高等职业教育电子信息类贯通制教材

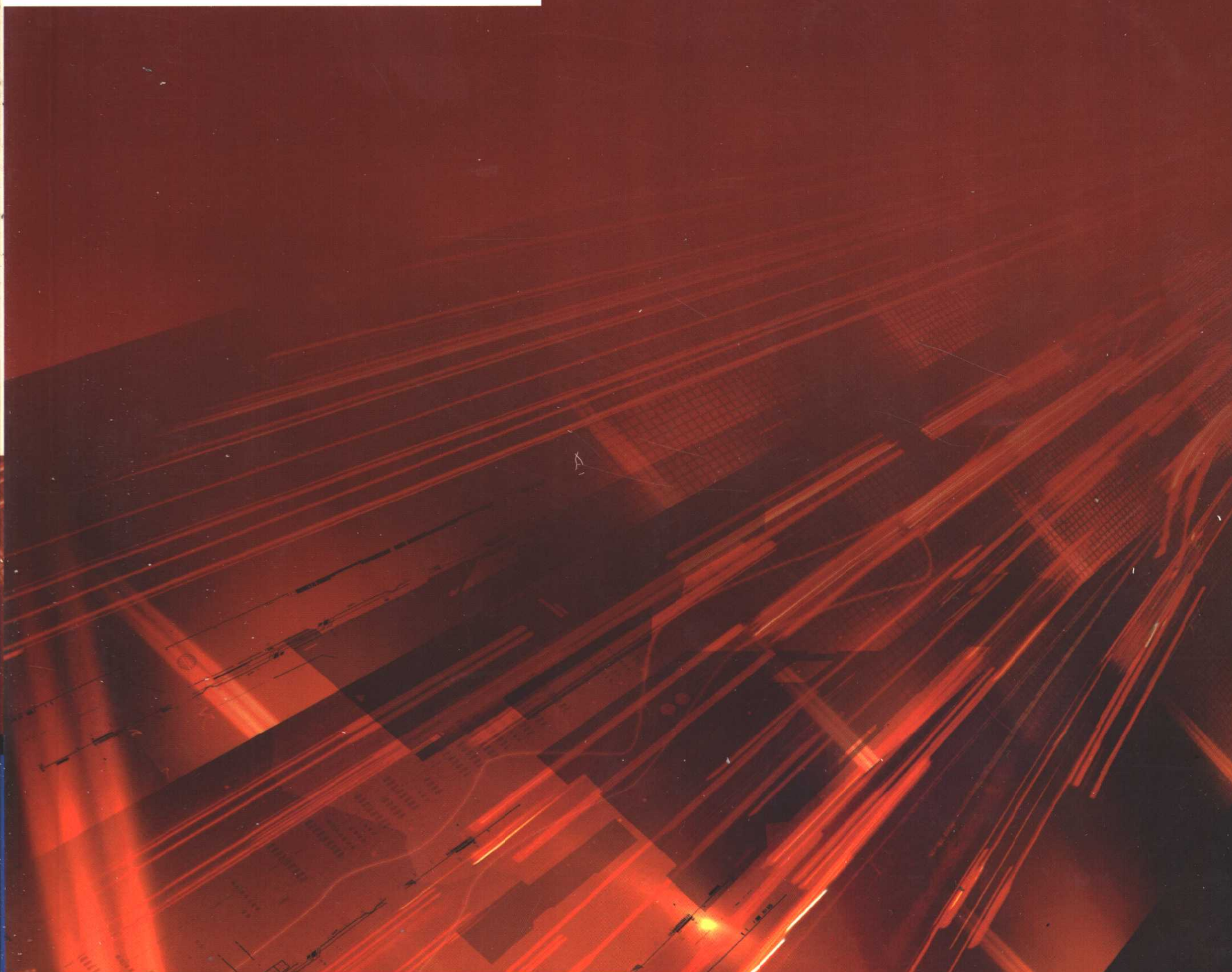
·机电技术专业

电子·教育

优化设计应用

● 郭仁生 苏君 卢洪胜 编著

● 袁清珂 主审



電子工業出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

http://www.phei.com.cn

高等职业教育电子信息类贯通制教材(机电技术专业)

优化设计应用

郭仁生 苏君 卢洪胜 编著
袁清珂 主审

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书主要内容包括：优化设计基本知识、优化设计方法、优化设计应用实例和基于现代工程设计软件（如Pro/Engineer 和 MATLAB 等）的结构参数优化分析和计算。书后的附录包括了常用优化方法的习题以及常用优化方法的计算机源程序。

本书可以作为高职高专院校机电技术专业教材，也可供有关专业的师生和工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

优化设计应用/郭仁生等编著．—北京：电子工业出版社，2003.8
高等职业教育电子信息类贯通制教材．机电技术专业
ISBN 7-5053-8983-1

Ⅰ．优…　Ⅱ．郭…　Ⅲ．机械设计：最优设计—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ．TH122

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 068096 号

责任编辑：朱怀永　　特约编辑：郭拓荒
印　　刷：北京彩艺印刷有限公司
出版发行：电子工业出版社 http//www. phei. com. cn
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×1092　1/16　印张：11.75　字数：300 千字
版　　次：2003 年 8 月第 1 版　2003 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：5000 册　定价：15.00 元

凡购买电子工业出版社的图书，如有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系。
联系电话：（010）68279077

前　言

高等职业技术教育是高等教育的重要组成部分，它的目标是培养生产、服务、技术和管理第一线的高级应用型人才，即以横向扩展能力为主、纵向延伸能力为辅的人才。随着科学技术的不断发展，新的产业不断产生，新技术、新工艺、新设备、新材料、新系统和新软件等不断涌现，要把高新技术成果转换成为生产力，培养这种高级应用型人才是非常关键的。高等职业技术教育是职业教育的高等层次，是教育为经济发展服务的一个重要结合点，是把我国的人力优势转化为智力优势，把智力优势转换为生产力的重要桥梁。

高等职业技术教育注重以职业道德为重点的思想品德教育，以技术应用为本位，建立以职业能力为中心的教学体系。对于培养学术型人才的高等教育和培养技术型人才的高等教育之间，除需要理论教学的深度与多寡有一定区别之外，一个是向原理和机理方向深入，一个是向应用方向深入，两种深入的难度都是很大的。遵照高等职业教育的教学特色和教学开发精神，在构建学生专业知识结构和培养专业技能方面，学生应当具有“必须、够用”和相对宽而浅的知识结构，能够依托专业基本理论和实践技能，具备向相关专业相互渗透和联接的实践能力，表现在掌握丰富的与相关专业“接口”的能力上。从培养与二十一世纪我国社会主义现代化建设要求相适应的生产、服务、技术和管理第一线的高级应用型人才的角度出发，应该使学生专业素质和综合职业能力得到协调发展。

随着科学技术的迅猛发展和社会的繁荣进步，由于智能技术、传感技术、激光技术、材料技术、计算机技术的蓬勃发展，现代工程理论对机械工程学科的渗透和影响，促使机械工程学科领域发生了许多重大的变化，从而进入了一个全新的时代。例如，成形技术和加工技术日益精密化，信息技术对先进制造技术的发展起着越来越重要的支撑和促进作用，制造工艺、设备和工厂的柔性和可重构性逐步成为企业装备的显著特点，智能化、数字化成为先进制造技术和机电产品的发展方向。机械工程类学科的高等职业技术教育从课程设置、教学内容和方法都必须进行全面的变革、重组、创新和整体优化，以适应时代的需求。

优化设计是现代设计法中的一个重要领域，它极大地促进了现代工程设计理论和方法的发展。优化设计是将数学规划理论和计算机技术应用于工程设计中，从大量的可行设计方案中自动寻找出最佳设计方案，进而获得显著的技术和经济效益。优化设计理论涉及的内容十分广泛，有些理论基础的论述推导会过于烦琐。本书力图从高等职业教育的特色和层次出发，叙述和讨论有关的问题，避开一些偏多偏深而不实用的理论推导，强调问题的物理意义和几何解释；注重工程实际应用，使学生在自己的认知基础和专业能力上建立一个新的优化决策概念和思维方法。

本书主要内容有四个部分：一是优化设计基本知识，包括优化设计的数学模型、几何意义和极值条件等，是在数学基础上只依据于学生熟知的函数导数和矩阵的简单运算。二是优化设计方法，包括一维优化方法、多维无约束优化方法和约束优化方法等；其中主要介绍几种简

明实用的直接方法（如一维优化的黄金分割法和二次插值法，多维无约束优化的共轭方向法和鲍威尔法，约束优化的随机方向法和复合形法等）；也介绍一些常用的需要借助导数计算的间接方法（如多维无约束优化的梯度法和共轭梯度法）和将约束优化问题转化为无约束优化问题的惩罚函数法等；并且通过一维或二维优化问题的手算实例来说明各种优化算法的基本原理。三是优化设计实例，主要介绍了在学生已经熟悉的机构参数、机械传动、机械零件和机械联接计算等实例的基础上，讨论如何建立优化设计的数学模型和进行优化求解。四是介绍基于某些现代工程设计软件（如 Pro/Engineer 和 MATLAB 等）的结构参数优化分析和计算的应用。书后的附录包括了一些常用优化方法的习题，以及常用优化方法的计算机源程序。

本课程的教学重点是具体工程优化设计问题数学模型的概念和建立方法，熟悉用数值迭代方法进行优化决策的思路，以及认识基于某些现代工程设计软件优化分析和优化搜索计算方法，并不要求学生深入理解和掌握常用优化方法的源程序流程分析。

参加本书编写的有：佛山职业技术学院郭仁生（第 4 章、第 5 章、第 7 章和第 8 章）、河南工业职业技术学院苏君（第 1 章、第 2 章和第 3 章）和武汉职业技术学院卢洪胜（第 6 章和附录），全书由郭仁生担任主编。

为了更好地满足该课程的教学需要，本书配套编写了电子教学参考资料，其中包括教学指南、电子教案和习题解答等内容，读者可以从电子工业出版社的教材网站或电子出版物等电子媒体形式获取。

广东省制造业信息化工程专家组成员和先进制造技术重大专项专家组成员、广东工业大学袁清珂教授担任本书的主审，精心审阅了全稿，提出许多宝贵意见，特此致谢。

由于编者的水平有限，书中的错漏之处在所难免，敬请读者在使用中指正。本书还配有教学指南、电子教案及习题答案（电子版），请有此需要的教师与电子工业出版社联系，我们将免费提供。E－mail：ve@ phei. com. cn

编者

2003. 5

目　录

第1章 优化设计的基本概念和数学模型

优化设计的实质,可以简单地概括为:在一定限制(约束)条件下,寻求一组设计参数(变量),使设计对象的某项或多项设计指标(目标)达到最优。

优化设计的数学模型是对优化设计工程问题的数学描述,它包含有设计变量、目标函数和设计约束三个基本要素。

1.1 优化设计概述

1.1.1 传统设计与优化设计

机械产品的设计,一般需要经过提出课题、调查分析、技术设计、结构设计、绘图和编写设计说明书等环节。传统设计方法通常是在调查分析的基础上,参照同类产品,通过估算、经验类比或试验等方法来确定产品的初步设计方案。然后对产品的设计参数进行强度、刚度和稳定性等性能分析计算,检查各项性能是否满足设计指标要求。如果不能满足要求,则根据经验或直观判断对设计参数进行修改。整个传统设计的过程是人工试凑和定性分析比较的过程。实践证明,按照传统方法得出的设计方案,可能有较大改进和提高的余地。在传统设计中也存在"选优"的思想,设计人员可以在有限的几种合格设计方案中,按照一定的设计指标进行分析评价,选出较好的方案。但是由于传统设计方法受到经验、计算方法和手段等条件的限制,得到的可能不是最佳设计方案。因此,传统设计方法只是被动地重复分析产品的性能,而不是主动地设计产品的参数。

工程设计的基本特征在于它的约束性、多解性和相对性。一项设计常常在一定的技术与物质条件下,要求取得一个技术经济指标最佳的方案。

[例1-1] 设计一个体积为 $5m^3$ 的薄板包装箱,其中一边长度不小于4m。要求使薄板耗材最少,试确定包装箱的尺寸参数:长 a、宽 b 和高 h。

分析:包装箱的表面积 s 与它的长 a、宽 b 和高 h 三维尺寸参数有关,故取与包装箱薄板耗材直接相关的表面积 s 作为设计目标。

按照传统设计方法,首先固定包装箱一边长度 $a=4m$。要满足包装箱体积为 $5m^3$ 的设计要求,则有以下多种设计方案:

设计方案		1	2	3	4	5	…
包装箱尺寸参数	宽度 b(m)	1.000 0	1.100 0	1.200 0	1.300 0	1.400 0	…
	高度 h(m)	1.250 0	1.136 4	1.041 7	0.961 5	0.892 9	…
	表面积 s(m^2)	20.500 0	20.390 9	20.433 3	20.592 3	20.842 9	…

如果取包装箱一边长度 $a>4m$ 的某一个固定值,则包装箱的宽度 b 和高度 h 有许多种结果。

然后，再从上面的众多可行方案中选择出包装箱表面积 s 最小的设计方案。

采用优化设计方法，该问题可以描述为：在满足包装箱的体积 $abh=5\text{m}^3$，长度 $a\geq 4\text{m}$，$b>0$和 $c>0$ 的限制条件下，确定设计参数 a，b 和 h 的值，使包装箱的表面积 $s=2(ab+bh+ha)$达到最小。然后选择合适的优化方法对该优化设计问题进行求解，得到的优化结果是：$a=4\text{m}$，$b=h=1.118\,0\text{m}$，$s=20.388\,5\text{m}^2$。

优化设计是用数学规划理论和计算机自动选优技术来求解最优化问题。对工程问题进行优化设计，首先需要将工程设计问题转化成数学模型，即用优化设计的数学表达式描述工程设计问题。然后，按照数学模型的特点选择合适的优化方法和计算程序，运用计算机求解，获得最优设计方案。

1.1.2 优化设计的发展概况

在第二次世界大战期间，由于军事上的需要产生了运筹学，出现了许多用古典微分法和变分法所不能解决的最优化方法。随着电子计算机技术的发展与应用，20 世纪 50 年代在应用数学领域发展形成了以线性规划和非线性规划为主要内容的数学规划理论，应用于解决工程设计问题，形成了工程设计的优化设计理论和方法。

优化设计理论研究和应用实践的不断发展，使传统设计方法发生了根本的变革，从经验、感性和类比为主的传统设计方法过渡到科学、理性和立足于计算分析的现代设计方法，工程设计正在逐步向自动化、集成化和智能化方向发展。

优化设计是从 20 世纪 60 年代发展起来的，将最优化原理与计算机技术应用于设计领域的科学设计方法，已经在机械、宇航、电机、石油、化工、建筑、造船、轻工等各个行业得到广泛的应用，获得显著的技术与经济效益。根据有关资料介绍，美国贝尔(Bell)飞机公司采用优化方法解决具有 450 个设计变量的结构优化问题，使一个飞机机翼的质量减轻了 35%。美国波音(Boeing)公司对 747 飞机机身进行优化设计，收到增加载员、减轻质量、缩短生产周期和降低成本的效果。某钢铁公司对从德国 DMAG 公司引进的 1700 薄板轧机进行优化修改，在生产中增加了几百万马克的赢利。优化设计不仅可以用于产品结构的设计，也可以用于工艺方案的选优。某化工企业采用化工优化系统 CHEOPS 进行优化设计，在搜索得到的一万六千个可行性方案中，选择出一个成本最低、产量最大的方案，只花费了两天的时间。而在此之前，一组工程设计人员工作了一年，仅得出三个设计方案。

我国在“六五”期间开发了“OPB 优化方法程序库”，在“七五”期间进一步开发了“OPB—2 优化方法程序库”和处理离散变量的“MOD”等。美国 MathWorks 公司在 1994 年推出了科技应用软件 MATLAB，它具有强大的科技计算、图形处理、可视化功能和开放式可扩展环境，特别是所附带的优化工具箱(Optimization Toolbox)中包含有一系列优化算法和模块，可以用于求解约束线性最小二乘优化、约束非线性或无约束非线性极小值问题、非线性最小二乘逼近和曲线拟合、非线性系统方程和复杂结构的大规模优化问题。这些为工程优化设计提供的实用计算机程序库，为工程技术人员在计算机上使用各种有效的优化方法创造了条件。

1.2 设计变量

1.2.1 基本参数

一个零件、部件、机构或是一台工艺设备的设计方案，可以用一组基本参数的数组表示。

在设计中，选用哪些参数表示一个设计方案，需要依据各种设计问题的性质而定。有的可能用到几何参数，如零件的外形尺寸、截面尺寸、机构的运动学尺寸等；有的可能用到某些物理量，如构件的重量、惯性距、频率、力和力矩等；有的还可能用到一些代表工作性能的导出量，如应力、挠度、效率、冲击系数等。总之，基本参数是一些对该项设计性能指标好坏有直接影响的量。

在一项设计中，有些参数是可以根据设计要求给定的，有一些则需要在设计中优选。对于需要优选的参数，在设计过程中均把它看做是变化的量，称它为设计变量。设计变量是一组相互独立的基本参数。

1.2.2　设计方案的表示形式

设计变量是一组数，构成了一个数组，这个数组在最优化设计中被看成一个矢量。设有 n 个设计变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，将它们看做某一矢量 $\boldsymbol{X}$ 沿 n 个坐标轴的分量。若用矩阵来表示，即

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \tag{1-1}$$

式中，"T" 是转置符，即把列向量转置为行向量。

与式(1-1)这种表示形式所对应的重要概念是设计空间，即以 n 个设计变量为坐标轴组成的实空间，或称 n 维实欧氏空间，用 R^n 表示。设计空间由代表各个设计变量的坐标轴组成。例如当 $n = 2$，设计空间是以 x_1, x_2 为坐标轴的平面，平面上任一点的坐标(x_1, x_2)对应着一个二维设计变量 $\boldsymbol{X} = [x_1, x_2]^T$；当 $n = 3$ 时，即由三个设计变量 x_1, x_2, x_3 组成一个三维空间，平面上任一点的坐标(x_1, x_2, x_3)对应着一个三维设计变量 $\boldsymbol{X} = [x_1, x_2, x_3]^T$，如图 1.1 所示。当 $n > 3$ 时，由 n 个分量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 组成 n 维实欧氏空间。设计空间是所有设计方案(即设计点、设计向量)的集合，n 维实欧氏空间用集合概念表示为 $\boldsymbol{X} \in R^n$。

一组设计变量 $\boldsymbol{X}$，即代表一个设计方案，设计空间中的任一个设计方案，认为它是从设计空间原点出发的设计向量 $\boldsymbol{X}^{(K)}$。因此，$\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{X}^{(K)}$ 表示有 K 个不同的设计方案。最优设计方案的记号为 $\boldsymbol{X}^*$。

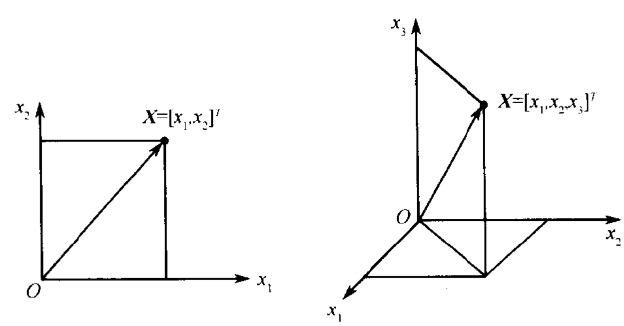


图 1.1　二维设计平面与三维设计空间

相邻两个设计方案的关系，一般均可以用向量和矩阵运算的方法表示出来，如图 1.2 所示。设 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 为第 1 个设计方案或原方案，经过一次设计修改为 $\Delta\boldsymbol{X}^{(1)}$，取得了第 2 个设计方案或新方案 $\boldsymbol{X}^{(2)}$，按向量计算法则，有

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \Delta X^{(1)} \tag{1-2}$$

或者表示成列阵的运算形式为

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(1)} \\ \Delta x_2^{(1)} \\ \Delta x_3^{(1)} \end{bmatrix} \tag{1-3}$$

式中，

$$\Delta X^{(1)} = \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(1)} \\ \Delta x_2^{(1)} \\ \Delta x_3^{(1)} \end{bmatrix} \tag{1-4}$$

称为第 1 次定向修改设计量。这个定向修改设计量又可以表示为

$$\Delta X^{(1)} = \alpha S^{(1)} \tag{1-5}$$

式中，α 是修正系数；$S^{(1)}$ 称为第 1 次定向修改设计的单位方向，是一个单位列向量。

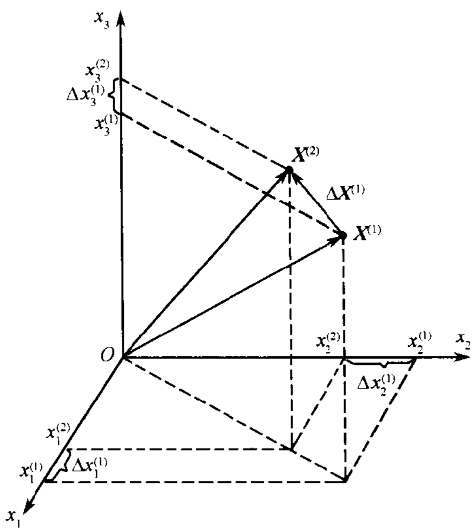


图 1.2　两个设计方案的关系

1.2.3　设计变量的选取

设计变量的数目称为优化设计的维数。设计变量的数目越多，即设计方案的维数越高，则设计的自由度也越大，容易得到比较理想的结果。但随着设计变量数目的增多，也必然使问题复杂化，给优化带来更大的困难。

在一般情况下，设计者还是应该尽量地减少设计变量的数目，应把对设计所追求目标影响比较大的那些参数选为设计变量。对于刚开始从事优化设计的工作者来说，将哪些基本参数定为设计变量，是个比较困难的问题，不过在一般情况下，应该尽量减少设计变量的个数，就是说尽可能将那些不很活跃的参数，根据过去设计经验或者考虑工艺、结构布置等方面的因素，可以预先取定，作为设计常量来处理，而将对设计指标影响较大的基本参数作为设计变量来处

理。但是,也要注意实际的可能性。例如,为了选择一种最合适的材料,将材料性能的强度极限σ_b取为设计变量,但这样求得的最优值,从材料供应方面看往往是难以实现的。类似于这种参数,一般不应该取为设计变量,应该根据设计规范的要求处理。

在机械优化设计的多数问题中,均可以把设计变量看做连续变化的量,且规定有上限值 b_i 和下限值 a_i,即

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1-6}$$

根据设计要求,大多数设计变量被认为是有界连续变量,称为连续量。但在某些情况下,设计变量实际上不是连续变化的。例如,齿轮的模数应按标准模数系列选取,钢丝的直径、钢板的厚度、型钢的型号也应符合金属材料的供应规格等。属于这样的设计变量是离散变量,对于离散设计变量,在优化设计过程中常常先把它视为连续量,在求得连续量的优化结果后再进行圆整或标准化,以求得一个实用的最优方案。

[**例 1-2**]　图 1.3 所示的是高速插齿机中使用的一种主传动六杆机构。设计要求从动滑块工作行程速度尽可能均匀,回程时间要短些,但回程加速度不能太大;此外还要满足双曲柄条件(构件 1,3 与 5 要能整周回转);工作行程时,机构的最大压力角不大于许用压力角等。试确定优化设计的设计变量。

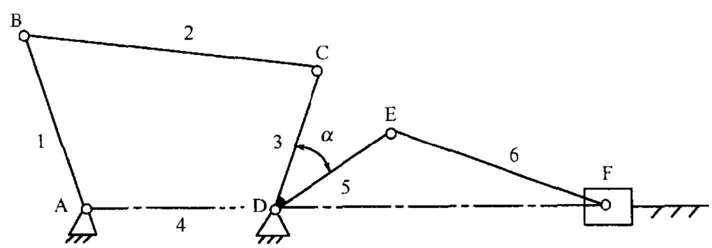


图 1.3　高速插齿机中的主传动六杆机构

为了达到设计要求,必须选择适当的机构结构参数,包括六个构件长度 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 和 CD,DE 两杆的夹角 $\alpha = x_7$,即 $x_i(i = 1,2,\cdots,7)$。于是设计变量可写成

$$\boldsymbol{X} = [x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7]^T$$

按照设计空间的概念,这是一个七维的实欧氏空间中的优化设计问题。每一组设计变量代表着某一设计方案,即从七维设计空间中的一个点,或是从原点出发的一个矢量。

1.3　设计约束

1.3.1　设计约束的种类

如前所述,设计空间是所有设计方案的集合,但是这些设计方案,并不是工程实际都能接受的,例如设计结果出现负值的面积、长度,或者按承载能力的要求,各设计变量之间必须满足一定的关系等。因此,在设计过程中,为了得到可行的设计方案,必须根据实际的要求,对设计变量的取值加以限制,这种限制称设计约束。

1. 不等式约束和等式约束

设计约束一般可以表示为设计变量的不等式约束函数。

$$g_u(X) = g_u(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqslant 0 \qquad (u = 1,2,\cdots,m) \tag{1-7}$$

等式约束函数为

$$h_v(X) = h_v(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \qquad (v = 1,2,\cdots,p < n) \tag{1-8}$$

以上两式中，m 和 p 分别表示施加于该项设计的不等式约束条件数和等式约束条件数。

2. 边界约束和性能约束

设计的约束条件是由实际的设计要求导出的，一般可以分为边界约束和性能约束两种。

边界约束又称为区域约束，即考虑设计变量的变化范围（最大允许值和最小允许值），如构件长度 $l_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 应满足 $l_{\min} \leqslant l_i \leqslant l_{\max}$，于是可建立不等式约束方程为

$$g_j(X) = l_i - l_{\min} \geqslant 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n; j = 1,3,\cdots,2i-1)$$

$$g_j(X) = l_{\max} - l_i \geqslant 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n; j = 2,4,\cdots,2i)$$

性能约束又称为性态约束，它是由某种设计性能或指标推导出来的一种约束条件。

[例 1-3] 如图 1.4 所示的曲柄摇杆机构中，原动件 1 是曲柄，从动件 3 是摇杆。

在设计曲柄摇杆机构时，必须满足曲柄存在条件，即曲柄 1 为最短杆，曲柄与其他任一杆长度之和必小于其余两杆长度之和，于是可以导出它的不等约束条件为

$$g_i(X) = l_{i+1} - l_1 \geqslant 0 \qquad (i = 1,2,3)$$

$$g_4(X) = -l_1 - l_2 + l_3 + l_4 \geqslant 0$$

$$g_5(X) = -l_1 - l_3 + l_2 + l_4 \geqslant 0$$

$$g_6(X) = -l_1 - l_4 + l_2 + l_3 \geqslant 0$$

式中，$l_{i+1}(i = 1,2,3)$ 分别表示除曲柄 1 外其余三个构件的长度。

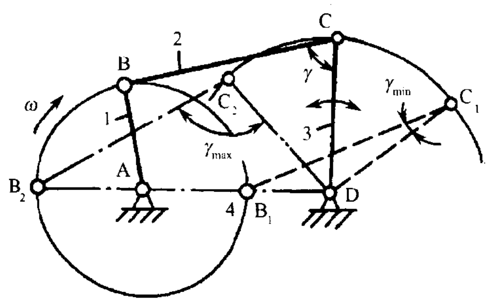


图 1.4 曲柄摇杆机构

为保证机构有良好的力传递性能，则其传动角 γ 的最小值和最大值应分别不小于和不大于其许用值。于是有不等约束方程式为

$$g_7(X) = \gamma_{\min} - [\gamma_{\min}] \geqslant 0$$

$$g_8(X) = [\gamma_{\max}] - \gamma_{\max} \geqslant 0$$

[例 1-4] 根据外啮合闭式直齿齿轮传动设计齿面接触强度条件，确定小齿轮分度圆直径 d_1 的计算公式为

$$d_1 \geqslant \sqrt[3]{\left(\frac{671}{[\sigma_H]}\right)^2 \times \frac{KT_1}{\psi_d} \times \frac{u+1}{u}}$$

可以建立一个不等约束条件为

$$g(X) = d_1 - \sqrt[3]{\left(\frac{671}{[\sigma_H]}\right)^2 \times \frac{KT_1}{\psi_d} \times \frac{u+1}{u}} \geq 0$$

式中,K是载荷系数;$[\sigma_H]$是齿轮齿面许用接触应力;T_1是小齿轮传递的扭矩;ψ_d是齿宽系数;u是齿数比。

需要指出,一般不等约束方程式都可以写成$g_u(X) \geq 0$形式,因为$g_u(X) \leq 0$可以改写成$-g_u(X) \geq 0$的形式。

3. 显约束和隐约束及其他

在有的文献中,将约束分为显约束和隐约束两种,这是根据约束条件的函数性质而定的。显约束是指与设计有明显变量函数关系的一种约束条件。而对于复杂结构的性能约束函数(如变形、应力、频率等),该结构最大工作应力可能是通过有限元方法计算得到的,机构的运动误差可能是用数值积分方法计算得到的等,只能表示成关于设计变量隐约束条件。

另外,在某些工程设计中,还有可能出现另一类约束条件,如经验性的约束、条件性的约束或离散设计变量取离散值的约束等。

1.3.2　可行区域与非可行区域

由于引入设计约束,设计点在n维实欧氏设计空间R^n内就被分成两部分:一部分是满足约束条件的设计点,称为可行设计点;可行设计点的集合$\boldsymbol{D}$称为可行设计区域,简称为可行区域。另一部分是不满足约束条件的设计点,称为非可行设计点,这种设计点的集合称为非可行区域。

每个不等约束方程式$g_i(X) \geq 0$的极限情况。$g_i(X) = 0$在设计空间内以一个几何面(二维问题为曲线)的形式出现。如图1.5所示为在二维设计平面内,由五条约束线围出了两个区域的情况。图中阴影线围成的区域即为可行区域,在这个区域内的任一点均满足$g_i(X) \geq 0$ $(i = 1,2,\cdots,5)$的条件,这就是说在可行区域内的任一点所对应的设计方案,均为允许设计方案,所以其中的任一个设计点都可以称为自由点。

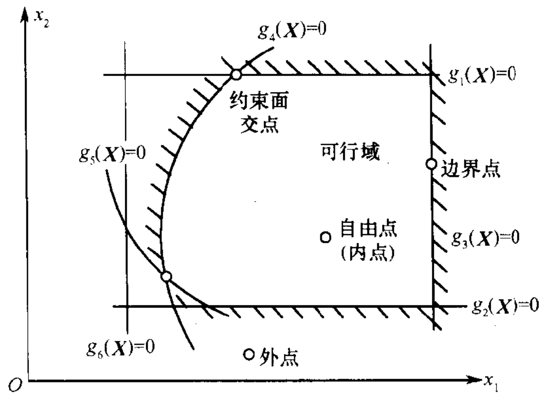


图 1.5　二维设计问题的可行域

当自由点移至一约束面上时,这一点称为边界点,即为某项约束所允许的极限设计方案,这时把这个约束叫做起作用约束(或适时约束)。某项优化设计所允许的极限设计方案,往往在多个起作用约束的交集上。有些优化方法(如内点惩罚函数法),其运算过程在可行区域内

进行，最终确定优化点在此区域之内或边界上。还有一些优化方法（如外点惩罚函数法），其运算过程在非可行区域内进行，最后逼近可行区域的边界。

除了不等式约束条件外，在有些设计中还可能存在几个等式约束方程 $h_j(\boldsymbol{X}) = 0$ 的情况。等式约束条件是对设计变量的一种特殊组合。从理论上讲，有一个等式约束条件就存在一个从最优化设计中消去某个设计变量的机会，亦即降低最优化设计问题维数的一次机会。应该指出，等式约束条件数 p 必须小于优化设计问题的维数 n。如果 $p = n$，则由 n 个等式约束函数方程限制了设计方案只能有惟一的解，没有最优化的余地。

1.4 目标函数

1.4.1 目标函数的含义

在所有的可行设计方案中，有些设计方案比另一些要“好些”。如果确实是这样，则“较好”的设计方案比“较差”的设计方案必定具备某些更好的性质。如果这种性质可以表示成设计变量的一个可计算函数，则我们就可以考虑优化这个函数，以得到“更好”的设计。因此，在许多可行设计方案中，哪个方案好，哪个方案不好，需要有一个衡量的标准。因此，在优化设计中这个用于评选设计方案好坏的函数，称为目标函数或评价函数，记做

$$f(\boldsymbol{X}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{1-9}$$

例如，在长度为 l、截面直径为 d 的圆柱形悬臂梁的优化设计中，期望得到一个重量最轻的设计方案，就可以优化深的重量函数或体积函数 $f(x_1, x_2) = 0.25\pi d^2 l = 0.785398 x_1^2 x_2$ 来达到。

在工程实际问题中，优化目标函数有两种表述形式：目标函数的极小化或目标函数的极大化，即

$$f(\boldsymbol{X}) \to \min \text{ 或 } f(\boldsymbol{X}) \to \max \tag{1-10}$$

由于求目标函数 $f(\boldsymbol{X})$ 的极大化就等价于求目标函数 $-f(\boldsymbol{X})$ 的极小化。为了算法和程序的统一，在后文中最优化就是指极小化。

建立目标函数是整个优化设计中的重要环节。在机械设计中，目标函数主要由设计准则来建立。在机构优化设计中，这种准则可以是运动学和动力学的性质，如运动误差、主动力和约束反力的最大值、振动特性等；在零件和部件设计中，可以是重量、体积、效率、可靠性、承载能力等；对于产品设计，也可以将成本、价格、寿命等作为设计所追求的目标。在一般情况下，这些指标都有明显的设计变量的函数关系；但当有的指标尚无确切的计算公式或精确的测量工具时，也可以用一个与它等价的定量指标来代替。例如，当一个零件需要以寿命作为设计指标时，目前尚无寿命的计算公式，这时可以用疲劳寿命或磨损来代替它。由于目标函数仅作为评选方案的一种标准，所以也可以用一个反映某项设计指标的系数来表示。例如，为了使齿轮传动装置达到最大的承载能力，可以引入一个承载能力系数，当它达到最大值时，也就等价于承载能力最高。由此看来，目标函数不一定有明显的物理意义和量纲，而仅仅是设计指标的一个代表值。

在确定优化设计的目标函数时，其中有些设计目标可能是相互矛盾的。例如，一个重量最轻的设计方案，并不一定是工艺上最合适的方案或者成本最低的方案；追求一个机构的最大加速度极小化，其动态响应可能不好等。所以，建立目标函数是设计中的一项重要决策，它将影响最优方案的适用价值。

1.4.2 单目标和多目标问题

仅根据一项设计准则建立的目标函数称为单目标函数。例如生产规划问题，如果它的设计准则是使创造的经济价值最高，目标是单一的。同样在弹簧设计问题中，如设计准则是使弹簧自身总重量最轻，目标也是单一的，所以这两个都是单目标函数。

若某项设计，要求同时兼顾若干个设计准则，由多个设计准则而建立的目标函数就是多目标函数。例如设计某多级转速钻床的变速箱，其设计准则为

要求箱体体积最小，即各齿轮中心距之和为最小，建立第一个目标函数。

$$\min f_1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{Z_j m_j (1 + u_j)}{2}$$

要求重量最轻，即齿轮体积之和最小，建立第二个目标函数。

$$\min f_2 = \sum_{j=1}^{n} (m_j Z_j)^2 \cdot B_j$$

式中，n 是齿轮副数，Z_j 是各齿轮副中小齿轮齿数，m_j 是各齿轮副模数，u_j 是各齿轮副齿数比，B_j 是各齿轮副齿宽。

工程实际问题中存在的大多数问题属于多目标优化问题。由于这类问题要同时考虑多个指标，往往比较复杂，以致有时决策者很难轻易下判断说哪个方案更好，所以多目标函数的最优化问题比起单目标函数来就复杂得多。

1.5 优化设计的数学模型

优化问题的数学模型是实际优化问题的数学抽象，设某项设计有 n 个设计变量，则其数学模型可以表述为

$$\boldsymbol{X} = [x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n]^T \qquad (\boldsymbol{X} \in R^n)$$

在满足

$$g_u(\boldsymbol{X}) = g_j(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \geqslant 0 \qquad (u = 1, 2, \cdots, m)$$

和

$$h_v(\boldsymbol{X}) = h_j(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = 0, (v = 1, 2, \cdots, p < n)$$

的约束条件下，求解目标函数

$$f(\boldsymbol{X}) = f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$$

最小值或最大值。

这样的最优化问题一般称为“数学规划问题”。优化设计问题数学模型的一般形式为

$$\left.\begin{aligned} &\min f(\boldsymbol{X}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\boldsymbol{X} \in R^n \\ &\text{s.t. } g_u(\boldsymbol{X}) \geqslant 0 \quad (u = 1, 2, \cdots, m) \\ &\qquad h_v(\boldsymbol{X}) = 0 \quad (v = 1, 2, \cdots, p < n) \end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$

式中，s. t. 是英文“subject to”的缩写，意思是“受约束于”。

在上述数学问题中，如果目标函数 $f(\boldsymbol{X})$ 和约束函数 $g(\boldsymbol{X})$ 与 $h(\boldsymbol{X})$ 都是设计变量 $\boldsymbol{X}$ 的线性函数，则称它为线性规划问题；如果目标函数 $f(\boldsymbol{X})$ 和约束函数 $g(\boldsymbol{X})$ 与 $h(\boldsymbol{X})$ 中任何一个是关于设计变量 $\boldsymbol{X}$ 的非线性函数，则称它为非线性规划问题。当 $m = p = 0$ 时，则称为无约束规划问题（无约束最优化问题），当 $m \neq p \neq 0$ 时，则称为约束规划问题（约束最优化问题）。