哈家定　辛克泰　编著

数学概念 方法和技巧

山东教育出版社

数学的概念、方法和技巧

哈家定　辛克泰　编著

*

山东教育出版社出版

（济南经九路胜利大街）

山东省新华书店发行　　山东人民印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　31.25印张　670千字

1988年10月第1版　　1989年3月第1次印刷

印数1—1,700

ISBN 7—5328—0670—7/G·564

定价 8.20 元

序

作为一个中学生，在数学学习中，最主要的要解决三个问题，即牢固掌握基础知识，熟练掌握基本方法，逐步形成数学能力。所谓数学的基础知识，其中最主要的是数学概念；所谓数学能力，主要表现为得心应手、应用自如的解题技巧。

由于职业的原因，几年来，我一直希望能找到一本适合中学生阅读的比较理想的辅助读物，作为老师的助手，帮助学生解决以上问题。当我看到哈家定老师和辛克泰老师合写的《数学的概念、方法和技巧》一书的书稿时，心情十分高兴。哈家定和辛克泰两位老师是特级数学教师和省优秀数学教师，多年来一直从事数学教育，潜心研究数学教学规律，有着丰富的教学经验。这本书就是他们根据自己多年的教学经验和对学生的了解而写成的，具有较强的针对性，是高中学生比较理想的一本数学学习辅助读物。

这本书完全按现行统编教材的章节顺序进行编写，根据每章中学生应该掌握，又较难掌握的最基本的概念和方法，要形成的主要能力，通过典型例题的剖析和讲解，说明概念的真谛，指出解题方法的普遍性和处理特殊问题的技巧性。为满足学有余力的同学的需要，每章之末都有几个难度较大的例题，它对于开拓学生的思路，提高学生的解题能力，不无益处。

我相信，这本书将对高中同学的数学学习起到一定的促进作用，并产生良好的效果。

王恩大

1988年9月

前　言

多年的教学经验使我们深感高中学生要学好数学，非常需要一本能够配合课本进度的辅助读物。同学们通过自己阅读，加深对一些重要概念的理解，解决学习中的疑点，掌握解题方法和解题技巧。本书就是为满足这个需要而写的。

本书主要通过例题来讲解概念上的疑难点，通过例题来说明解题的方法和技巧。书中对例题的安排和讲解，既考虑到程度低的同学易于理解，又考虑到程度高的同学能学有所得，因此本书特别注意在概念的讲解方面深入浅出、重点突出，在解题方法方面清晰明白、易于掌握，在解题技巧方面灵活自然、适用面宽。

本书的第一篇代数由哈家定编写，第二篇立体几何和第三篇平面解析几何由辛克泰编写。

由于我们的水平不高，错误和疏漏定有不少，敬请读者给以指导。

哈家定　辛克泰

1988年9月

目　　录

第一篇　代　　数

第一章　幂函数、指数函数和对数函数……………………1
　　自测题一……………………………………………………70
第二章　三角函数………………………………………………74
　　自测题二……………………………………………………130
第三章　两角和与差的三角函数………………………………134
　　自测题三……………………………………………………203
第四章　反三角函数和简单三角方程…………………………206
　　自测题四……………………………………………………255
第五章　数列与数学归纳法……………………………………257
　　自测题五……………………………………………………333
第六章　不等式…………………………………………………337
　　自测题六……………………………………………………385
第七章　行列式和线性方程组…………………………………389
　　自测题七……………………………………………………412
第八章　复　数…………………………………………………417
　　自测题八……………………………………………………463
第九章　一元多项式和高次方程………………………………466
　　自测题九……………………………………………………487
第十章　排列、组合和二项式定理……………………………490

自测题十……525
第十一章 概 率……528
自测题十一……544

第二篇 立体几何

第一章 直线和平面……548
自测题一……638
第二章 多面体和旋转体……642
自测题二……704
综合练习题……708

第三篇 平面解析几何

第一章 直 线……713
自测题一……755
第二章 圆锥曲线……758
自测题二……831
第三章 参数方程、极坐标……835
自测题三……903
综合练习题……908
答案与提示……913

第一篇　代　　数

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

例1　以下集合表示法对吗？若对，说明它是什么样的集合，若不对，把它改成正确的写法：

（1）$A=\{$某校某班座位在前面的同学$\}$；

（2）$B=\{1, 2, 3, 3\}$；

（3）$C=\{\{1, 2\}, \{2, 1\}, 3\}$；

（4）$D=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$；

（5）$E=\{5, \sqrt{2}, \pi, \{$铅笔$\}\}$。

解：（1）不对。由于“前面”的标准不明确，所以元素不确定。只要规定一种标准即可。例如改成$A=\{$某校某班座位在第一排、第二排的同学$\}$。

（2）不对。3与3是相同的。应改成$B=\{1, 2, 3\}$。

（3）不对。$\{1, 2\}$与$\{2, 1\}$是相同的，所以应写成$C=\{\{1, 2\}, 3\}$。

（4）不对。集合内的“…”不知道是什么数可以改成$D=\{x | x=2n-1, n\in N\}$。

（5）对。这个集合的元素是数5、$\sqrt{2}$、π以及所有各种铅笔的集合。

【讲解】

集合中的元素必须符合四条原则：

（1）确定性。元素的意义或性质必须是确定的，不能含糊不清，如上面的第(1)、(4)小题这样。任何一个对象或者是给定集合的元素，或者不是它的元素。

（2）无序性。集合内元素书写不考虑顺序，顺序不同，元素相同的集合认为是相同的集合，如上面的第(3)小题。

（3）互异性。集合内元素不能相同，如上面第(2)、(3)小题。

（4）任意性。任何确定的具体的事物都可以做集合内的元素。

例2 以下两个命题对不对？若对，说明为什么，若不对，试举出反例：

（1）如果集合A是集合B的子集，那么集合A中的任何一个元素必定是集合B中的元素。

（2）空集ϕ是任何一个集合的真子集。

答：（1）不对。例如空集ϕ是空集ϕ的子集，但空集中没有元素，因此"任何一个"也就没有意义。这个命题的逆命题是对的。

（2）不对。例如空集ϕ不是空集ϕ的真子集。

【讲解】

（1）子集的定义包括两个内容：

①对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集。

②空集是任何集合的子集。

说"集合A是集合B的子集"就应包含上述这两种含义。

由此可知，A可能是非空集也可能是空集。不可只考虑一种情况而忽略另一种情况。

（2）真子集的定义是：如果A是B的子集，并且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的真子集。可见，如果A是B的真子集，那么不论A是否含有元素，B是必须含有元素的。所以空集是非空集合的真子集，不是空集的真子集。

例3 （1）写出以集合$\{0, 1, 2, 3\}$的子集为元素的集合。

（2）集合$\{\phi, 0, 1, 2, 3\}$与集合$\{0, 1, 2, 3\}$是否一样？

解：（1）所求集合是

$\{\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$。

（2）两者不一样，前者有ϕ为元素，后者没有。

【讲解】

（1）一个非空集合的子集可以有空集、由一个元素构成的集合、两个元素构成的集合、…，如果这个集合有n个元素（n为自然数），那么它的子集共有2^n个（这个结论要利用二项式定理推出，这里不作证明）。例如$\{0, 1, 2, 3\}$共有4个元素，所以它的子集共有$2^4=16$个。

（2）写子集时要避免重复与遗漏。

（3）ϕ是$\{0, 1, 2, 3\}$的子集，但ϕ不是$\{0, 1, 2, 3\}$的元素。ϕ是$\{\phi, 0, 1, 2, 3\}$的子集，又是

它的一个元素。它所有的子集组成的集合是：

$\{\phi,\ \{\phi\},\ \{0\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{\phi,\ 0\},\ \{\phi,\ 1\},\ \{\phi,\ 2\},\ \{\phi,\ 3\},\ \{0,\ 1\},\ \{0,\ 2\},\ \{0,\ 3\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 3\},\ \{\phi,\ 0,\ 1\},\ \{\phi,\ 0,\ 2\},\ \{\phi,\ 0,\ 3\},\ \{\phi,\ 1,\ 2\},\ \{\phi,\ 1,\ 3\},\ \{\phi,\ 2,\ 3\},\ \{0,\ 1,\ 2\},\ \{0,\ 1,\ 3\},\ \{0,\ 2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 3\},\ \{\phi,\ 0,\ 1,\ 2\},\ \{\phi,\ 0,\ 1,\ 3\},\ \{\phi,\ 0,\ 2,\ 3\},\ \{\phi,\ 1,\ 2,\ 3\},\ \{0,\ 1,\ 2,\ 3\},\ \{\phi,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}\}$，共有$2^5=32$个元素。

例4 已知集合A、B，试用韦恩图画出$\overline{A\cap B}$与$\overline{A}\cup\overline{B}$你能发现它们有什么关系？证明你的结论（画图时以$A$、$B$相交为代表）。

解：

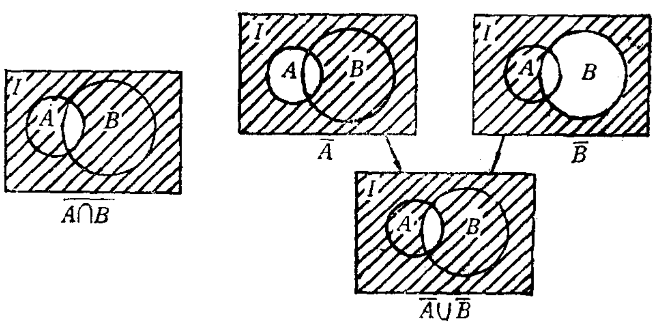

图1—1

如图1—1，可见$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

证明：（1）若$\overline{A\cap B}\neq\phi$，设$a\in\overline{A\cap B}$，$\therefore a\notin A\cap B$，

$\therefore a \notin A$或$a \notin B$，$\therefore a \in \overline{A}$或$a \in \overline{B}$，$\therefore a \in \overline{A} \cup \overline{B}$，$\therefore \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$。

反之，设$b \in \overline{A} \cup \overline{B}$（$\overline{A} \cup \overline{B}$一定是非空集，因为如果$\overline{A} \cup \overline{B} = \phi$，则$\overline{A} = \phi$且$\overline{B} = \phi$，$\therefore A = I$且$B = I$，$\therefore A \cap B = I$，$\therefore \overline{A \cap B} = \phi$，矛盾。），$\therefore b \in \overline{A}$或$b \in \overline{B}$，$\therefore b \notin A$或$b \notin B$，$\therefore b \notin A \cap B$，$\therefore b \in \overline{A \cap B}$，于是$\overline{A \cap B} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$。

所以有$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$。

（2）若$\overline{A \cap B} = \phi$，则$A \cap B = I$，$\therefore A = I$且$B = I$，$\therefore \overline{A} = \phi$，$\overline{B} = \phi$，$\therefore \overline{A} \cup \overline{B} = \phi$，所以仍有$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$。

【讲解】

（1）一个元素如果属于集合A，它必定不属于$\overline{A}$。反之，如果它属于$\overline{A}$，那么它必定不属于A。这个由补集定义所规定的性质，在解与补集有关的命题时是时常用到的。

（2）由所有属于集合A或属于集合B的元素组成的集合叫做A与B的并集，用$A \cup B$表示。所以$A \cup B$中含有A、B中的所有元素。

由所有属于A且属于B的元素组成的集合，叫做A、B的交集，用$A \cap B$表示。所以$A \cap B$中的每一个元素既在A中又在B中。

（3）如果$A \subseteq B$，同时$B \subseteq A$，那么$A = B$。所以要证两个集合相等，一般来说，要分这两个步骤。对于非空集合相等的证明，这两个步骤不可少。对于空集的相等或全集的相等，由于比较明显，所以这两个步骤可以省略。

（4）我们遇到用A、B之类的字母表示的集合时，作为一般的字母表示，不要忽略它们有非空集与空集两种可能，很容易忽略空集的情况。

例5 已知$A=\{x|x=2n+1, n\in Z\}$，$B=\{x|x=3n+2, n\in Z\}$，求$A\cap B$。

解法 1：$A\cap B$中的数x适合①$x=2n+1$且②$x=3m+2$（n、$m\in Z$），即数x被 2 除余 1 而且被 3 除余 2 。

我们在适合②式的数中找出被 2 除余 1 的数。由于在$3m+2$中第二项能被 2 整除，所以只要第一项被 2 除余 1 即可。

令$m=2k+t$（$k\in Z$，$t=0$或1），那么

$$x=3(2k+t)+2$$
$$=6k+2+3t。$$

由于第一项、第二项都能被 2 整除，所以只要$3t$被 2 除余1即可。因为$t=0$或1，所以应取$t=1$，因此$x=6k+5$，即$A\cap B=\{x|x=6k+5, k\in Z\}$。

解法 2：用上面的①、②式，由①×③－②×②得

$$x=6(n-m)-1$$
$$=6(n-m-1)+5$$
$$=6k+5(k=n-m-1)。$$

反之，凡$x=6k+5$（$k\in Z$）的数被 2 除必余 1，被 3 除必余 2 。所以$A\cap B=\{x|x=6k+5, k\in Z\}$。

解法 3：由①、②式可知$x+1$既能被 2 整除又能被 3 整除，故能被 6 整除，因此$x+1=6k$（$k\in Z$），即$x=6k-1$，所以$A\cap B=\{x|x=6k-1, k\in Z\}$。显然，这里交集的表达形式与前面形式本质是一样的。

【讲解】

（1）全体整数可根据除数和余数来分类：

用 2 除，整数可分为两大类：偶数与奇数，即被 2 除余

0（整除）、1两类。它们分别可以表示成

$$2n、2n+1\ (n\in Z)。$$

用3除，整数可分为三大类：被3除余0（整除）、1、2三类。它们分别可以表示成

$$3n、3n+1、3n+2\ (n\in Z)。$$

用4除，整数可分为四大类：被4除余0（整除）、1、2、3四类。它们分别可以表示成

$$4n、4n+1、4n+2、4n+3\ (n\in Z)。$$

一般来说，用正整数q除，可把整数分为q大类：被q除余0（整除）、1、2、…、$q-1$。它们分别可以表示成

$$qn、qn+1、qn+2、\cdots qn+(q-1)\ (n\in Z)。$$

（2）对于n个整数的和或差，如果每个整数都能被某个整数整除，那么这个和或差必能被那个整数整除。如果有且只有一个数不能被某个整数整除，那么这个和或差必不能被那个数整除。

（3）求两个数的集合的交集，可以从一个集合中选出具有另一个集合内元素性质的数。上面的解法1就是从B中选出被2除余1的数。如果我们从A中去选被3除余2的数也可以。

例6 命题："如果$A\subseteq B$，那么$A\cap C\subseteq B\cap C$"是否正确？为什么？写出这个命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断是否正确，说明为什么。

解：命题："如果$A\subseteq B$，那么$A\cap C\subseteq B\cap C$"正确。证明如下：

如果$A\cap C$是空集，那么命题显然成立。

如果$A\cap C$是非空集，设$x\in A\cap C$，于是$x\in A$且$x\in C$，

因为$A\subseteq B$，所以$x\in B$，因此$x\in B\cap C$，所以$A\cap C\subseteq B\cap C$。

逆命题"如果$A\cap C\subseteq B\cap C$，那么$A\subseteq B$"不正确。如图1—2，左面的圆表示集合A，中间的圆表示集合B，右面的圆表示集合C，$A\cap C$是画斜线部分，$B\cap C$是画横线部分，$A\cap C\subseteq B\cap C$，但$A\nsubseteq B$。

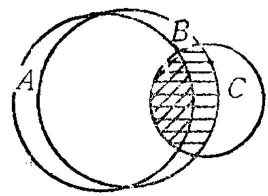

图1—2

否命题"如果$A\nsubseteq B$，那么$A\cap C\nsubseteq B\cap C$"不正确。

逆否命题"如果$A\cap C\nsubseteq B\cap C$，那么$A\nsubseteq B$"正确。

【讲解】

（1）论证一个命题的正确性要在一般情况下进行。用逻辑推证，简洁明瞭。要说明一个命题不正确，只要举出一个相反的例子即可，在集合问题中用韦恩图说明，形象具体。

（2）在四个命题中，原命题与逆否命题同时为真，同时为假，逆命题与否命题同时为真同时为假。如果对原命题、逆命题已作出论证，那么对否命题、逆否命题的真假就可以直接用结论了。

例7 下面的集合对四则运算是否封闭？封闭的用✓，不封闭的用×填表：

（1）集合$\{-1, 0, 1\}$；

（2）自然数集合N；

（3）整数集合Z；

（4）有理数集合Q；

（5）$\{x \mid x$是正无理数$\}$；

（6）$\{x \mid x\in R$且$x\neq 0\}$；

（7）$\{x|x$是偶数$\}$；

（8）$\{x|x$是奇数$\}$；

（9）$\{x|x$是质数$\}$；

（10）$\{x|x$是合数$\}$。

解：

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
加法	✓	✓	✓	✓	×	×	✓	×	×	×
减法	×	×	✓	✓	×	✓	✓	×	×	×
乘法	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	×	✓
除法	×	×	×	×	×	✓	×	×	×	×

【讲解】

（1）一切有理数都可以用分数表示，它化成小数是有限小数或循环小数。

无理数是无限不循环小数。

$\{$有理数$\}\cup\{$无理数$\}=\{$实数$\}$.

$\{$有理数$\}\cap\{$无理数$\}=\phi$.

质数是只能被1和它本身整除，不能被其他正整数整除的大于1的正整数。如2、3、5、7、11、13等。

合数是除了能被1和本身整除以外，还能被另外的正整数整除的正整数。如4、6、8、9、10、12等。

（2）无理数与无理数的和差积商都不一定是无理数。如$a=0.1010010001\cdots$（用1隔开的0逐次多1个），

$b=0.0101101110\cdots$（用0隔开的1逐次多1个）。

都是无理数，但它们的和

$$a+b=0.1111\cdots=\frac{1}{9}$$

是有理数。

又如

$c=0.1212212221\cdots$（用1隔开的2逐次多1个），c是无理数，

$$c-b=0.1111\cdots=\frac{1}{9}$$

是有理数。

又如$3\sqrt{2}$与$\sqrt{2}$都是无理数，但它们的积与商分别是6与3都是有理数。

（3）奇数与奇数的积一定是奇数，这是因为

$$\begin{aligned}(2n+1)(2m+1)&=4nm+2n+2m+1\\&=2(2nm+n+m)+1\\&=2k+1(k\in Z).\end{aligned}$$

（4）合数与合数的和、差、商不一定是合数。如$9+4=13$，$9-4=5$，$9\div 4=2\frac{1}{4}$。

例8 已知$A=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$B=\{x|ax^2+bx+c=0\}$，$A\cup B=\left\{2, 3, -\frac{1}{2}\right\}$，$a$、$b$、$c$均为整数，且$|b|$、$|c|$互质，求$a$、$b$、$c$。

解：$\because x^2-5x+6=0$的解是$x_1=2$，$x_2=3$，而$A\cup B=\left\{2, 3, -\frac{1}{2}\right\}$，$\therefore$有以下几种情况：