

高等学校试用教材

中学数学教材教法

分 论

十三院校协编组编

高等教育出版社

中等数学教材教法

分 论

十三院校协编组编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是高等师范院校数学系“中学数学教材教法”课程试用教材的“分论”部分。

本书分代数、初等函数、初等几何、平面解析几何、排列组合与概率初步、微积分初步等六章。各章都是从现行中学数学教学大纲和统编教材的基本内容出发,运用“总论”中所提出的数学教学基本要求,结合各分科内容的具体安排和特点,以及学生的心理特点,对各分科的教学理论、方法以及一些典型教材的具体教学进行了论述和分析。

本书可供高等师范院校数学系学生、中等学校数学教师学习和参考。

本书原由人民教育出版社出版。1983年3月9日,上级同意恢复“高等教育出版社”,本书今后改用高等教育出版社名义继续印行

高等学校试用教材
中学数学教材教法
分 论
十三院校协编组编

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京顺义县印刷厂印装

开本 350×1168 1/32 印张 13.125 字数 310,000

1981年12月第1版 1986年3月第7次印刷

印数 191,381-242,400

书号 13010·0698 定价 2.35 元

前 言

这套《中学数学教材教法》教材，是由北京师院、广西师院、上海师院、福建师大、北京师大、华东师大、东北师大、甘肃师大、江苏师院、华南师院、武汉师院、天津师院、湖南师院等十三院校数学系的中学数学教研室集体协作编写的。我们共同讨论、拟定了编写大纲，分工编写了初稿，并在教育部师范处和人民教育出版社的大力支持和帮助下，召开了审稿会，对初稿各章进行了逐章的审议，提出了修改意见。经过各编写单位再次修改，又委托专人进行了最后的修订、统稿。经有关人员审核后，分《总论》、《分论》两部分出版，供高等师范院校数学系及有关人员使用、参考。

在写稿的过程中，由于我们是集体协作编写的，尽管我们始终坚持共同讨论、取长补短，在充分交换意见的基础上分工合作，但在各章内容的编写风格和格调上，还免不了存在着一定的差异，从整个内容的安排和论述上也有许多需要进一步商榷和探讨的地方。我们恳切地希望读者在使用中能把宝贵意见及时告诉我们，以便不断修订、不断完善、不断提高这一学科的教学水平。

在我们写稿、审稿的过程中，陕西师大、昆明师院、华中师院、新乡师院、辽宁师院、廊坊师专等兄弟院校的同志们都很关心和支持我们的工作，他们参加了审稿会，提出了不少建设性意见。我们在此表示衷心感谢。

本册是这套教材的《分论》部分，各章初稿分别由华东师大朱元希、江苏师院周大炎、上海师院张元书与福建师大林明翰、北京师大钟善基、北京师院米道生与李建才、东北师大刘孟德等同志执

笔。审稿会后，由北京师大曹才翰、东北师大梁植文、北京师院李建才、广西师院查鼎盛、上海师院黄荣基、华东师大刘鸿坤等同志分别对本书作了不同程度的补充和修订，再由曹才翰、梁植文、李建才对全书进行了整理、统稿。最后，由北京师院梅向明、华东师大余元希、昆明师院朱德祥三位先生进行了审定。

由于时间匆促、经验有限，编写中一定会存在不少缺点，请读者批评指正。

编 者

1981. 10.

目 录

第一章 代数	1
1.1 概论	1
一、中学代数课程的内容与安排	1
二、中学代数教学的特点	3
1.2 数系	7
一、数的概念的扩展	7
二、有理数的教学	16
三、实数的教学	20
四、复数的教学	23
1.3 解析式	26
一、解析式恒等变形的一般概念	27
二、中学代数课程中解析式恒等变形的内容与安排	29
三、代数式的教学	30
四、指数式和对数式的教学	35
五、三角式和反三角式的教学	38
1.4 方程和方程组	41
一、一般概念	42
二、中学代数课程中方程和方程组的内容与安排	50
三、代数方程的教学	52
四、初等超越方程的教学	61
五、方程组的教学	66
1.5 不等式	70
一、中学代数课程中关于不等式的内容安排与教学要点	70
二、初中阶段不等式的教学	73
三、高中阶段不等式的教学	77
1.6 数列和数学归纳法	84
一、数列的教学	84
二、数学归纳法的教学	89

第二章 初等函数	95
2.1 中学函数的教学目的与任务	95
一、地位作用	95
二、教学目的和要求	95
三、教学内容和体系安排	98
2.2 函数概念的教学	100
一、函数概念的发展	100
二、初中阶段函数概念的教学	103
三、高中阶段函数概念的教学	106
2.3 一次函数与二次函数的教学	107
一、一次函数的教学	107
二、二次函数的教学	109
2.4 有理数指数的幂函数的教学	116
一、有理数指数的幂函数的性质和图象	117
二、有理数指数的幂函数的教学	121
2.5 指数函数与对数函数的教学	123
一、指数函数的性质和图象	123
二、对数函数的性质和图象	127
三、实数指数的幂函数的性质和图象	128
四、指数函数与对数函数的教学	130
2.6 三角函数与反三角函数的教学	135
一、三角函数的性质和图象	135
二、反三角函数的性质和图象	144
三、三角函数与反三角函数的教学	150
第三章 初等几何	153
3.1 初等几何的内容和体系	153
一、初等几何的内容	153
二、对第五公设的试证及非欧几何	162
三、希尔伯特公理体系	164
四、中学几何课程的逻辑体系	168
3.2 中学几何教学概论	170
一、教学目的、内容和意义	170
二、中学几何课程的具体安排	178

三、中学几何教学的特点和一般要求	187
3.3 平面几何教学研究	205
一、开始阶段的教学	206
二、基本阶段的教学	212
三、综合提高阶段的教学	218
四、基本轨迹的教学	222
五、解三角形的教学	224
3.4 立体几何教学研究	228
一、概述	228
二、空间的直线与平面	240
三、多面体与旋转体	250
四、正多面体	253
第四章 平面解析几何	258
4.1 中学解析几何课的教学目的和任务	258
一、解析几何的内容、方法和地位作用	258
二、中学解析几何课的教学目的和内容	261
三、教学特点	263
4.2 直角坐标系的教學	268
一、教学内容与教学目的	268
二、有向线段与直角坐标系	269
三、两个基本公式	272
四、用坐标法论证图形性质	273
4.3 直线的教学	276
一、教学内容与教学要求	276
二、直线的确定	278
三、直线的方程	281
四、直线的位置关系	283
五、直线方程的法线式	284
4.4 曲线与方程的教学	287
一、教学内容与教学目的	287
二、曲线方程的意义	289
三、依已知曲线求它的方程	290
4.5 二次曲线的教学	292
一、教学内容与教学目的	293

二、二次曲线的标准方程与几何性质	304
三、坐标变换	303
四、二次曲线教材安排的讨论	311
4.6 极坐标与参数方程的教学	313
一、教学内容与教学目的	313
二、极坐标的概念	314
三、极坐标方程	315
四、参数方程	317
第五章 排列、组合与概率初步	321
5.1 排列与组合	321
一、教材的特点	321
二、关于概念和公式的教学	322
三、解题举例	329
四、其它类型的排列与组合	333
5.2 二项式定理	338
一、教材的内容及其特点	338
二、二项式定理的教学	339
5.3 概率初步	343
一、教材的特点	343
二、概率初步的教学	343
第六章 微积分初步	357
6.1 中学“微积分初步”的教学目的与任务	357
一、中学“微积分初步”的地位与作用	357
二、中学“微积分初步”的内容安排与教学要求	359
三、中学“微积分初步”的教学特点	362
6.2 极限的教学	363
一、数列的极限	364
二、函数的极限与连续	372
6.3 导数与微分的教学	378
一、导数概念	378
二、初等函数的求导方法	382
三、微分概念	384
6.4 导数与微分的应用的教學	386

一、图象画法.....	387
二、微分近似计算.....	394
6.5 积分的教学.....	394
一、不定积分.....	395
二、定积分概念和计算.....	398
三、定积分的应用.....	403

第一章 代 数

中学代数是一门综合性的学科,它的内容涉及到数学中代数、分析、概率统计等分支.这一章里,我们将先就中学代数的内容及安排、教学中的一般注意,作扼要的分析,然后将其中关于数系、解析式、方程和方程组、不等式、以及数列和数学归纳法等内容的教材教法,作专题探讨,至于涉及到初等函数、概率方面的内容,将另列专章讨论.

1. 1 概 论

一、中学代数课程的内容与安排.

代数这一名词来自“Kitab al jabr w'al-muqabala”一书书名的头几个字,后来这几个字演变成了 algebra,这就是拉丁文的“代数学”.

关于什么是代数以及代数的基本问题是什么这两个问题的观点,随着代数这门科学的发展有过几次改变.十六世纪后期韦达引进了字母表示法,当时人们把代数看成是关于字母的计算、关于由字母拼成的公式的变换、以及关于解代数方程等的科学.它与算术的不同在于算术仅仅是对具体数字的运算.在十九世纪六十年代欧拉写的“代数学引论”中明显地体现了这种观点,他把代数定义成各种量的计算的理论.在十八世纪末及十九世纪初,代数学的中心问题之一,即代数方程的解法问题,渐渐地被人们认为是中心问题,许多数学家提出了关于研究一元 n 次代数方程

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

的复杂的理论，人们把代数理解为研究方程理论的科学。例如在十九世纪中叶谢尔的两卷代数里，把代数定义成代数方程理论，就体现了这种观点。十九世纪后半期，代数这门科学开始在力学、物理学以及数学本身找到了越来越多的研究对象(向量、矩阵、张量、旋量、超复数等)，对于这些对象很自然地要考虑到它们的运算(加法和减法，有时也要考虑到乘法和除法)。然而这些运算满足一些不同于有理数的其它规律，与此相应，代数学也就起了质的变化，人们把代数理解为就是研究各种代数结构的科学，也就是所谓公理化的或抽象的代数。这一观点，回到了韦达时代的代数是字母计算学的观点，但是已经上升到更高级的形态。

作为中学教学科目的代数与作为科学的近代代数，就其性质和内容来说，有着显著的差别。列入中学代数这门课程的内容是很庞杂的，涉及到数学的好几个分支。这些内容，大体可以归纳为以下一些项目：

1. 数的概念及其运算。在算术数的基础上，逐步引进负数、无理数、虚数，把数集从算术数集扩展到有理数集、实数集、复数集，学习在各个数集里的各种代数运算，以及在实数集里对正实数的对数运算。

2. 解析式的恒等变换。学习整式、分式、根式(主要是二次根式的变形和运算)。结合初等函数的研究，学习指数式、对数式、三角函数式的恒等变换。

3. 方程和方程组。随着数和式的知识的扩展，以研究一元一次方程，一元二次方程，二元、三元线性方程组为重点，并在此基础上学习简单高次方程、分式方程、无理方程的解法。学习不太复杂的二元二次方程组的解法。结合初等函数的研究，学习简单的指数方程、对数方程、三角方程的解法。在引进复数以后，学习关于一元 n 次方程的一些简单理论，以及某些特殊高次方程的解法。

4. 不等式. 首先,在初中阶段学习一元一次方程之后,学习一元一次不等式的解法. 在数集扩展到实数集并且学过二次函数以后,进一步学习一元一次不等式组 and 一元二次不等式的解法;然后再在高中阶段系统学习关于代数不等式的一些重要知识,至于初等超越不等式则涉及不多.

5. 函数. 在初中阶段先学习关于函数的初步知识,在高中阶段系统地学习应用初等方法研究有理数指数的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

6. 其它. 除上面五部分内容之外,还要学习等差数列和等比数列,数学归纳法,排列组合和二项式定理,概率初步、统计初步等内容.

应当指出,过去的代数与三角是作为两门课程在中学里设置的,现在则把三角的内容划分为两个部分:关于三角形的解法并入初中平面几何(或初中代数)中学习,关于三角函数的研究、以及三角函数式的恒等变换、简易三角方程等内容,则作为高中代数的一个组成部分.

对于上面所列举的这些内容的具体安排,可以有不同的方案,其中,数、式、方程(方程组)、不等式和函数等内容,相互间有密切联系,必须交错地进行学习. 有些知识还要考虑到与几何以及其它有关学科的配合,在研究和分析教材时,首先就要抓住线索,这样才能使教学工作有计划地循序前进.

二、中学代数教学的特点.

中学代数课程内容庞杂,安排交错,它在概念、公式、定理的叙述中和推理过程中较多地使用抽象的数学符号,且学生将要延续四到五年的时间学习它,在这个时期里,学生的生活经验、科学文化知识、以及思维能力都在发展着,这些就决定了中学代数教学的如下几个特点:

1. 确定教材内容的深广度。

教师必须对这门课程的教学内容以及教材的结构有个清楚的了解,在这基础上明确各个学习阶段的具体教学要求,确定教材的深广度,考虑教学方法。

应该明确由于教材内容的特点,各个内容在中学代数课程中有着不同的处理方法。

有些内容需要在某一阶段集中精力把它学好,在此之后,主要是通过这些知识的运用来加以巩固、提高。例如,教学有理数这一章时,就必须把这部分知识学好,明确了解有理数的意义,掌握有理数的运算法则,培养起对有理数正确地进行比较、运算的技能和熟练技巧,这样才能为学好以后内容奠定必要的基础。

有些内容需要逐步引入、逐步加深,最后才对它作系统地整理,使它趋于完整(当然这里的所谓完整也只是在中学代数课程总的要求下来说的)。在每一阶段应该掌握不同的深广度,确定教学要求。例如中学代数里关于函数知识的学习,在没有引进这一概念前,如在讲授代数式与代数式的值时,应该有意识地渗透一些函数思想。在初中阶段正式引进函数概念,研究几种常见的简单函数的性质和图象,也还只是学习一些关于函数的初步知识。到高中阶段再在这基础上,用集合、对应、单值对应等概念,加深对函数概念的理解,并用初等的方法对各种基本初等函数(除去实指数的幂函数)作系统地研究,而对初等函数的进一步研究那就要留到微积分这门课程中学习。中学数学课程中关于函数概念教学的这四个阶段,都是彼此呼应的,且有不同的深广度及教学要求。又如关于二元、三元线性方程组,在初中阶段,只是学习它的一些解法及简单应用,到了高中阶段引进二阶、三阶行列式,并用行列式对二元、三元线性方程组的解进行讨论。不同阶段有不同的要求。

有些内容在中学代数里仅仅给学生一些初步知识,或者只是

渗透一些观念,要求不应过高.例如集合这一概念,在高中代数里也仅仅是学习一些初步知识.又如,在讲极限概念之前,无理指数幂的定义只能是初步了解.由于算术根、对数概念都在初中出现,而正数的算术根的存在与唯一、对数的存在与唯一等,这些事实没有论证就加以默认了.

2. 注意概念、公式、定理的符号化.

在代数课程中,许多的概念、公式、定理除了用专门的名词、术语来表达外,还应用着专门的符号.正是这些符号在代数知识的推演和应用中发挥着作用,所以使学生透彻理解各种数学符号的意义、把符号与它的实际内容结合起来,是切实掌握概念、公式、定理的关键.

要注意应用符号的条件.例如,零指数幂 a^0 ,这里 $a \neq 0$;对数 $\log_a N$,这里 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $N > 0$;组合符号 C_m^n ,这里 $m \geq n$, m, n 均为自然数;反三角函数 $y = \arcsin x$,这里 $x \in [-1, 1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;又如定理 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$,这里① $a \geq 0, b \geq 0$,②等式在 $a=b$ 时才能成立.这种例子举不胜举.学生在演算习题时发生的错误,有很大一部分是由于忽略符号的条件而引起的.

有些符号随着数的概念的扩展和概念的推广,其条件和意义也是在变化的.如用字母表示数,由于数的范围的扩展,它所表示的数也在扩展:又如指数律 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 中,随着指数概念的推广,它的字母的可取值范围也是在变化的.又如绝对值的符号在实数集里的意义是

$$|-a| = |a| = \begin{cases} a & (\text{如果 } a > 0) \\ 0 & (\text{如果 } a = 0) \\ -a & (\text{如果 } a < 0) \end{cases}$$

在复数集里的意义是

$$|-z| = |z| = |x+yi| = \sqrt{x^2+y^2} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

用符号表示的公式、法则要注意其字母所代表内容的广泛性，例如乘法公式中的字母，既可代表单项式，又可代表多项式或别的什么，这就为灵活变形开辟了一条广阔途径。

在代数教学中，学生容易犯形式主义的毛病，他们或把符号和它的实际内容割裂，或忽略应用符号的条件，或把某些公式、法则错误地套用到其它的情况。例如把分配律 $ax+ay=a(x+y)$ 错误地套用到对数函数 $\lg x+\lg y=\lg(x+y)$ 等。这些都极大地妨碍了学生正确理解和运用公式、定理、法则，在教学中要采取有力的措施经常加以防止和克服。

3. 注意数学思想与方法的训练。

中学代数内容孕育着丰富的数学思想与方法。初中一年级刚接触代数时，学生经历了由算术到代数的过渡，这里的主要标志是由数过渡到用文字表示数，这是在更高一个层次上的抽象，文字是代表数的，但它不代表某一个具体的数，这种一般与特殊的关系正是学生学习困难的所在，而恰恰在这里可对学生进行如何处理一般与特殊关系的训练。在学习函数时，学生又经历了由常量数学到变量数学的过渡，变量数学是从数量关系和空间形式这个侧面反映客观世界运动变化、相互联系的。但是这种运动变化又要通过运动中的各个侧面、各个片断去研究，这种动与静的关系正是研究函数及其性质的主要手段之一，应该对学生进行这方面的训练。在学习概率初步时，学生应受到在或然现象中寻找必然规律的训练。

诚然，在中学代数教学中对培养运算能力承担着较大的责任，但不应忽略对学生进行逻辑思维方面的训练。事实上，只有概念明确，算理清晰，并正确进行逻辑推理，才能达到正确、迅速、合理的要求。此外，中学代数课程里，几乎涉及到全部的逻辑推证方法，如不完全归纳、分析、综合、充要条件、数学归纳法等，在教学中不应放松这方面的训练。

应当指出，代数中的证明题对发展学生的逻辑思维有着重要的作用，教学中应加强这方面的工作。

1. 2 数 系

作为科学的数的理论，具有较高度的抽象性和理论体系严谨性的特点。由于近代的代数已成为对代数结构的研究，一些人认为，数的概念的研究也应该统一用结构的观点来处理，把每个数系作为和一定的代数结构有关的系统来建立。在中小学数学课程改革及有些国家新编教材中，也已贯穿了这种思想，作了一些尝试。但是中小學生受到知识水平和年龄特征的限制，当然不可能过分强调理论上的严谨性以及抽象的作用，还只能采用适当渗透近代数学的观点，逐步加强理论比重的方法。作为中学数学教师，熟悉用代数结构的观点和用严格的公理体系来处理数的概念的扩展，这对于分析、处理中学数学教材中这一部分内容，正确进行教学则是十分必要的。

这一节里，我们将先扼要介绍一些关于怎样建立数的理论的基本知识，然后再对中学代数课程中关于有理数、实数和复数的教学，分别进行探讨。

一、数的概念的扩展。

1. 数的概念的产生和发展。

数的概念产生于实际的需要，它的产生与发展，都是与量的度量问题伴随着的。从人类历史上看，最早由于要比较这一物体集合和另一物体集合的大小，形成了多与少的概念，在长期的经验积累中，才逐步把数从具体事物集合中抽象出来，形成了自然数的概念，以后随着人类对于量的概念的发展，数的概念也同样发展着。例如，为了表示某种可分割的量的需要，引入了(正)分数；由于认