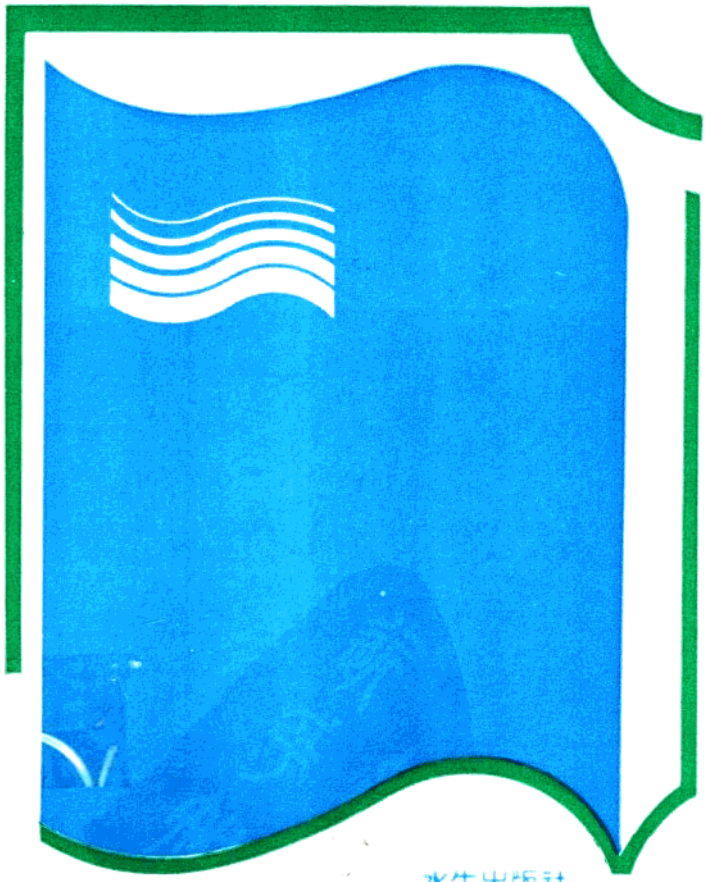
數學科技叢書14 ㊥

微積分4500題正解 ㊥

編輯顧問：朱建正　張海潮



水牛出版社

編者的話

"數學分析4500題"(凡異出版社印)一書，自出版以來，即受到各大專院校師生所採用。尤其以數學分析教學的師生，常以試解該書中的習題，視為掌握數學分析基本知識和基本技能的一項重要方法。

該書有4462道習題，內容包括：函數與極限、單變量函數的微分學、不定積分、定積分、級數，多變量函數的微分學、帶參變量積分以及重積分與曲線積分等等。概括了數學分析的全部主題。

"微積分4500題正解"中冊是將"數學分析4500題"三、四、五章中的部分習題正解整理出來，提供給讀者。目的在使理工科學生能透過有系統編排的習題去了解學習的成果及微積分的精義。本書最大的優點就在於每章節之前都有精簡扼要的重點整理，可使讀者節省許多查書的時間。並且留下部分習題，穿插於正解之間，使讀者研讀了多少，就能學會多少。透過不斷地演習，很快地就完全了解了。所以本書是一本很理想的微積分自修書。

習題數量繁多，內容豐富，深入淺出。其中部分習題難度極大，如果認真習作的話，可以深刻地了解基本概念，而且又可有效地提高運算能力；特別是有些難題還可以加強我們綜合分析的思維方法，正因如此，我們殷切地盼望讀者千萬不要輕易抄本書的解答，因為任何削弱獨立思考的作法，都是違背我們出版本書的原意，更何況解答並非一定標準，只適作為參考而已。

本書承蒙朱建正、張海潮老師細心指導，才能使本書的編輯工作倍加順利，特此感謝。此外，由於陳志榮、王立中同學協助整理，才能使本書順利完成，在此一併致謝。

編輯部

民國七十五年九月

目　錄

第三章 不定積分

§ 1 最簡單的不定積分

1° 不定積分的概念 若$f(x)$爲連續函數及 $F'(x)=f(x)$ 則

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

式中 C爲任意常數.

2° 不定積分的基本性質：

(a) $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$; (b) $\int d\Phi(x)=\Phi(x)+c$;

(c) $\int Af(x)dx=A\int f(x)dx$($A$=常數)；

(d) $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$。

3° 最簡積分表：

I. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C(n\neq -1)$; II. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C(x\neq 0)$;

III. $\int\frac{dx}{1+x^2}=\begin{cases}\text{arc tg } x+C,\\ -\text{arc ctg } x+C;\end{cases}$ IV. $\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$;

V. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\text{arc sin } x+C,\\ -\text{arc cos } x+C;\end{cases}$

VI. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm 1}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm 1}|+C$;

VII. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$ $(a>0)$; $\int e^x dx=e^x+C$;

VIII. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$; IX. $\int\cos x\,dx=\sin x+C$;

X. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\text{ctg } x+C$; XI. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\text{tg } x+C$;

XII. $\int\text{sh}x\,dx=\text{ch } x+C$; XIII. $\int\text{ch } x\,dx=\text{sh } x+C$;

XIV. $\int\frac{dx}{\mathrm{sh}^2x}=-\mathrm{cth}x+C$;

XV. $\int\frac{dx}{\mathrm{ch}^2x}=\mathrm{th}x+C$.

4° 積分的基本方法

(a)引入新變數法 若 $\int f(x)dx=F(x)+C$,

則 $\int f(u)du=F(u)+C$, 式中$u=\varphi(x)$.

(b)分項積分法 若 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$,

則 $\int f(x)dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx$.

(c)代入法 假設

$x=\varphi(t)$, 式中$\varphi(t)$及其導函數$\varphi'(t)$爲連續的,

則得 $\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

分部積分法 若u和v爲x的可微分函數。

則 $\int udv=uv-\int vdu$.

利用最簡積分表，求出下列積分*:

1628. $\int(3-x^2)^3dx$.

解 $\int(3-x^2)^3dx=\int(27-27x^2+9x^4-x^6)dx$

$=27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+C$.

1629. $\int x^2(5-x)^4dx$.

解 $\int x^2(5-x)^4dx=\int(625x^2-500x^3+150x^4-20x^5+x^6)dx$

$=\frac{625}{3}x^3-125x^4+30x^5-\frac{10}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7+C$.

1630. $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)dx$.

1631. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx$.

解 $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)dx=-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+C$.

*本意在敍述习題及其解答過程中，凡出現的函數，無論是被積函數還是原函數，均默認是在有意義的定義域上進行的，例如最簡積分表中Ⅰ里當$n\leqslant-2$時，要求$x\neq0$; Ⅳ中要求$|x|\neq1$; Ⅴ中要求$|x|<1$，當取負號時要求$|x|>1$; 等等，就未加聲明。在題解中也有相當多的類似情況，因此，如無特別聲明，在一般情形下，這些定義域是很容易被讀者確定的，此處就不再予以一一指明。——題解編者註。

1632. $\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx$.

解 $\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx=a\ln|x|-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2x^2}+C$.

1633. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$.

1634. $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$.

1635. $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx$.

解 $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx=\int\left(x^{-\frac{4}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}\right)dx$

$$=-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3\right)+C.$$

1636. $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$.

1637. $\int\frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}dx$.

1638. $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$.

解 $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx=\int\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^3}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)dx=\ln|x|-\frac{1}{4x^4}+C.$$

1639. $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$.

1640. $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$.

1641. $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx$.

1642. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

1643. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$.

解 $\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|+C.$$

1644. $\int(2^x+3^x)^2dx$.

1645. $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$.

解 $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx=\int\left[2\left(\frac{1}{5}\right)^x-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]dx$

$$=-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x+\frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x+C.$$

1646. $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.

1647. $\int(1+\sin x+\cos x)dx$.

1648. $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx$.

1649. $\int\operatorname{ctg}^2x dx$.

解 $\int\operatorname{ctg}^2x dx=\int(\csc^2x-1)dx=-\operatorname{ctg}x-x+C$.

解 $\int \frac{x\,dx}{4+x^4}=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{2^2+(x^2)^2}=\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{2}+C.$

1650. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$

1651. $\int (a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)\,dx.$

1652. $\int \operatorname{th}^2 x\,dx.$

解 $\int \operatorname{th}^2 x\,dx=\int\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right)dx=x-\operatorname{th}x+C.$

1653. $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx.$

1654. 證明：若 $\int f(x)\,dx=F(x)+C,$

則 $\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad (a\neq 0).$

證 由 $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ 得知 $F'(x)=f(x)$. 因而有 $F'(ax+b)=f(ax+b)$, 且 $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]=F'(ax+b)$, 於是

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]=f(ax+b),$$

所以 $\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$

求出下列積分：

1655 $\int \frac{dx}{x+a}.$

1656. $\int (2x-3)^{10}dx.$

1657. $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx.$

1658. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}.$

1659. $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}.$

解 $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(5x-2)^{-\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}}+C.$

1660+ $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx.$

解 $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx=\int (1-x)^{-\frac{3}{5}}dx=-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}+C.$

1661. $\int \frac{dx}{2+3x^2}.$

解 $\int \frac{dx}{2+3x^2}=\int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}x)^2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+C.$$

1662. $\int \frac{dx}{2-3x^2}.$

解 $\int \frac{dx}{2-3x^2}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}$

---

* 題號右上角帶"+"號表示題解答案與原習題集所附答案不一致，以後不再說明.

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{3}{2}}x}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|+C.$$

1663. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+C.$

1664. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$.

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\ln\left|x\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}x^2-1}\right|+C_1$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2-2}|+C.$

1665. $\int(e^{-x}+e^{-2x})dx$.　　1666. $\int(\sin5x-\sin5a)dx$.

1667. $\int\frac{dx}{\sin^2(2x+\frac{\pi}{4})}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+C.$

1668. $\int\frac{dx}{1+\cos x}$.

1669. $\int\frac{dx}{1-\cos x}$.

解 $\int\frac{dx}{1-\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}}=-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C.$

1670. $\int\frac{dx}{1+\sin x}$.

解 $\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{dx}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C.$

1671. $\int[\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]dx$.　1672. $\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}$.

1673. $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}$.

用適當地變換被稱函數的方法求求下列積分：

1674. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1675. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$.

解 $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int(1+x^3)^{\frac{1}{3}}d(1+x^3)=\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}+C.$

1676. $\int\frac{xdx}{3-2x^2}$.　　1677. $\int\frac{xdx}{(1+x^2)^2}$.

1678. $\int\frac{xdx}{4+x^4}$.

1679. $\int \frac{x^3dx}{x^8-2}$.

解 $\int \frac{x^3dx}{x^8-2}=\frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C$.

1680. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}=2\int \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}=2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}+C$.

1681. $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

1682. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

解 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=\int \frac{dx}{x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}}$

$=-\ln\left(\frac{1}{|x|}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)+C=-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+C$.

1683. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1684. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

解 $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{sgnx\,dx}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$

$=-\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}sgnx\,d\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}sgnx+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

1685. $\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.

1686. $\int \frac{x^2dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}$.

1687. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$.

解 由 $x(1+x)>0$ 知：$x>0$ 或 $x<-1$。當 $x>0$ 時，

$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}$

$=2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C$；

當 $x<-1$ 時，$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=-\int \frac{d[-(1+x)]}{\sqrt{(-x)[-(1+x)]}}$

$=-2\int \frac{d(\sqrt{-(1+x)})}{\sqrt{1+(\sqrt{-(1+x)})^2}}=-2\ln(\sqrt{-x}+\sqrt{-(1+x)})+C$.

總之，得 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=2sgnx\cdot\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})+C$.

1688. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

1689. $\int xe^{-x^2}dx$.

1690. $\int \frac{e^xdx}{2+e^x}$.

解 $\int \frac{e^xdx}{2+e^x}=\int \frac{d(2+e^x)}{2+e^x}=\ln(2+e^x)+C$.

1691. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

1692. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = -\int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}} = -\ln(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}})+C$.

1693. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

1694. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$

解 $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x\ln(\ln x)}$

$= \int \frac{d(\ln(\ln x))}{\ln(\ln x)} = \ln|\ln(\ln x)|+C$.

1695. $\int \sin^5 x\cos x dx$.

1696. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx$.

解 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx = -\int (\cos x)^{-\frac{3}{2}}d(\cos x) = \frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$.

1697. $\int \operatorname{tg} x dx$.

1698. $\int \operatorname{ctg} x dx$.

解 $\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x|+C$.

1699. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$.

1700. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx$.

解 當$|a|=|b|\neq 0$時,

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx = \frac{1}{|a|}\int \sin x\cos x dx = \frac{1}{2|a|}\sin^2 x+C_1$$

當 $|a|\neq|b|$ 時,

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin^2 x)}{\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2}}$$

$$= \frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2}+C = \frac{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}{a^2-b^2}+C.$$

1701. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}$.

1702. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 2} dx$

$= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C$.

1703. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

1704. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

解 $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

1705. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.

1706. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{2dx}{e^x + e^{-x}} = 2\int \frac{d(e^x)}{1 + (e^x)^2}$

$= 2\operatorname{arc\,tg}(e^x) + C$.

1707. $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}} dx$.

解 因爲

$\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x = (\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x)^2 - 2\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x$

$= \operatorname{ch}^2 2x - \frac{1}{2}\operatorname{sh}^2 2x = \frac{1 + \operatorname{ch}^2 2x}{2}$,

所以 $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}} dx = \int \frac{\frac{1}{4} d(\operatorname{ch} 2x)}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 2x}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(\operatorname{ch} 2x + \sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 2x}) + C_1$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\operatorname{ch} 2x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}\right) + C$.

1708. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}$.

1709. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1 + x^2} dx$.

1710. $\int \frac{dx}{(\operatorname{arc\,sin} x)^2 \sqrt{1 - x^2}}$.

1711. $\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$.

解 $\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$

$=\int[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\frac{1}{2}}d[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]$

$=\frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}}(x+\sqrt{1+x^2})+C$.

1712. $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

1713. $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$.

1714.$^+$ $\int\frac{x^{14}dx}{(x^5+1)^4}$.

1715. $\int\frac{x^{\frac{n}{2}}dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}$.

解 當 $n=-2$ 時,

$$\int\frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}dx=\int\frac{dx}{x\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x|+C;$$

當 $n\neq-2$ 時, $\int\frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}dx=\frac{2}{n+2}\int\frac{d\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)}{\sqrt{1+\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)^2}}$

$$=\frac{2}{n+2}\ln\left(x^{\frac{n+2}{2}}+\sqrt{1+x^{n+2}}\right)+C.$$

1716.$^+$ $\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

解 $\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)$

$=\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+C$.

1717. $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$.

解 $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}=\int\frac{d(\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)+C$.

1718. $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$.

1719. $\int\frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx$.

1720. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

1721. $\int x^2(2-3x^2)^2dx$.

解 $\int x^2(2-3x^2)^2dx=\int(4x^2-12x^4+9x^6)dx$

$$=\frac{4}{3}x^3-\frac{12}{5}x^5+\frac{9}{7}x^7+C.$$

1722. $\int\frac{1+x}{1-x}dx.$

1723. $\int\frac{x^2}{1+x}dx.$

1724. $\int\frac{x^3}{3+x}dx.$

1725. $\int\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx.$

解 $\int\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx=\int\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$

$$=x+\ln(1+x^2)+C.$$

1726. $\int\frac{(2-x)^2}{2-x^2}dx.$

1727. $\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx.$

解 $\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx=\int\frac{(x-1+1)^2}{(1-x)^{100}}dx$

$$=\int\left[(1-x)^{-98}-2(1-x)^{-99}+(1-x)^{-100}\right]dx$$

$$=\frac{1}{97(1-x)^{97}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{99(1-x)^{99}}+C.$$

1728. $\int\frac{x^6}{x+1}dx.$

1729. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$

1730. $\int x\sqrt{2-5x}\,dx.$

解 $\int x\sqrt{2-5x}\,dx$

$$=\int\left[-\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}\right](2-5x)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\int\left[-\frac{1}{5}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(2-5x)^{\frac{1}{2}}\right]dx$$

$$=\frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+C.$$

1731. $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}}.$

1732. $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx.$

解 $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int[(x^2+1)-1](1+x^2)^{\frac{1}{3}}d(1+x^2$$
$$=\frac{1}{2}\int\left[(1+x^2)^{\frac{4}{3}}-(1+x^2)^{\frac{1}{3}}\right]d(1+x^2)$$
$$=\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C$$
$$=\frac{12x^2-9}{56}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C.$$

1733. $\int\frac{dx}{(x-1)(x+3)}$.　　1734. $\int\frac{dx}{x^2+x-2}$.

1735. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

1736. $\int\frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$.

解 $\int\frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x^2-2}-\frac{1}{x^2+3}\right)dx$

$$=\frac{1}{10\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{5\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

1737. $\int\frac{xdx}{(x+2)(x+3)}$.　　1738. $\int\frac{xdx}{x^4+3x^2+2}$.

1739. $\int\frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$　$(a\neq b)$.

解 $\int\frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$
$$=\frac{1}{(a-b)^2}\int\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)^2dx$$
$$=\frac{1}{(a-b)^2}\int\left[\frac{1}{(x+a)^2}+\frac{1}{(x+b)^2}-\frac{2}{(x+a)(x+b)}\right]dx$$
$$=-\frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}\right)-\frac{2}{(a-b)^2}\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$$
$$=-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}+\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|+C.$$

1740. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$　$(|a|\neq|b|)$.

解 $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$
$$=\frac{1}{a^2-b^2}\int\left(\frac{1}{x^2+b^2}-\frac{1}{x^2+a^2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right)+C.$$

1741. $\int\sin^2xdx$.

解 $\int\sin^2xdx=\int\frac{1-\cos2x}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin2x+C.$

1742. $\int\cos^2xdx$.

1743. $\int\sin x\cdot\sin(x+a)dx$.

解 $\int \sin x \cdot \sin(x+a)dx$

$=\frac{1}{2}\int[\cos a-\cos(2x+a)]dx=\frac{x}{2}\cos a-\frac{1}{4}\sin(2x+a)+C.$

1744. $\int \sin 3x \cdot \sin 5x dx.$

1745. $\int \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}dx.$

1746. $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx.$

解 $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\int\left[\sin\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)\right]dx$

$=-\frac{1}{10}\cos\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)+C.$

1747. $\int \sin^3 x dx.$

1748. $\int \cos^3 x dx.$

解 $\int \cos^3 x dx=\int(1-\sin^2 x)d(\sin x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$

1749. $\int \sin^4 x dx.$

解 $\int \sin^4 x dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$

$=\frac{1}{8}\int(3-4\cos 2x+\cos 4x)dx$

$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

1750. $\int \cos^4 x dx.$

1751. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$ 解 $\int \operatorname{ctg}^2 x dx=\int(\csc^2 x-1)dx=-\operatorname{ctg}x-x+C.$

1752. $\int \operatorname{tg}^3 x dx.$

1753. $\int \sin^2 3x \cdot \sin^3 2x dx.$

解 因為 $\sin^2 3x\cdot\sin^3 2x=\frac{1}{2}(1-\cos 6x)\cdot\frac{1}{4}(3\sin 2x-\sin 6x)$

$=\frac{1}{8}(3\sin 2x-3\cos 6x\cdot\sin 2x-\sin 6x+\sin 6x\cdot\cos 6x)$

$=\frac{3}{8}\sin 2x+\frac{3}{16}\sin 4x-\frac{1}{8}\sin 6x-\frac{3}{16}\sin 8x+\frac{1}{16}\sin 12x$

所以，得 $\int \sin^2 3x\cdot\sin^3 2x dx=-\frac{3}{16}\cos 2x-\frac{3}{64}\cos 4x$

$+\frac{1}{48}\cos 6x+\frac{3}{128}\cos 8x-\frac{1}{192}\cos 12x+C.$

1754. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C$.

1755. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}$.

1756. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x}$.

1757. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx$.

1758. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \sec^2 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x)$

$= \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$.

1759. $\int \frac{dx}{1 + e^x}$.

1760. $\int \frac{(1 + e^x)^2}{1 + e^{2x}} dx$.

1761. $\int \operatorname{sh}^2 x dx$.

解 $\int \operatorname{sh}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} dx = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x - \frac{x}{2} + C$.

1762. $\int \operatorname{ch}^2 x dx$.

1763. $\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x dx$.

1764. $\int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x dx$.

解 $\int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{ch} 4x + \operatorname{ch} 2x) dx = \frac{1}{8} \operatorname{sh} 4x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C$.

1765. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x}$.

用適當的代換，求下列積分：

1766. $\int x^2 \sqrt[3]{1 - x} dx$.

解 設 $1 - x = t$，則 $x = 1 - t$，$dx = -dt$，故得

$$\int x^2 \sqrt[3]{1 - x} dx = -\int (1 - t)^2 t^{\frac{1}{3}} dt$$

$$= -\int \left(t^{\frac{1}{3}} - 2t^{\frac{4}{3}} + t^{\frac{7}{3}} \right) dt$$

$$= -\frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7} t^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{10} t^{\frac{10}{3}} + C = -\frac{3}{140} (9 + 12x + 14x^2)(1 - x)^{\frac{4}{3}} + C.$$

1767. $\int x^3 (1 - 5x^2)^{10} dx$.

1768. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2 - x}} dx$.

1769. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

解 設 $1 - x^2 = t$，則 $x^2 = 1 - t$，從而 $x^5 dx = \frac{1}{2} (x^2)^2 \cdot d(x^2) = -\frac{1}{2} (1 - t)^2 dt$，故得

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} (1 - t)^2 dt = -\frac{1}{2} \int \left(t^{-\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}} \right) dt$$

$$= -t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} t^{\frac{5}{2}} + C = -\frac{1}{15} (8 + 4x^2 + 3x^4) \sqrt{1 - x^2} + C.$$