Advanced Methods of Mathematics for Physics

高等数学物理方法

杨伯君 赵玉芳 编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高等数学物理方法

Advanced Methods of Mathematics for Physics

杨伯君　赵玉芳　编

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是供理科高年级和工科研究生学习“数学物理方法”课程后进一步学习之用。它重点介绍了近四十年来发展的非线性偏微分方程及其求解的方法。内容包括线性偏微分方程，KDV 方程及其反散射解法，非线性 Schrödinger 方程及其反散射解法，Bäcklund 变换与非线性叠加公式，解非线性方程的微扰法与变分法，以及非线性偏微分方法的数值计算方法。内容选材上有较大针对性，适宜于通信、电子与信息类专业学生选用，也可供其他专业人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学物理方法/杨伯君，赵玉芳编著．—北京：北京邮电大学出版社，2003

ISBN 7-5635-0748-5

Ⅰ．高…　Ⅱ．①杨…②赵…　Ⅲ．非线性偏微分方程—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O175.29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 077267 号

书　　名：高等数学物理方法
主　　编：杨伯君　赵玉芳
责任编辑：张学静
出 版 者：北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 10 号)
　　　　　邮编：100876　发行部电话：(010)62282185　62283578(传真)
　　　　　E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京通州皇家印刷厂
开　　本：850 mm × 1 168 mm　1/32　　印　　张：7.75
印　　数：1—3 000 册　　字　　数：198 千字
版　　次：2003 年 10 月第 1 版　2003 年 10 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-0748-5/O·56　　定价：14.00 元

序

(Preface)

工科硕士生和理科本科高年级学生均要学习“数学物理方法”这一课程,该课程主要介绍线性偏微分方程及其解法并介绍方程解的基本性质,也介绍求解所必要的一些其他数学知识,如复变函数和 Fourier 变换等。在线性偏微分方程中,主要介绍二阶线性偏微分方程,这些方程分为三类:以波动方程为代表的双曲型方程(Hyperbolic Equation);以热传导方程为代表的抛物型方程(Parabolic Equation),这两类方程都是随时间发展的,称为发展方程。另一类是以泊松(Poisson)方程为代表的椭圆型方程(Elliptic Equation),它描述空间一种稳定的分布状态,对这些方程求解的一种最常用的方法是分离变量法(The Method of Separation of Variables),将偏微分方程化为一些标准的常微分方程,他们有一些标准化的解,就是各种特殊函数,主要是球函数(Spherical Function)和柱函数(Cyclindrical Functions),这两类特殊函数广泛应用于物理和工程问题中,对这些函数性质的介绍也是数理方法的重要内容。

随着科学技术的发展,物理学与各种技术学科目前已从线性问题深入到非线性问题,尽管一些非线性研究从 19 世纪末已开始,但当时将非线性问题看成一种个性极强、很难处理的问题,似乎每一个非线性方程都有各自的特殊解法,很难有共同的方法和技术来求解,自然也很难形成一门课来进行讲述。

从20世纪60年代开始,对非线性现象的研究发生了根本性的变化,发现许多不同的非线性偏微分方程有某些共同的性质,有共同的求解方法和性质相似的解,这样就逐步形成了一个独立的应用数学新学科,称为非线性科学。其应用已深入物理学许多分支和工程技术的不同学科,包括流体力学(Fluid Dynamics),非线性光学(Nonlinear Optics),固体力学(Solid Machanics),等离子体物理(Plasma Physics),量子场论(Quantum Field Theory),光纤通信(Optical Fiber Communication)以及化学与生物系统(Chemical and Biological Systems)等。因此作为一般数学物理方法课程的继续,高等数学物理方法主要讲述近四十年来发展起来的非线性偏微分方程及其解法。

目前已引入上百种非线性偏微分方程,这些方程大致分为两类:一类是所谓可积的或微不可积的方程,这些方程具有孤子(Soliton)或类孤子(Like Soliton)解,他们都可以用反散射法求解。另一类方程属于所谓不可积的,都存在一定耗散结构,其解可出现混沌(Chaos)现象,本课程将重点介绍第一类方程。

本书是作者在北京邮电大学为研究生讲述"高等数学物理方法"课程基础上整理而成的。其主要目的是作为学生教材,因此不追求理论体系的完整性,而注重书的可读性和内容的实用性。

本书内容安排如下:

第1章介绍线性偏微分方程,其目的是为本书的完备性,使部分没学过初等数学物理方法的工科学生能直接进入本书的学习,另一原因是从线性偏微分方程中引入一些概念和求解方法,在非线性偏微分方程中也可以应用,或进行类比,以便更好地了解非线性方程的性质及其解法。

第2章引入著名的KdV方程,讨论其单孤子和双孤子解,孤子互作用与方程守恒律。

第3章从解KdV方程出发,详细介绍解非线性偏微分方程的

反散射法。

第4章介绍在研究光纤通信系统中十分有用的非线性Schrödinger方程,并介绍此方程的反散射解法。

第5章介绍另一种有可能得到非线性方程解析解的方法即Bäcklund变换方法,并讨论反散射法与Bäcklund变换两种方法的对应关系。

后面3章介绍非线性偏微分方程的近似解法,其中包括变分法、微扰渐进法和数值解。

本书具有较大的针对性,适宜通信、电子与信息类专业学生选用。

由于编著者水平有限,不妥与错误之处在所难免,欢迎读者批评指正。

目　　录

绪论……………………………………………………………… 1

第 1 章　线性偏微分方程……………………………………… 4

1.1　偏微分方程的基本概念…………………………………… 4

1.2　三种典型的线性偏微分方程……………………………… 7

1.3　定解问题的适定性概念 ………………………………… 11

1.4　线性算子和叠加原理 …………………………………… 15

1.5　积分变换方法 …………………………………………… 18

1.6　Green 函数的方法 ……………………………………… 29

习题……………………………………………………………… 33

第 2 章　KdV 方程 …………………………………………… 35

2.1　KdV 方程的引出 ………………………………………… 35

2.2　孤立波与孤子 …………………………………………… 39

2.3　变换方程方法解 KdV 方程 …………………………… 42

2.4　孤立波的相互作用 ……………………………………… 47

2.5　KdV 方程的无穷多个守恒律 ………………………… 51

习题……………………………………………………………… 57

第 3 章　解 KdV 方程的反散射方法………………………… 59

3.1　Schrödinger 方程的散射与反散射问题………………… 60

3.2　散射数据随时间 t 的发展 ………………………… 63

3.3　反散射法解 KdV 方程 ………………………………… 69

3.4　Gelfand-Levitan 积分方程的导出 …………………… 80

3.5 Lax 对反散射方法的推广 ········· 84
习题 ········· 91
第 4 章 非线性 Schrödinger 方程 ········· 93
4.1 包络函数的波方程,单孤立波解 ········· 93
4.2 非线性 Schrödinger 方程的导出 ········· 98
4.3 非线性 Schrödinger 方程的反散射解法 ········· 105
4.4 非线性 Schrödinger 方程的守恒律 ········· 121
4.5 AKNS 发展 ········· 125
习题 ········· 129
第 5 章 Bäcklund 变换 ········· 131
5.1 Bäcklund 变换的定义和实例 ········· 132
5.2 Sine-Gordon 方程和 KdV 方程的 BT ········· 135
5.3 BT 与 AKNS 系统 ········· 139
5.4 非线性叠加公式 ········· 144
5.5 Bäcklund 变换与反散射法的关系 ········· 151
习题 ········· 157
第 6 章 解非线性方程的微扰法 ········· 159
6.1 绝热微扰法 ········· 159
6.2 微扰反散射方法 ········· 163
6.3 NLS 方程的孤子色散微扰 ········· 166
6.4 量子非线性 Schrödinger 方程的微扰解 ········· 168
习题 ········· 173
第 7 章 解非线性方程的变分法 ········· 174
7.1 变分法的概念 ········· 174
7.2 非线性 Schrödinger 方程的变分解法 ········· 182
7.3 变分法在全光通信系统中的应用 ········· 190
习题 ········· 204

第 8 章 非线性偏微分方程的数值计算方法 ······ 206
8.1 有限差分法 ······ 207
8.2 分步 Fourier 变换法 ······ 216
8.3 短周期色散管理孤子的传输特性 ······ 225
参考文献 ······ 232

绪　论
(Introduction)

这里简单回顾一下非线性偏微分方程和孤子研究的历史.

孤立波现象的发现最早可以追溯到19世纪40年代,1844年英国工程师J.S.Russell在对英国科学协会提供的报告"Report on Wave"中介绍了他1834年见到的一个特殊的水波现象:他发现当一条船在一个运河上突然停止时,由船所推动的水波并没有停止,而是在船头形成一个轮廓分明的峰状水波,它以每小时8~9英里的速度不变形地沿运河继续前进,Russell将这种维持在水面上向前平移的孤立水峰称为Solitary Wave.对这种孤立波的理论解释,当时数学上很难给出,因为线性波动方程没有孤立波解.

1895年,瑞典Amsterdam大学D.J.Korteweg和G.deVries首次提供一个数学模型去解释Russell观察到的现象,推出一个浅水表面波满足的动力学方程,Kortewg - deVries方程,其形式为:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{c}{h}\left(\varepsilon+\frac{3}{2}u\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \qquad (0.0.1)$$

其中,$c=\sqrt{gh}$,$\sigma=h\left(\frac{h^2}{3}-\frac{T}{g\rho}\right)-\frac{1}{3}h^3$,$g$为重力加速度,$h$为水深度,$\rho$为水密度,$T$为表面张力,$\varepsilon$为一个小参数,若忽略表面张力$T$,变数改为$u(x^*,t)$,$x^*=x+(\varepsilon/h)ct$,忽略*号,方程(0.0.1)可以改为:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{c}{h}\left(\frac{3}{2}u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) \qquad (0.0.2)$$

利用行波法加无限远处迅速衰减边界条件,可以从方程(0.0.2)中

引入孤立波解，当时认为两个孤立波碰撞时由非线性作用波形不稳定，这种特解描述波没有太大意义，以致 KdV 方程和相应孤立波解长期未受到应有的重视.

直到 1960 年，Gardner 等人在研究等离子体的磁流体波时也引入 KdV 方程，1964 年 Zabusky 和 Kruskal 在利用 KdV 方程讨论磁流体孤立波互相碰撞时，发现波的形状与速度不变，第一次引入 Soliton的概念.与此同时，人们发现其他一些方程也有孤立波解，如 1962 年 Perring 和 Skyrme 发现的 Sine-Gordon 方程：

$$u_{tx} = \sin u$$

也有孤立波解，并用来研究基本粒子的性质.另外还发现其他一些方程也有孤立波解，如：

非线性 Schrödinger 方程

$$iu_x + \frac{1}{2}u_{tt} + |u|^2 u = 0$$

气体动力学的 Burgers 方程

$$u_t + uu_x - \upsilon u_{xx} = 0$$

mKdV 方程

$$u_t + 6u^2 u_x - u_{xxx} = 0$$

Boussinesq 方程

$$u_t + u_x - \frac{1}{2}\alpha uu_x - \frac{1}{6}\beta u_{xxt} = 0$$

等，1967 年，Gardner 等人将量子力学中反散射方法用于 KdV 方程求解.通过将非线性方程变化为几个线性方程而求出 KdV 方程的解析解，对孤子的存在给出了更严格的数学证明.

用反散射法解 KdV 方程时，将 KdV 方程解变成求 Schrödinger 方程的散射与反散射问题.开始有人认为能用这种方法解 KdV 方程是由于这两个方程之间的巧妙关系，仅是一种特殊情况.1968 年 Lax 推广了 Gardner 等人的方法，引入了 Lax 对，为利用反散射

法解决更多非线性演化方程开辟了道路.

1972 年, Zakharov 和 Shabat 将反散射法用于解非线性 Schrödinger 方程,给出非线性 Schrödinger 方程的解析解,此后人们发现若干非线性偏微分方程均可以用反散射法求解,反散射法成为求解非线性偏微分方程一种广泛有效的方法.

1973 年, Hazagawa 与 Tappert 研究光脉冲在光纤传输时,认为色散与非线性互作用在光纤中可以形成孤子,其演变满足非线性 Schrödinger 方程,并指出在光通信中利用孤子为载体,其通信容量可以比线性系统高 1 ~ 2 个数量级,促进通信领域研究人员对孤子研究的兴趣,这是我们开设“高等数学物理方法”这门课,并编写此教科书的主要原因,本书在内容选择上将有较大的针对性.

第 1 章　线性偏微分方程
(Linear Partial Differential Equation)

线性偏微分方程在应用数学、物理学和工程学科中有广泛应用,对于没有学过初等数学物理方法的读者,要学习非线性偏微分方程,适当了解线性偏微分方程及其某些解法是必要的.另外在线性方程中引入的一些概念和求解方法,在研究非线性方程中可以应用或进行对比,以便更好地了解非线性方程的性质及其解法.

本章首先介绍偏微分方程的一些基本概念,然后介绍三种典型的二阶线性偏微分方程,讨论定解问题的适定性概念、线性算子与线性叠加原理,最后介绍求解线性偏微分方程的几种方法,包括 Fourier 变换与 Laplace 变换,并介绍解非齐次方程的 Green 函数的方法.

1.1　偏微分方程的基本概念

若研究过程中只有一个自变量,函数变化引出的方程是常微分方程.如质点运动的牛顿运动定律

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F(x)\tag{1.1.1}$$

m 为质点质量,F 为质点所受的力.又如由电阻 R,电容 C 和电感 L 组成的回路,其中电荷 Q 的变化满足方程

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}Q=E_0\sin\omega t\tag{1.1.2}$$

E_0 为电动势的振幅,以上两方程均为常微分方程.

当一个函数包括多个自变量情况,函数变化列出方程为偏微分方程,如函数 $u(t,x,y)$,它的偏微商 $u_t, u_x, u_y, u_{tt}, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \cdots$ 形成各种偏微分方程:

冲击波方程

$$u_t + uu_x = 0 \tag{1.1.3}$$

一维波动方程

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(t,x) \tag{1.1.4}$$

静电场 Laplace 方程

$$\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1.1.5}$$

非线性 Schrödinger 方程

$$iu_x + \frac{1}{2} u_{tt} + |u|^2 u = 0 \tag{1.1.6}$$

KdV 方程

$$u_t + \alpha uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.1.7}$$

Boussinesq 方程

$$u_{tt} - u_{xx} + (3u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0 \tag{1.1.8}$$

其中 c,α 为常数,$f(x,t)$为已知函数,u 为未知函数,u_{xxx}是 u 对 x 的三阶导数.方程中含偏导数最高阶数为方程的阶.方程(1.1.3)为一阶偏微分方程,方程(1.1.4)、(1.1.5)和(1.1.6)为二阶偏微分方程,方程(1.1.7)为三阶偏微分方程,方程(1.1.8)为四阶偏微分方程.若方程中每项只有函数或导数一次项,没有两者乘积者为线性方程,否则为非线性方程.方程(1.1.4)与(1.1.5)为线性方程,其他四个为非线性方程.方程(1.1.3)与(1.1.7)中 uu_x 项,方程(1.1.6)中$|u|^2u$项,均为非线性项.方程中存在自由项 $f(x,t)$ 为非齐次方程(Inhomogeneous Equation),否则为齐次方程.方程(1.1.4)为非齐次的线性偏微分方程,其他 5 个方程为齐次方程.

任何一个自变量的函数，若满足方程，则称其为方程的解，例如：

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \tag{1.1.9}$$

它满足 Laplace 方程(1.1.5)，它是该方程的解.

一个偏微分方程，它有无穷多个解，一般一阶偏微分方程依赖一个任意函数，二阶偏微分方程依赖两个任意函数，为了确定这些任意函数，常需要一定边界条件或初始条件，这个问题将在 1.3 节中介绍.

现在看一下简单偏微分方程一般解的形式.

例 1.1.1 设 $u=u(x,y)$，求二阶线性方程

$$u_{xy}=0 \tag{1.1.10}$$

的一般解.

解：将方程改写为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

对 x 积分

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x=\int 0\mathrm{d}x+\varphi(y)=\varphi(y)$$

其中 $\varphi(y)$是 y 的任意函数，再对 y 积分

$$u(x,y)=\int\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=\int\varphi(y)\mathrm{d}y+f(x)=f(x)+g(y) \tag{1.1.11}$$

其中 $f(x)$和 $g(y)$是两个任意一次可微函数.

例 1.1.2 求一维波动方程

$$u_{tt}=c^2u_{xx} \tag{1.1.12}$$

的通解.

解： 作变换引入 $\xi=x+ct,\eta=x-ct$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)$$

同理有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

代回方程(1.1.12)得出

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{1.1.13}$$

从方程(1.1.10)一般解得出方程(1.1.12)的通解

$$u = f(\xi) + g(\eta) = f(x + ct) + g(x - ct) \tag{1.1.14}$$

$f(x+ct)$表示在 x 负方向传播的波,$g(x-ct)$表示在 x 正方向传播的波,f,g 是方程的行波解,这种解法为行波法.

为完全确定问题的解,除方程外还需要一定定解条件,定解条件包括初始条件(Initial Conditions)和边界条件(Boundary Conditions),初始条件是 $t=0$ 时函数形式,边界条件是函数在 x,y 界面上的形式.

偏微分方程(称泛定方程)加上相应的定解条件就构成数学物理方法中的一个定解问题.

数学物理方法的任务就是求定解问题的解,当一个问题中,其定解条件不完全,应用数学中称 ill posed problems,近几年 ill posed problems 理论已有较大发展,其讨论已超出本课程的内容,本书将不讨论.

1.2 三种典型的线性偏微分方程

在线性偏微分方程中,用的最广泛的是二阶线性偏微分方程,它们有一些典型的共同解法,这些方程分 3 类,它们是:

1. 以波动方程为代表的双曲线方程

$$u_{tt} = c^2\Delta u + f(x, y, x, t)$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \tag{1.2.1}$$

2. 以扩散方程为代表的抛物线方程

$$u_t = \alpha^2\Delta u + f(x, y, z, t) \tag{1.2.2}$$

3. 以 Poisson 方程为代表的椭圆方程

$$\Delta u = f(x, y, z) \tag{1.2.3}$$

齐次方程为 Laplace 方程 $\Delta u = 0$.

许多运动过程的物理性质不同,但数学关系上常常可以用上述三类方程来描述.如声波在空气中传播、弹性体的振动传播、电磁波在真空中传播都可以用波动方程来描述,其差别仅表现为速度不同.热量的传递、物质的扩散都可以用扩散方程来描述.而一切稳态分布,包括电磁场分布、强度场分布、流线场分布都可以用 Poisson 方程来描述.

这些方程都可以由不同的物理过程中导出.这里我们讨论自由电磁场问题,通过 Maxwell 方程导出这些方程.

当空间没有自由电荷时,描述介质中电磁场变化的 Maxwell 方程的微分形式为:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{1.2.4}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.2.5}$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon\mathbf{E}) = 0 \tag{1.2.6}$$

$$\nabla \cdot (\mu\mathbf{H}) = 0 \tag{1.2.7}$$

线性均匀介质条件 $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, ε 为介电常数, μ 为导磁系数, σ 为电导率,线性介质三参数为常数.

对方程(1.2.4)取旋度,利用式(1.2.5)与式(1.2.6)可以得到

$$\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0 \tag{1.2.8}$$