數學之謎

盧月生編著 · 萬里書店出版

數 學 之 謎

盧月生編著

香 港 萬 里 書 店 出 版

數 學 之 謎

盧 月 生 編 著

出 版 者：萬 里 書 店
香 港 北 角 英 皇 道 486 號 三 樓
電 話 ： 5-632411 & 5-632412

承 印 者： 劢 華 文 化 服 務 社
九龍觀塘偉業街一一六號二樓

定 價：港 幣 四 元 四 角

（一 九 七 六 年 十 一 月 版）

前　言

近年來，中學數學的教學內容與教學方法，都發生了重大的變化，數學教科書中引入了許多新的內容，它們大部分均着重鼓勵學生的數學思想，而不着重運算技術。這些新的內容，是以前的數學教科書中所沒有提到的，所以，學生和學生家長對它們都感到很陌生。

不過，許多數學教科書中的這些新內容，常常是一開始即轉入正題，而且枯燥無味，未能引起同學們的興趣。本書以有趣的數學之謎爲題材，初步介紹這方面的知識，以幫助讀者對數學的理解。這些新的數學內容，是由實踐中發展而來，並非抽象和難以捉摸，從而提高讀者對數學內容的興趣，激發讀者對各種現實問題多運用數學方法以求解答。

學海無涯，筆者學識有限，如有錯誤不當之處，尚望讀者批評指正。

盧　月　生

一九七六年秋於九龍

目　　次

一、有趣的數學之謎

八進位制的問題

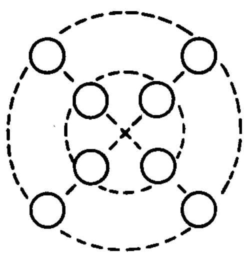
請你小心核對一下下述加數的總和好嗎？

$$\begin{array}{r} 47 \\ +25 \\ \hline 74 \end{array}$$

在這裏應該說，這答案是正確的！爲什麼？因爲這是八進位制的計算法。

在下述的圖形中，應該如何把由 1 至 8 的數字填入圓圈中，然後每一圓周上各數的總和，等於每一直線上各數的總和呢？

圖 1



我們對於上述諸如此類謎一般的問題的反應，通常是尋求答案。然而對於數學之謎常常不僅尋求答案而已，在解決了問題之後，還要研究一下這答案是怎麼算出的，它是否是唯一的答案，可得什麼推論等，這就擴大了我們由個別問題深入至解答技術的觀察力。其次，在着手解答之前，考慮一下什麼種類的數學知識是必須應用的，與及在解答之際，牽涉到什麼數學，這不僅可明瞭解答的技術，而且能對原理作出正確評價。在找到答案之後，考慮一下這問題是否就是完結了呢？在尋求答案之際，經常會發生某些方面的困難，值得進一步研究；或者這問題或它的答案，可能暗示有必要深入一層研究類似的情形。

上述的前兩點，是闡明前述兩個問題在解答的情形。通常，當面對着如第一個謎的加數，我們開始計算 7 加 5 得 12。於是，我們寫 2 在右邊的一行，而將 1 進於左邊一行。因此，左邊的一行加起來便是 7。雖然左邊一行的和 7 符合謎中所示，但是右邊一行的和數 2 却不是謎中所示的 4 。

我們之所以說74的答案是正確，其秘密是在於所用的進位制（數的基礎）不同。一般來說，我們計算時習慣用十進制。在這個問題中，右邊兩個個位數的和比用十進制的多 2 ；所以，所用的進位制必然比10少 2 ，亦即是 8 。如果你仍然不明白，可以將左右兩行數分別當作是加侖（Gallon）與品脫（Pint），根據 1 加侖等於 8 品脫，然後把數目相加，就會明白了。

關於第二個謎，在尋求解答時，首先要認識到 1 至 8 的八個數字加起來的總和是36，並且每一個圓周上和每一

條直線上各有四個數字。因此，按照題意，每一圓周上和每一直線上四個數的總和都應該是18。至此，問題便簡化成爲如何去安排這些數字了。

	加侖	品脫
	4	7
8 進位制	2	5
	7	4

	4	7
10進位制	2	5
	7	2

圖 2

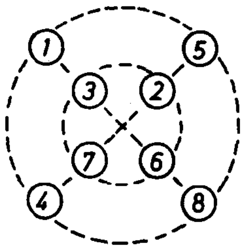


圖 3

圖 3 所示就是這問題的答案。

然而圖 3 的數字排列法顯然不是唯一的答案，讀者們很容易可以找到其他的答案。

如何決定切開的金鏈圈數

在解答問題時，也許已經得到了一個或多個答案，但

是，問題就這樣完結了嗎？讓我們看看下面一個謎作爲例子：

王夫人手頭拮据，決定到押店去典當她的金鏈。她的金鏈是由七個金圈連環扣在一起組成的。然而她並不須立即拿整條金鏈去押，她只是一連七日每日需要全部金錢的七分之一。爲此，押店老板說，她可以每日取一個金圈作爲借欵的抵押。因此，將金鏈的金圈切開是必須的，但王夫人希望盡可能少切開金圈。那麼，最少應切開幾個金圈才可以呢？

對於這個問題，一旦你認識到王夫人不必每日留下前日曾留下的金圈在押店中，答案就很容易找了；她所必須做到的，僅是第一日留下一個金圈，第二日留下二個，第三日留下三個，等等。要這樣做，而又不用把全部金圈切開的方法是，她只須切開由金鏈的一端數起的第三個金圈就可以了。這樣切開之後，她便有單獨一個的金圈（切開的一個），兩個金圈扣在一起的一段金鏈和四個金圈扣在一起的一段金鏈，見圖 4 (a)。

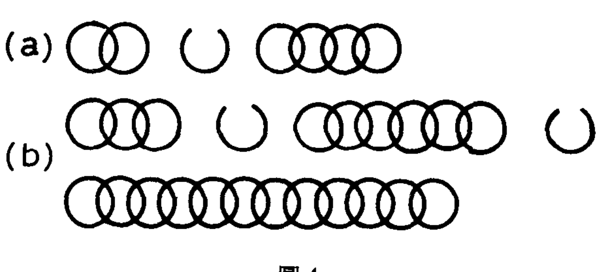


圖 4

第一天，她拿那切開的單個金圈給押店作抵押。第二天，她拿那兩個扣在一起的金圈給押店，而取回前日給押店抵押的那單個金圈。第三天，她又持那單個金圈給押店。第四天，她將四個金圈扣在一起的一段金鏈給押店，並取回前日留下的三個（兩個扣在一起的和一個單的）金圈……等等。

在某種意義來說，這謎肯定地已經解决了，問題已經完結了。然而我們可以將這問題擴大，再進一步提出類似的問題，假如有李夫人亦缺欵用，她有較長的金鏈，如用作逐日借欵的抵押，那麼，她的金鏈最多能有多少個金圈，使她只須切開兩個金圈，便可獲得最長的連續借欵日數呢？明顯地，兩個切開的圈，可以將三段鏈扣在一起；我們所必須確定的是，這三段鏈的每一段的金圈數目是多少，才可讓李夫人逐日留下增多一圈的金鏈於押店，而得到最大的借欵日數。

我們首先考慮兩個已切開的金圈，單是這兩個，可使李夫人押一個或兩個金圈在押店內。因此，她必然有一段三個扣在一起的金鏈，連同那兩個單的，可使她逐日增多一個金圈，直至五個金圈都拿到押店爲止。如此一來，她的第二段金鏈將必然是六個金圈扣在一起的。利用這一段金鏈和以前五個的一段及兩個單的，她就可以逐日增加一金圈，直至十一個金圈都押在押店。因此，她的第三段金鏈，將必然是十二個金圈扣在一起的。利用這一段金鏈和以前的兩段及兩個單的，她便可逐日增加一金圈，直至二十三個金圈都押在押店爲止。這就是說，李夫人的金鏈應

該如圖 4 (b)所示:

兩個切開的金圈; 三個扣在一起的金圈; 六個扣在一起的金圈; 十二個扣在一起的金圈, 全部合共二十三個金圈。

然而這謎可以說仍未結束。迄今, 我們已有如下的最大值:

7 圈的鏈切開一個, 可以組合成由 1 至 7

2 3 圈的鏈切開二個, 可以組合成由 1 至 2 3

假如現時又有陳夫人、洪夫人有更長的金鏈, 分別切開三個和四個圈又如何呢? 要解答這問題, 我們最好將問題簡單化 。 我們不說切開三個或四個圈 , 而是說切開 n 個; n 是代表任何個數。這問題於是變成:

有一條鏈, 在此鏈中切開 n 個圈, 則此鏈最長應有多少個圈, 才可作成逐日增加一圈抵押的最大日數?

如果我們回過頭去看看上述王夫人和李夫人的問題, 我們就會知道, 第一段鏈必然是含有比切開的圈數多一個圈的。因此 , 顯而易見 , 在我們現在這個一般化的問題中, 如果有 n 個切開的圈, 我們就可以留下任何由 1 直至 n 個數目的圈於押店中, 而第一段的鏈必然是 n + 1 個圈扣在一起 。 利用這段鏈與 n 個切開的圈一起 , 就可使我們留下由 1 直至 n + (n +1) 個圈爲止的任何圈數於押店中。 於是 , 第二段的鏈就必然有比 n + (n + 1)多 1 的圈, 即是 n + (n+1) + 1 , 或 2 n+ 2 個圈 (令 n = 2 , 可將之與李夫人的情形核對)。

現在利用第一段、第二段和 n 個切開的圈, 我們可以

留下由1直至$n+(n+1)+(2n+2)$個圈，亦即$4n+3$個圈爲止的任何數目的圈於押店中。類似地第三段的鏈必然是$4n+4$個圈，而所能留下的圈必然是由1直至$n+(n+1)+(2n+2)+(4n+4)$；第四段的鏈必然是$8n+8$個圈，而所能留下的圈必然是由1直至

$$n+(n+1)+(2n+2)+(4n+4)+(8n+8)$$

亦即$n+(n+1)+2(n+1)+4(n+1)+8(n+1)$

此式由第二項起，各項的常數是前一項常數的兩倍，即1，2，4，8，等等；這是一個幾何數列。這樣一個幾何數列的總和可以使用如下一個很易證明的公式而求得：

$$總和=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

這式中的a是幾何數列的首項，r是公比（在上述的幾何數列是2），而n則是幾何數列的項數。在我們所考慮的謎中，由於n個切開的圈，可以聯結$n+1$段鏈，所以，最後所能留下於押店的最大圈數的式子，其$(n+1)$的項數必爲$(n+1)$項，亦即是它的各項常數組成的幾何數列共有$(n+1)$項。因此，在我們這個謎中，1，2，4，8直至第$(n+1)$項的總和是$\frac{1(2^{n+1}-1)}{2-1}$即$2^{n+1}-1$，而鏈的最大圈數便可由下式而得：

$$n+(2^{n+1}-1)(n+1)$$

假如令$n=1$，則上式可寫成$1+(2^{1+1}-1)(1+1)$，即$1+6$，亦即7，這就是前述王夫人金鏈的最大圈數。如令$n=2$，其結果是23，是前述李夫人金鏈的最大圈

數。對於陳夫人的金鏈而言，如切開三個金圈，那麽，n便是 3，由上式可得最大的金鏈圈數是63個。

兩個有趣的數學之謎

我們已經詳細談過幾個有趣的數學之謎，現在，下面有兩個有趣的謎，請讀者自己去思索尋求答案：

（一） 監督員何先生，試圖從三個嫌疑犯中找出眞正的罪犯。他知道犯罪者只是一個人，而且他知道，每一個犯人都說了一句眞話和一句假話。這三個嫌疑犯是甲、乙和丙，他們每人所說的兩句話分別如下：

甲說：「我沒有幹這件事，乙沒有幹這件事。」

乙說：「我沒有幹這件事，丙沒有幹這件事。」

丙說：「我沒有幹這件事，我不知道誰幹這件事。」

何先生應該逮捕那一個呢？（提示見 85 頁，答案見 98 頁。）

（二） 四間公司，每一間有兩個董事，在三次會議的每一次會議中，每一間公司都派一個董事出席。在第一次會議中，四名出席的董事分別是甲、乙、丙、丁。在第二次會議中，出席的四名董事是戊、乙、己和丁。在第三次會議中，出席的四名董事是甲、戊、乙和庚。全部三次會議期間，辛董事都是臥病在床。請找出每一間公司的兩個董事。（提示見 85 頁，答案見 98 頁。）

二、1 + 1 = 10

簡單的二進位制

上一章所談的第一個問題，是數的基礎（Number bases）的練習。我們慣用的基數是十；換言之，我們計數是逢十進一。我們之所以慣用十進位制，據說是因爲我們每一個人都有十隻手指。

在十進制中，我們有十個數字以構成一切的數目。這十個數字即由 1 至 9 及 0。在九進制中，只有九個數字構成一切數目，即由 1 至 8 及 0。在八進制中，只有八個數字構成一切數目，即由 1 至 7 及 0，等等。總而言之，在任何進位制中，它構成一切數目的數字，不會超過這系統的基數。牢記這些，對於明瞭數的系統是很重要的。

假如我們寫一個數目，比方說 425，右端的數字「5」，表示 5 單位，它左鄰的數字「2」，是代表基數的二倍，即代表以基數乘 2，而左端的數字「4」，是代表基數的平方。如果基數是十，那麼，按照解釋，這個數目是

$$5\text{ 單位} + (2 \times 10) + (4 \times 10^2)$$

如果這數目是以七爲基數的，則它將是

$$5+(2\times 7)+(4\times 7^{2})$$

其所以如此的理由，是因爲左方的數，達到基數的數目時，便要向右方進 1。

假如基數是 n，亦即 n 進位制，那麼，425 的數目便是

$$5+2n+4n^{2}$$

最簡單的進位制是二進位制，它的基數是二；因此，只有兩個數字，1 和 0。下面是應用二進位制的簡單的重複加數，以一開始，而且每次加一；其相應於二進制的和的十進制數目，則寫於其右以作對照：

$$
\begin{array}{rl}
1 & \\
1 & \\ \cline{1-1}
10 & \qquad (2)\\
1 & \\ \cline{1-1}
11 & \qquad (3)\\
1 & \\ \cline{1-1}
100 & \qquad (4)\\
1 & \\ \cline{1-1}
101 & \qquad (5)\\
1 & \\ \cline{1-1}
110 & \qquad (6)\\
1 & \\ \cline{1-1}
111 & \qquad (7)\\
1 & \\ \cline{1-1}
1000 & \qquad (8)\\
1 & \\ \cline{1-1}
1001 & \qquad (9)
\end{array}
$$

圖 5 由右至左，依次每一行中的數字 1，2，4，8，16，32，64，128 等等，都是代表二進位制依次由右至左每一位置中的 1。

128	64	32	16	8	4	2	1

圖 5

類似地，基數爲 3 的三進位制，由右至左依次各位置中的 1 ，其相應的十進制的數字依次如下面圖 6 所示，是 1，3，9，27，81，243，729 等等。

729	243	81	27	9	3	1

圖 6

這顯示，我們可以將任何進位制的數目，轉變成爲我們慣用的十進位制的數目。例如，基數爲 5 的 413 ，在十進制中將是

$$3+1\times5+4\times5^2=3+5+100=108(\text{基數}10)$$

近年來，數的基礎愈來愈引起人們的興趣。在教育界中，這樣的原因是由於認識到，如果兒童學習各種基數的數字計算，則他們對加、減、乘、除所蘊藏的原理會有較深的了解。此外，對數的基礎，特別是對二進位制增加興趣的另一原因，是由於計算機的廣泛使用。計算機是憑藉着由