

大千世界中的 微积分

钱季伟 编

$f(x)$

x

$x+h$

-49

中国铁道出版社

大千世界中的微积分

钱季伟 编

中 国 铁 道 出 版 社
2002年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书在广阔领域中展示了微积分丰富多彩的应用实例,它能帮助广大读者分析现实生活中的数量关系,提炼数学模型,利用微积分方法解决实际问题,提高学习微积分的兴趣。

本书可供高中生、各专业大学生、教师和专业技术人员及数学爱好者参考。

图书在版编目(CIP)数据

大千世界中的微积分/钱季伟编. —北京:中国铁道出版社,2002.10
ISBN 7-113-04831-5

I. 大… II. 钱… III. 微积分—普及读物
IV. 0172-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 062350 号

书 名:大千世界中的微积分

作 者:钱季伟 编

出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街8号)

责任编辑:刘启山 编辑部电话:(路)021—73141,(市)010—51873141

封面设计:冯龙彬

印 刷:中国铁道出版社印刷厂

开 本:787mm×1092mm 1/32 印张:5.25 字数:120 千

版 本:2002 年 10 月第 1 版 2002 年 10 月第 1 次印刷

印 数:1~2 000 册

书 号:ISBN 7-113-04831-5/Z·590

定 价:18.00 元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社发行部调换。

发行部电话:(路)021—73169,(市)63549569

序

从小学开始以至中学、大学,数学一直是各门学科中教学时数最多的,由此可见数学之重要。

数学的重要性在于:它不仅是培养思维能力,提高思维水平的有力手段,而且应用广泛,其内容、思想、方法已渗入到整个社会。特别是在当今计算机逐渐普及、对各种事物重视定量研究的时代,数学的应用更受到了社会和数学界的空前关注,成为了时代的潮流。高考中应用题比重的增加,初中、高中数学知识应用竞赛和大学生数学建模竞赛的连年举行,都是顺应这种潮流的体现。本书作者长期从事高等学校基础数学的教学,深切感到为了很好地培养学生应用数学知识于分析和解决实际问题的能力,仅仅依赖教材和课堂教学中相关的例题习题是远远不够的。正是在这种想法的基础上编撰了本书。

书中提供了微积分丰富多彩的应用实例,涉及到自然科学、社会科学、日常生活和生产活动等多个领域。其中有微积分发展历史上的经典问题,如圆周率的计算、最速降落线;有一般高等数学教科书中例习题的进一步深入讨论,如推广的最短水管问题、跳伞问题;有经济学理论中著名的数学模型,如洛仑茨曲线和基尼系数;有数学在生产活动中的有趣应用,如捕鱼的 Scheafer 模型和猪的销售时机,等等。

乍看书名《大千世界中的微积分》,有人可能会误解它和某些科普著作一样,对所讨论的主题,材料罗列,泛泛而谈,虽然异彩纷呈,热闹有趣,但是浮光掠影,浅尝即止,可供消遣浏

览,而难以从中汲取真正有用的知识。实际上恰恰相反,这是一本不能走马看花,而适宜于慢慢“啃”的书。作者文字简洁,不事铺陈,对于每个问题,从提出实际背景开始,理论上严格清晰,一直把问题解决到底。阅读本书,需要的是耐心,随时准备动动笔来帮助理解消化,越是慢嚼细咽,越能理解得深刻,在数学能力的提高上将得益越多。

中国工程院院士

钱七虎



2002.4.

前 言

近数十年来,数学的应用不仅在力学、物理、工程技术等传统领域取得了重大的进展,而且正日益广泛地渗透到自然科学和社会科学的各个分支中去;而各种高新技术与传统的工程技术相比,对数学的要求更深更广。在这样的时代背景下,作为走向现代数学的阶梯的微积分(高等数学),已成为门类众多的各种专业共同的数学基础课,每年都有数以十万计的高等和中等专业学校学生在学习它。不久的将来,随着中学教育改革的深入进行,人数更为众多的高中学生也将走进这个学习微积分的浩浩荡荡的队伍中来。

为什么要学习微积分?对于绝大多数非数学专业的学习者来说,其主要目的应该是:掌握从事专业工作和进一步学习现代化科学技术所必需的微积分基本知识和技能,逐步形成应用所学知识来分析和解决实际问题的能力。

但是从知识和理论的学习到它的应用,不是一件简单的自然而然就能实现的事情。从理性认识回到实践是认识过程第二次的更重要的飞跃,是提升数学素质的必由之路。为帮助初学者顺利实现这一飞跃,提供足够数量的微积分在不同领域中的应用实例,以作为他们学习和揣摩的样板,显然是十分必要的。但是长期以来,很多教材的编者和数学课的老师在微积分教学内容的选择安排上,偏重于抽象的纯理论知识的传授和逻辑思维能力的培养,而对于数学的应用却缺乏足够的关注,因而仅仅依赖课堂教学中为数不多的应用性例题和习题显然是远远不够的。与课堂内的情况相关联,环顾当今书市,虽然有关微积分和高等数学

的学习参考书和辅导材料称得上汗牛充栋,但专门讨论其应用问题的读物却十分罕见。有鉴于此,本书的编撰旨在为这一状况作一点补缺拾遗的工作。

为了适合不同类型不同知识层次读者的需要,并尽量简约篇幅,本书把内容限制在一元函数微积分范围以内。书中大量的应用实例和素材,筛选自国内众多的相关书刊,编者对之作了解、修改、加工和改写,分为极限方法、变化率和最值、定积分的微元法、微分方程四章。这些应用涉及的领域十分广泛,其数学模型类型多样,不仅为初学者在微积分知识的应用上展现了广阔的视野,而且一些内容较为复杂,在课堂教学中由于教材篇幅和教学时数的限制而难以深入讨论的问题,在这里有条件得到充分而详尽的展开。对每个应用问题,书中提供了适度的说明、分析和求解,其中部分的解法和结果是编者自己给出的。编者同时注意到了问题的专业性不宜太强,以避免理解题意上的困难。

本书是一本配合教材对其应用部分进行开拓、加深,以帮助学习者掌握微积分应用问题的求解的专题性课外补充读物,希望读者们能从本书中得到如下多方面的收获:

1. 了解微积分知识广泛而多样的应用,在此基础上认识到数学来自实践,也应该回到实践中去,从而提高学习数学的兴趣,培养运用数学的自觉意识。

2. 通过学习范例并结合自己的解题实践,熟悉并掌握求解应用问题的各个环节:弄清楚问题的实际背景;进行必要和合理的假设和简化;利用适当的数学工具建立数学模型;对模型求解并对结果作出解释。

3. 在应用知识的过程中,深化、充实对数学概念、思想、方法的理解,使数学能力和素质得到全面的提高。

编者谨识

目 录

1. 极限方法	1
1.1 π 的计算	1
1.2 指数增长和 e	7
1.3 服药的方式	12
2. 变化率和最值	16
2.1 圆锥曲线的光学性质	16
2.2 相关变化率	22
2.3 函数的相对变化率——弹性	26
2.4 产量、成本、利润	32
2.5 最大和最小	39
2.6 约束条件	47
2.7 蜂巢的结构	52
2.8 二元函数最值问题的降维解法	55
2.9 存贮问题	61
2.10 推广的最短水管问题	70
2.11 最小二乘法和经验公式	77
3. 定积分的微元法	85
3.1 若干例子	87
3.2 求体积的辛卜生公式	91
3.3 洛伦茨曲线和基尼系数	97

3.4 单摆和惠更斯摆	108
4. 微分方程	116
4.1 用条件中的变化率建立微分方程	117
4.2 用微元法建立微分方程	124
4.3 Logistic 模型和 Scheafer 模型	132
4.4 跳伞问题	137
4.5 猪的销售时机	143
4.6 天体运行的轨道和两个宇宙速度	148
附录 例题索引	158
参考文献	160

1. 极限方法

微积分的理论基础是极限概念与极限方法,微分(导数)和积分实际上都是特殊形式的极限。由于极限定义显得繁琐和冗长,而且在不同的情况(数列、函数、自变量的不同变化过程)下,定义在表述上也有差异,初学者常常会在 $\epsilon \rightarrow \delta, \epsilon \rightarrow N$ 的密林里迷失道路,但是如果能够撩开文字的帷幔,洞察概念的实质,那么极限无非是逼近的同义语,极限方法就是用已知的量去逼近未知的量,逐步去求它的愈来愈准确的近似值。下面就是极限方法的三个实例。

1.1 π 的计算

逼近的思想,远在古代就已被一些学者所认识,并且将其应用于实际问题的解决,例如关于圆周率 π 值的计算就是一个典型的例子。下面我们介绍古希腊的数学家阿基米德(公元前 287? ~ 212)和我国三国时的数学家刘徽如何应用逼近方法去计算 π 的。

大约在远古时期,人们已开始认识到圆的周长与直径的比是一个常数,一些文明古国最早均取 $\pi = 3$,我国的《周髀算经》也说“径一周三”,但是在实践中逐渐发现以此计算得到的圆周长和圆面积均嫌小。后来进一步认识到可以用圆内接或外切多边形来近似代替圆以确定 π 值,阿基米德方法所依据的思想就是:

一个圆的周长介于外切和内接正 n 边形的两个周长之间, n 越大,圆周长与两个正 n 边形的周长的偏差越小,

分别计算这两个正 n 边形的周长，边数之多达到足以使它们之差小于一个可以忽略不计的数量 ϵ ，这时把圆的周长定为其中的一个正 n 边形的周长，则与圆的真正周长的偏差也小于 ϵ 。

上面的思想用现代的数学语言来表示就是：

设圆周长为 S ，圆的内接和外切正 n 边形的周长分别为 a_n 和 b_n ，如图 1—1—1，内接和外切正 n 边形的边长分别为 AB 和 $A'B'$ ，圆的半径为 R ，则

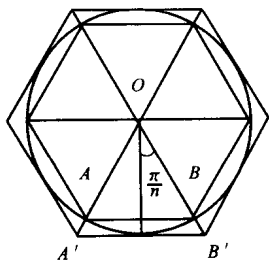


图 1—1—1

$$AB = 2 \left(R \cdot \sin \frac{\pi}{n} \right)$$

$$A'B' = 2 \left(R \cdot \tan \frac{\pi}{n} \right), \text{ 于是}$$

$$a_n = nAB = 2nR \sin \frac{\pi}{n},$$

$$b_n = nA'B' = 2nR \tan \frac{\pi}{n}, a_n < S < b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2nR \left(\tan \frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2R\pi \left[\frac{\tan \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \right] \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = S$$

阿基米德的贡献就在于指出了一种可以计算正 n 边形周长的迭代公式，即由下面的(1—1—1)式表示的阿基米德算法。

$$\begin{cases} b_{2n} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} \\ a_{2n} = \sqrt{a_nb_{2n}} \end{cases} \quad (1-1-1)$$

(1—1—1)式可以证明如下:

如图 1—1—2, 记圆的内接正 n 边形边长 $AB = e$, 外切正 n 边形边长 $A'B' = g$, 圆的内接正 $2n$ 边形边长 $C'B = e'$ 。

在 B 点作圆的切线交 $A'B'$ 于 M , 则易知 $C'M + MB$ 为外切正 $2n$ 边形的边长, 且 $C'M = MB$, 记 $C'M + MB = g'$, 于是 $\triangle MBB' \sim \triangle OC'B'$,

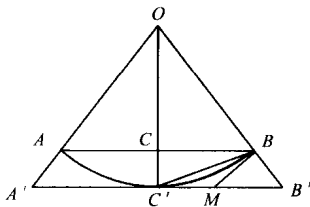


图 1—1—2

$$\frac{MB}{MB'} = \frac{OC'}{OB'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

$$\text{即 } \frac{2MB}{2(C'B' - C'M)} = \frac{C'M + MB}{A'B' - (C'M + MB)} = \frac{g'}{g - g'}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{e}{g}$$

$$\Rightarrow g' = \frac{eg}{e + g}, b_{2n} = (2n)g' = 2n \left(\frac{eg}{e + g} \right)$$

$$= 2 \frac{(ne)(ng)}{ne + ng} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$$

这就是(1—1—1)式的第一式, 又因为

$$\triangle AC'B \sim \triangle C'MB, \frac{AB}{C'B} = \frac{C'B}{C'M}$$

$$\text{即 } \frac{e}{e'} = \frac{e'}{g'/2} \Rightarrow (e')^2 = \frac{eg'}{2}$$

$$a_{2n} = 2ne' = 2n\sqrt{\frac{eg'}{2}} = \sqrt{(ne)(2ng')} = \sqrt{a_nb_{2n}}$$

这就是(1—1—1)式的第二式,

阿基米德选用正六边形作为他最初的正多边形,其周长

$a_6 = 6R, b_6 = 4\sqrt{3}R$, 根据(1—1—1)式可以算得:

$$a_{12} = 6.211\ 657R \quad b_{12} = 6.430\ 781R$$

$$a_{24} = 6.265\ 257R \quad b_{24} = 6.319\ 320R$$

$$a_{48} = 6.278\ 700R \quad b_{48} = 6.292\ 172R$$

$$a_{96} = 6.282\ 064R \quad b_{96} = 6.285\ 429R$$

$$\text{因为 } S = 2\pi R \Rightarrow 3.141\ 032 = \frac{a_{96}}{2R} < \pi < \frac{b_{96}}{2R} = 3.142\ 715$$

阿基米德当时为了改进车轮和机械上的应用,所以他只

取 $3\frac{10}{70} \approx 3.142\ 857$ 或 $3\frac{10}{71} \approx 3.140\ 845$ 作为 π 的近似值。

我国三国时的数学家刘徽在他的《九章算术注》(公元263年)中,用圆内接正多边形的面积去逼近圆的面积,从而求得 π 的近似值,他证明的如下三个关系式是他的方法的依据。

(σ 、 R 分别表示圆的面积和半径, e_n 、 a_n 和 p_n 分别表示圆内接正 n 边形的边长、周长和面积)

$$e_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - e_n^2}} \quad (1-1-2)$$

$$p_{2n} = \frac{1}{2}a_n \cdot R \quad (1-1-3)$$

$$p_{2n} < \sigma < p_{2n} + (p_{2n} - p_n) \quad (1-1-4)$$

证明是这样的:

如图 1—1—3 所示, $AB = e_n$, $AD = e_{2n}$, $CD = OD - OC$

$$= R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{e_n}{2}\right)^2}$$

$$e_{2n} = AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\frac{e_n}{2}\right)^2 + \left[R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{e_n}{2}\right)^2}\right]^2}$$

$$= \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \left(\frac{e_n}{2}\right)^2}} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - e_n^2}}$$

这就是(1—1—2)式。

$$\triangle AOD \text{ 面积} = \frac{1}{2} AC \cdot OD = \frac{1}{2} \cdot$$

$$\frac{e_n}{2} \cdot R$$

$$P_{2n} = 2n \cdot \triangle AOD \text{ 面积} =$$

$$2n \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{e_n}{2} \cdot R \right) = \frac{1}{2} (ne_n) R = \frac{1}{2} a_n R$$

这就是(1—1—3)式。

扇形 OAD 面积 $< \triangle OAD$ 面积 $+ \triangle AED$ 面积

$\triangle AED$ 面积 $= \triangle ACD$ 面积 $= \triangle OAD$ 面积 $- \triangle OAC$ 面积
 $\Rightarrow$ 扇形 OAD 面积 $< \triangle OAD$ 面积 $+ (\triangle OAD$ 面积 $- \triangle OAC$ 面积), 上式两边分别乘以 $2n$, 即得到

$$\sigma < P_{2n} + (P_{2n} - P_n)$$

而 $\sigma > P_{2n}$ 是显然的, 所以

$$P_{2n} < \sigma < P_{2n} + (P_{2n} - P_n)$$

这就是(1—1—4)式。

在(1—1—2)式中令 $R = 1$, 则在单位圆中

$$e_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - e_n^2}} \quad (1-1-5)$$

刘徽当时由(1—1—5)式从 $e_6 = 1$ 开始进行计算

$$e_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0.517\ 638$$

$$e_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - e_{12}^2}} = 0.261\ 052$$

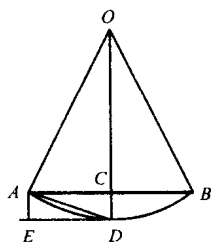


图 1—1—3

$$e_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - e_{24}^2}} = 0.130\ 806$$

$$e_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - e_{48}^2}} = 0.065\ 438$$

再由(1—1—3)式,单位圆的内接正 192 和 96 边形的面积:

$$P_{192} = \frac{1}{2} a_{96} = \frac{1}{2} \cdot 96 e_{96} = 3.141\ 024$$

$$P_{96} = \frac{1}{2} a_{48} = \frac{1}{2} \cdot 48 e_{48} = 3.139\ 344$$

再由(1—1—4)式

$$P_{192} < \pi R^2 = \pi < (P_{192} - P_{96}) + P_{192}$$

$$\text{即 } 3.141\ 024 < \pi < 3.142\ 704$$

所以刘徽取 $\pi \approx 3.14$ 作为圆周率的近似值,被称为“徽率”。到南北朝时代,祖冲之(公元 429~500)更进一步求得 $3.141\ 592\ 6 < \pi < 3.141\ 592\ 7$ 。在长达 1 000 年的时间中,这一精度一直处于世界的领先地位,可惜他当年使用的方法已经失传了。

18 世纪以来,对于 π 值的计算大都应用级数,这比古代用正多边形逼近的方法要简单和快捷,特别是电子计算机的问世,使 π 值的计算达到惊人的准确程度,1961 年已经精确到小数点后 100 265 位。但是从实际应用的观点看来,十分精确的 π 值并无太大的意义,一般科技问题应用 π 值到小数点后 4 位或 5 位已经足够了。例如一个直径 1.5 m 的油罐,若采用阿基米德的 $\pi \approx \frac{22}{7}$ 来计算其周长,误差也不会超过 2 mm,这在施工技术中是微不足道的。对于微积分的初学者来说,重温古代学者关于 π 值的计算,其意义在于丰富和深化我们对于极限概念和极限方法的理解。

1.2 指数增长和 e

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 是微积分教科书中两个重要极限之一,

它的重要性体现在什么地方? 未必每个学过微积分的人都很清楚。

像许多数学知识一样, 极限 e 有它的实际背景, 我们来看自然界存在的一类常见现象: 一种物质的数量变化(增加或减少)的速度与它当时的数量成正比。例如: 放射性元素的衰变; 药物在人体内的吸收; 在一定生存条件下生物种群(细菌、昆虫、鱼类、动物、甚至人类)成员数量的变动; ……。现在就以放射性元素的衰变为例, 讨论这类现象变化过程的共同规律。某种放射性元素(例如镭)质量为 m_0 , 由实验知道, 放射速度 v 与当时所剩余的质量 m 成正比, 比例常数 λ 称为此种元素的衰减系数, 求经过时间 t 以后, 所剩余的质量 $m(t)$ 。

放射过程中质量 m 不断减少, 因而放射速度不断减慢, 我们采用极限方法来求出函数 $m(t)$ 。在某种意义上, 极限方法是唯一可以采用的方法。

把 $[0, t]$ 这段时间分为相等的 n 个小段, $[0, t/n]$ 、 $[t/n, 2t/n]$ 、 $\cdots$ 、 $[(n-1)t/n, t]$ 。对于相当大的 n , 在每一小段上, 质量变化很小, 放射速度 v 也就近似于不变, 于是在第一小段 $[0, t/n]$ 内, 放射的质量近似地为:

$$v_0 \frac{t}{n} = \lambda m_0 \frac{t}{n}$$

其中, v_0 为初始时刻 $t=0$ 时的放射速度, 第一小段末所剩的质量为:

$$m_0 - \lambda m_0 \frac{t}{n} = m_0 \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)$$

它也是第二小段 $\left[\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}\right]$ (近似) 的初始质量, 类似的计算给出, 这一小段时间内放射的质量为:

$$v\left(\frac{t}{n}\right)\frac{t}{n} = \lambda m_0 \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right) \frac{t}{n}$$

所以第二小段末所剩质量为:

$$m_0 \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right) - \lambda m_0 \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right) \frac{t}{n} = m_0 \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^2$$

依此类推, 第 n 个小段末, 即整个 $[0, t]$ 这段时间末, 所剩质量就是:

$$m_0 = \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \quad (1-2-1)$$

显然, 由于我们假设在每一小段时间内, 放射性元素的质量从而速度是不变的, 所以 (1-2-1) 式这个数值只是近似的, 但是容易看出, 当 n 越大, 每一小段时间越短, 质量及速度的变化越小, 所以数值 (1-2-1) 就越接近于精确值。

由于从物理意义上说, 经过时间 t 以后, 所剩的质量是确定的, 所以 (1-2-1) 式的极限是存在的, 它就是所求的 $m(t)$, 即:

$$m(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_0 \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n$$

在上式中, 令 $-\frac{n}{\lambda t} = x$, 则

$$\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-\lambda t x} = \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{-\lambda t}$$

且当 $n \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$, 于是

$$\begin{aligned} m(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} m_0 \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \\ &= m_0 \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{-\lambda t} = m_0 e^{-\lambda t} \end{aligned}$$