资料，谨向这些作者致以谢意。此外，我的同事周天尖、谢昭尚和李启炎等三位老师，为此书提过许多有益的意见和建议；谢昭尚和李启炎两位老师复核了书中的全部例题和习题；广东民族学院数理系主任陈银通副教授在百忙中对书稿作了全面的审阅。对于他们的热情关心和大力支持，谨表示衷心的感谢。

刘佛清　一九八六年六月于武汉

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 数列通论

§1 给定数列的方式

(一)基本概念

按照一定的规则排列起来的一列数

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

称为数列，用符号 $\{a_n\}$ 表示。其中 a_1 称为数列 $\{a_n\}$ 的**首项**，a_2 称为数列 $\{a_n\}$ 的第 2 项，$\cdots a_n$ 称为数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项。当 n 是指任意自然数时，a_n 又称为数列$\{a_n\}$的**通项**。

当一个数列的项数为有限的时候,称这个数列为**有限数列**，例如数列

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.$$

是有限数列。当一个数列的项数为无限时，称这个数列为无穷数列，例如由小至大排列起来的全体自然数数列

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$$

是无限数列。表示一个数列是无限数列时，必须在数列的结尾部分加上省略号“…”.本书在无特殊说明的情况下，数列 $\{a_n\}$ 指的是首项为 a_1 的无穷数列，而且各项都是实数。

若数列$\{a_n\}$ 的各项都相等，即

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = \cdots$$

则称数列$\{a_n\}$为**常数列**。数列$\{a_n\}$ 为常数列的充要条件是

$$a_n = a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

如果在数列$\{a_n\}$中，项数 n 与 a_n 具有如下的函数关系

$$a_n=f(n)\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

则这个函数关系称为数列$\{a_n\}$的**通项公式**。例如上述的自然数列的项数n与a_n具有函数关系$a_n=n$，因而自然数列的通项公式为

$$a_n=n\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

又比如，奇数数列

$$1,3,5,7,9,\cdots$$

项数n与a_n的函数关系为$a_n=2n-1$，因此数列的通项公式为

$$a_n=2n-1\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

同理，偶数数列

$$2,4,6,8,10,\cdots$$

的通项公式为

$$a_n=2n\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

如果项数n与和S_n有如下函数关系

$$S_n=g(n)\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

则这个函数关系称为数列$\{a_n\}$的**前n项和公式**。例如自然数列，因为它的前n项和

$$S_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

所以自然数列的前n项和的公式为

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

我们在学习数列的时候，一定要注意数列的两个特点：

（1）数列具有严格的顺序性，如果将数列中的两个不相同项进行互换，那么得到的数列与原数列是不相同的数列。

(2) 数字的排列必须具有一定的规则，不能把杂乱无章地排列起来的数称为数列.

(二) 给定数列的方式

当一个数列的项数不多时，可以把这个数列完整地写出来。例如，由 10 以内的自然数按从小到大顺序排列所组成的数列，可以写成数列 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9。当一个数列是无穷数列或项数较多的有穷数列时，就不能将所有项都写出来，而必须用组成数列的规律来给定数列.

我们认为，如果能够按照给定的规律，可以求出数列中的任何一项，那么尽管这个数列没有完整地写出来，但仍然可以说这个数列是给定的，下面介绍几种常用的给定数列的方式。

1. 说明式给定数列

我们先看一个数列.

$$1, 2, 5, 26, 676, \cdots.$$

如果问这个数列的第6项、第7项…是什么？那么回答可以是各种各样的，因而这个数列是不确定的. 之所以会出现这样的情况，原因在于给出的这个数列的构造规律不清楚，以致造成无法判断第 5 项以后的项该是什么. 但是，如果在这个数列的前面加上一段说明：从第 2 项起，每一项都是前面一项的平方加上1，那么数列的第 6 项等于 $676^2+1=456977$，第 7 项等于 $(456977^2+1)\cdots$，这时数列的任何一项都是确定的，因而这个数列也就是给定的了.

一般说来，如果只写出数列的前面几项，比如我们只写出前面 5 项：

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots \qquad ①$$

那么这个数列往往是不确定的，只有当给出这个数列的构造规

律时，这个数列才是确定的。因此，用形式①来表明一个数列$\{a_n\}$时，必须对数列的构造规律加以说明。例如，下面的数列：

（1）由小至大的全体质数组成的数列：

$$2,3,5,7,11,\cdots$$

（2）π的不足近似值，分别精确到$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{10^2}$，$\frac{1}{10^3}$，$\frac{1}{10^4}$，…所组成的数列：

$$3.1,3.14,3.141,3.1415,3.14159,\cdots.$$

因为这两个数列的构造规律是清楚的，所以这两个数列是给定的数列。比如在（1）中的数列，根据数列是“由小至大的全体质数组成”，因而可知数列的第6项是13、第7项是17，…；对于(2)中的数列也是一样，根据数列的构造规律，数列的第6项是3.141592，….

当一个数列不能用公式来表示时，常常使用上述的说明方式来给定数列，比如由质数组成的数列，它就是不能用公式来表示的数列。本书所研究的数列，都是可以用公式来表示的数列(或者根据构造规律可以列出公式来表示的数列)，这里我们不研究由质数组成的数列。

2. 用通项公式给定数列

如果知道了数列$\{a_n\}$的通项公式

$$a_n=f(n)\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

那么这个数列是给定的，而且给定的数列是

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ \cdots.$$

用通项公式给定数列，还可以写成下面的形式：

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ f(n),\ \cdots$$

其中$f(n)$是数列的通项，$a_1=f(1)$，$a_2=f(2)$，$a_3=f(3)$，

例1 写出下面数列的前6项：

(1) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=n(n-1)+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$
$$(n=1,2,3,\cdots);$$

(2) 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为

$$b_n=n(n-1)\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

解 (1) 根据数列的通项公式得

$$a_1=1\cdot(1-1)+(1-1)(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)=0,$$
$$a_2=2\cdot(2-1)+(2-1)(2-2)(2-3)(2-4)(2-5)=2,$$
$$a_3=3\cdot(3-1)+(3-1)(3-2)(3-3)(3-4)(3-5)=6,$$
$$a_4=4(4-1)+(4-1)(4-2)(4-3)(4-4)(4-5)=12,$$
$$a_5=5(5-1)+(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)(5-5)=20,$$
$$a_6=6(6-1)+(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)=150,$$

于是，数列的前 6 项是

$$0,\ 2,\ 6,\ 12,\ 20,\ 150,\ \cdots$$

(2) 仿照上述作法，数列 $\{b_n\}$ 的前6项是

$$0,\ 2,\ 6,\ 12,\ 20,\ 30,\cdots$$

此例说明，当两个数列的前面几项相同时，这两个数列可能不是同样的数列。这就是说，若只写出了数列前面的几项，这个数列是不确定的。

例2 已知数列 $\{a_n\}$：

$$-10,\ -19,\ -27,\ \cdots,\ \frac{n^2-21n}{2},\ \cdots$$

试问：(1) 是否存在分别等于 0 和 1 的项？若存在，则指出是哪一项。

(2) 在数列中是否有连续两项相等？若存在，则指出是哪两项。

解 (1) 显然，数列的通项是

$$a_n=\frac{n^2-21n}{2}\quad(n=1,2,3,\cdots0),$$

若数列中有等于 0 的项，则方程

$$\frac{n^2-21n}{2}=0$$

有正整数解，否则无等于0 的项。这个方程有两个解：$n=0$或$n=21$。因为 n 为正整数，故 $n=21$ 是适合条件的。因此，数列中存在等于 0 的项，且这个项是数列中的第21项。

同理，由于方程

$$\frac{n^2-21n}{2}=1$$

的解$n=\frac{21\pm\sqrt{449}}{2}$不是正整数，故数列中不含有等于 1 的项。

(2) 因为数列的第 $(n+1)$ 项

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}[(n+1)^2-21(n+1)]=\frac{1}{2}(n^2-19n-20),$$

而 a_n 与 a_{n+1} 是相邻的连续两项。所以数列中有连续两项相等的充要条件是方程

$$\frac{1}{2}(n^2-21n)=\frac{1}{2}(n^2-19n-20)$$

有正整数解。这个方程的解 $n=10$ 是正整数，因而此数列存在相等的连续两项，这两项是第10项和第11项。

一般地说，若数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=f(n)\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

那么，数列的第 k 项 $a_k=f(k)$。如果要判断数列中是否含有等于 a 的项，则通过方程

$$f(n)=a$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

的解来判断。当且仅当这个方程有正整数解时，数列中才有等于 a 的项。

例3 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n = 2^n - 2n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

试求：由此数列中的奇数项所组成的数列

$$a_1, a_3, a_5, a_7, \cdots, a_{2n-1}, \cdots \qquad ②$$

的通项公式。

解 因为自然数中的第 n 个奇数为 $2n-1$，故数列①的通项公式为

$$a_{2n-1} = 2^{(2n-1)} - 3(2n-1) + 1 = 2^{2n-1} - 6n + 4,$$

即

$$a_{2n-1} = 2^{2n-1} - 6n + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

一般地，若数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n = f(n) \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

则由此数列的奇数项组成的数列$\{a_{2n-1}\}$的通项公式为

$$a_{2n-1} = f(2n-1) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

由此数列的偶数项组成的数列$\{a_{2n}\}$的通项公式为

$$a_{2n} = f(2n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

例4 若数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n = \frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n] \quad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

试问：这个数列的各项是有理数还是无理数？

解 我们先来看数列的前面几项是什么数。

由数列的通项公式得

$$a_1 = \frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^1 + (2-\sqrt{3})^1] = 2,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^2 + (2-\sqrt{3})^2] = 7,$$

$$a_3=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^3]=26.$$

至此，我们可以猜想数列$\{a_n\}$的各项都是有理数，而且还是整数。下面用数学归纳法来证明。

当$n=1,2,3$时，由上述验证可知a_1,a_2,a_3都是整数。

设当$n\leqslant k(k\geqslant 3)$时$a_n$都是整数，当$n=k+1$时，因

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^{k+1}+(2-\sqrt{3})^{k+1}]\\&=\frac{1}{2}\{[(2+\sqrt{3})^k+(2-\sqrt{3})^k][(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})]-[(2+\sqrt{3})^k(2-\sqrt{3})\\&\quad+(2-\sqrt{3})^k(2+\sqrt{3})]\}\\&=\frac{1}{2}\{2[(2+\sqrt{3})^k+(2-\sqrt{3})^k]\\&\quad-[(2+\sqrt{3})^{k-1}(2^2-(\sqrt{3})^2)+(2-\sqrt{3})^{k-1}(2^2-(\sqrt{3})^2)]\}\\&=2\cdot\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^k+(2-\sqrt{3})^k]\\&\quad-\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^{k-1}+(2-\sqrt{3})^{k-1}].\end{aligned}$$

根据假设，$a_k=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^k+(2-\sqrt{3})^k]$和$a_{k-1}=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^{k-1}+(2-\sqrt{3})^{k-1}]$都是整数，因此$a_{k+1}$是整数。

所以，对于一切自然数n，$a_n=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n]$是整数，因而数列$\{a_n\}$的各项都是有理数。

3. 利用递推公式给定数列

公元1228年，意大利著名数学家斐波那契，在他写的《算盘书》中，提出了一个有趣的问题，大意是这样的：将一对兔子围在一块场地里让它繁殖，假定这一对兔子一个月后每月生

一对兔子，而生下来的小兔子经过两个月后每月也生一对小兔，问经过 n 个月后这场地里有多少对兔子？根据题中的假设，可知第一个月场地里有一对兔子；第2个月有2对；第3个月有3对；第四个月时，因第2个月生下来的兔子开始繁殖，因此共有5对；第5个月时，因第3个月生下来的兔子也开始繁殖，所以共有8对…，于是得到由各个月份的兔子数(以对为单位)组成的数列：

$$1,2,3,5,8,\cdots, \qquad ③$$

求第 n 个月的兔子对数，就是求这个数列的第 n 项，即求这个数列的通项。如果用 a_n 来表示第 n 个月场地里的兔子的对数，则

$$a_1=1, \quad a_2=2. \qquad ④$$

且任意连续3个月之间的兔子对数有如下关系：

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n=1,2,3,\cdots), \qquad ⑤$$

这就是数列③的构造规律。

因此，斐波那契提出的兔子问题，实际上是一个数列问题，而且数列是由条件④和公式⑤给定的。为了纪念斐波那契在数学上的伟大贡献，人们把由公式⑤确定的数列 $\{a_n\}$ 称为**斐波那契数列**(又称斐波那契级数)。关于求斐波那契数列的通项问题，我们在第三章中再作详细介绍。

一般地说，如果知道数列 $\{a_n\}$ 的前 s 项的值

$$a_1=b_1, \quad a_2=b_2, \quad \cdots, \quad a_s=b_s, \qquad ⑥$$

同时又知道任意的连续的 $(S+1)$ 项的关系式

$$a_{n+S}=f(a_{n+S-1}, a_{n+S-2}, \cdots, a_n, n), \qquad ⑦$$

$$(n=1,2,3,\cdots)$$

那么这个数列 $\{a_n\}$ 是确定的，其中⑥式称为数列 $\{a_n\}$ 的**初始值**，公式⑦称为数列 $\{a_n\}$ 的**递推公式**。

用递推公式⑦求数列 $\{a_n\}$ 中的各项时，按照下列方法进行：

在公式⑦中，令 $n=1$，得

$$a_{s+1}=f(a_s, a_{s-1}, \cdots, a_1, 1),$$

将初始值 $a_1=b_1$，$a_2=b_2, \cdots, a_s=b_s$ 代入，求得第 $s+1$ 项 a_{s+1}；

在公式⑦中，令 $n=2$，得

$$a_{s+2}=f(a_{s+1}, a_s, a_{s-1}, \cdots, a_2, 2).$$

将 a_2、a_3、$a_4, \cdots$，a_s, a_{s+1} 的值代入，求得第$(s+2)$项 a_{s+2}；

在公式⑦中，令 $n=3$，得

$$a_{s+3}=f(a_{s+2}, a_{s+1}, \cdots, a_3, 3).$$

将 a_3、$a_4, \cdots, a_s, a_{s+1}, a_{s+2}$ 代入，又可求得第 $(s+3)$ 项的值 $a_{s+3}, \cdots$，如此继续作下去，即可求出 $a_{s+4}, a_{s+5}, a_{s+6}, \cdots$。

例1 在数列 $\{a_n\}$中，若 $a_1=1$、$a_2=-1$，且

$$a_{n+2}=\frac{4a_{n+1}-n^2a_n}{3a_{n+1}+a_n}\ (n=1, 2, 3, \cdots),$$

求数列的前5项。

解 $\because$ $a_1=1$，$a_2=-1$，

$$\therefore\ a_3=\frac{4a_2-1^2\cdot a_1}{3a_2+a_1}=\frac{4\cdot(-1)-1^2\cdot 1}{3\cdot(-1)+1}=\frac{5}{2},$$

$$a_4=\frac{4a_3-2^2\cdot a_2}{3a_3+a_2}=\frac{4\cdot\frac{5}{2}-2^2(-1)}{3\cdot\frac{5}{2}+(-1)}=\frac{28}{13},$$

$$a_5=\frac{4\cdot a_4-3^2\cdot a_3}{3a_4+a_3}=\frac{4\cdot\frac{28}{13}-3^2\cdot\frac{5}{2}}{3\cdot\frac{28}{13}+\frac{5}{2}}=-\frac{361}{233}.$$

若数列是由递推公式给定的，求数列中指定的某一项时，要按照顺序逐项逐项求，一般不能直接求出数列中的任意指定的项。

例2 已知递推公式

$$a_{n+3}=2a_{n+2}-a_{n+1}+3a_n+(2n-1)\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

试求：(1) 当 $a_1=0$、$a_2=a_3=1$ 时数列的前 6 项；

(2) 当 $a_1=a_2=1$、$a_3=0$ 时数列的前 6 项。

解(1) $\because a_1=0, a_2=1, a_3=1,$

$$\therefore a_4=2a_3-a_2+3a_1+(2\cdot1-1)=2\cdot1-1+3\cdot0+1=2,$$

$$a_5=2a_4-a_3+3a_2+(2\cdot2-1)=2\cdot2-1+3\cdot1+3=9,$$

$$a_6=2a_5-a_4+3a_3+(2\cdot3-1)=2\cdot9-2+3\cdot1+5=24.$$

(2) $\because a_1=1, a_2=1, a_3=0,$

$$\therefore a_4=2a_3-a_2+3a_1+(2\cdot1-1)=2\cdot0-1+3\cdot1+1=3,$$

$$a_5=2a_4-a_3+3a_2+(2\cdot2-1)=2\cdot3-0+3\cdot1+3=12,$$

$$a_6=2a_5-a_4+3a_3+(2\cdot3-1)=2\cdot12-3+3\cdot0+5=26.$$

此例说明，对于同一个递推公式，当初始值不同时，得到的数列是不相同的。反之，若初始值相同，而递推公式不同，则其数列也是不相同的。因此，给定一个数列时，初始值和递推公式两者不可缺一。

一般说来，由递推公式是不可能直接得到数列的通项公式的。但是，由于递推公式反映了数列的组成规律，因而可以利用递推公式来证明数列的有关性质。下面举例说明。

例3 若数列 $\{a_n\}$ 满足下列条件

$$a_1=a_2=1,\quad a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\quad(n=1,2,3,\cdots), \qquad ⑧$$

求证：(1) $a_{n+2}=a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}$,

(2) $a_{2n}=a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}$.

证明 (1) 由递推公式

$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$，令 $n=1,2,3,\cdots$得

$a_1=a_3-a_2$，$a_2=a_4-a_3$，

$a_3=a_5-a_4,\cdots$，$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$.

将以上各式等号的两边分别相加，得

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_{n+2}-a_2,$$

$\because a_2=1$，$\therefore a_{n+1}=a_1+a_2+\cdots+a_n+1$.

(2) 由递推公式⑧得 $a_{n+1}=a_{n+2}-a_n$，令 $n=2,4,6,\cdots(2n-2)$，得

$$a_3=a_4-a_2,\quad a_5=a_6-a_4,$$

$$a_7=a_8-a_6,\cdots,a_{2n-1}=a_{2n}-a_{2n-2}.$$

又 $$a_1=a_2,$$

将上述式子等号两边分别相加，得

$$a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{2n-1}+a_1=a_{2n},$$

即

$$a_{2n}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}.$$

例4 在数列$\{a_n\}$中，若

$$a_n\neq-1,$$

$$a_{n+1}=\frac{1-a_n}{1+a_n}(n=1,2,3,\cdots),$$

求证： $$a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{2n-1}=\cdots,$$

$$a_2=a_4=a_6=\cdots=a_{2n}=\cdots.$$

证明 由递推公式得

$$a_{n+2}=\frac{1-a_{n+1}}{1+a_{n+1}}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com