$$(ax-by)^2+(bx+ay)^2$$
$$=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

冯宝琦
丁学登 编著

代数等式证题法

责任编辑：孙怀川
封面设计：明　家

代数等式证题法

DaiShu DengShi ZhengTiFa

冯宝琦　丁学登　编著

黑龙江人民出版社出版
（哈尔滨市道里森林街42号）
哈尔滨市龙江印刷厂印刷　黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米1/32·印张4 6/16　字数87,000
1984年3月第1版　1984年3月第、次印刷
印数1—　44,300
统一书号：13093·67　定价：0.45元

出版说明

为加速实现四个现代化，迅速培养和造就大批又红又专的建设人材的需要，我们将陆续出版一套《中学生课外读物》。

这套读物包括数学、物理、化学、语文、历史、地理等基础知识和典型题解答等几十种。这本《代数等式证题法》就是其中的一种。

本书以全国统编中学数学教学大纲为基础，深入地、细致地讨论了代数等式证明的方法与技巧，归纳出“按图索骥”、“量体裁衣”、“殊途同归”、“倒果为因”、“非此即彼”、“过河搭桥”以及“推本溯源”等七种证题的有效方法，对于每一种方法都做了举例说明。

本书可供中学生、知识青年自学之用，也可供中学数学教师参考。

前 言

笔者在去年出版的《三角等式证题法》中，曾把三角等式证明的思路归纳为"找差异，抓联系，促转化，求同一"这样一句话。并且指出这种证题的思想方法，不仅对三角等式的证明有效，而且对代数等式的证明也有效。在这本书中，我们将进一步讲述如何用这种思想方法来证明代数等式。

这本书较《三角等式证题法》又有两点不同。除了讲如何寻求解题思路之外，本书又讲了常见的证题格式及证题方法。如直接证法中的综合法、分析法。综合法中又讲了从一边推证到另一边，从两边同时推证到某一个代数式等具体推证形式。在间接证法中，讲了反证法。限于篇幅，数学归纳法没有介绍。其次，我们还以基础知识为线索，编选了一部分内容。其中既有如何就知识的本身来指导证题的，又有综合运用各种知识去灵活地证明各种问题的。总之，本书除了继承《三角等式证题法》一书的思想方法以外，又在基础知识和基本能力的相互联系方面作了一点探讨。

我们希望本书与《三角等式证题法》一样，能有助于广大中学生更好地学好中学数学；同时也希望通过它们与广大数学教师进行思想上、方法上的交流，以促进我们的数学教学质量的提高。

限于作者水平，本书的缺点乃至错误在所难免，欢迎同志们批评指正。

作　　者

一九八三年夏

目　　录

一 对立统一

数和形的概念是从现实世界中抽象得来的．而现实世界中的数和形的表现形式是千差万别的，而这种千差万别却无不为这些事物内部的矛盾所左右．

就一个数学等式来说，无论是从条件或结论来看，还是从等式的左右两边来看，它们都存在着不同之处，即差异．否则就构不成一个要加以证明的式子．例如

求证 $(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2$

$$=2(a-d)(a+b+c+d).$$

很明显上等式左右两边在运算上有差异，等式左边是和的运算，而右边是积的运算．又如

已知 $\dfrac{x}{a^2-y^2}=\dfrac{y}{a^2-x^2}=\dfrac{1}{b}$，$xy=c^2$，

求证 $(a^2-c^2)^2-b^2c^2=0$ 或 $a^2+c^2-b^2=0$．

此题除了有运算上的差异之外，还有字母上的差异．在条件式中有 a、b、c，x、y 等字母，而在求证式中字母 x、y 消失了等．

如果我们把函数、映射也看作是运算的话，则一般说来，一个代数等式的条件式与求证式，求证式的左边和右边主要存在着两种差异：元素（字母等）和运算的差异．

"差异就是矛盾"．因此，对数学式子中的每一个差异，

都应把它看作客观矛盾的反映。它们既对立又统一。由于一个数学式子的左右两边存在着差异，因而是对立的，然而这些差异又被等号联系在一起，因而又是统一的。总之，要证明的任何一个数学等式都是一个对立的统一体。

就等式证明过程来说，就是对条件式(或等式的一边)，经过恒等变形，转化到求证式（或等式的另一边）的过程；本质上说，等式证明的过程，就是找出差异，消灭差异的过程；是一个由对立到统一的过程，合二而一的过程。因此，在解题时，我们要竭尽全力去了解数学式子中的差异的“每一个方面各占何等的特定的地位，各用何种具体形式和对方发生互相依存又相互矛盾的关系”。

例如第一个例子中，主要差异是运算上的差异，若恰当地使用平方差因式分解的公式，就可以使等式的左边转化为右边。而对于第二个例子，从条件式中消去 x、y 就是解决条件式与求证式的差异的具体途径。

由此可见，证明数学等式的过程，是一个找出差异，分析差异，解决差异的过程。不但要看到等式中的对立(差异)的一面，而且更重要的是要看到这些差异是怎样互相联系的。它们不但在一定的条件下共处于一个统一体中，而且在一定的条件下还可以相互转化。一个正确的思路在开始的时候就是可以判断的，只要看这种证明的路线是使等式中的差异在缩小，还是在扩大。若是前者，则一般可以认为，按照这样的思路做下去，原则上等式是可以证出来的。

由于代数等式中，无论是条件式和求证式的差异，还是一个等式两边的差异，大量地表现为运算上的差异。这个特

殊性也就规定了在代数等式的证明中，熟练地、准确地掌握代数式的各种公式、法则就显得尤为重要了．对于代数中的各种公式，也必须从字母以及运算的差异上去加以理解和记忆．只有这样，才能灵活地解决问题．关于这方面的论述，请读者参阅《三角等式证题法》（黑龙江人民出版社，1982年）．

二 按图索骥

伯乐善相千里马的故事是众所周知的．伯乐想把自己相马的经验留给后世，写了一本《相马经》．伯乐的儿子读了《相马经》之后，知道额头突出是好马的一个标志．他就照着这个标志去找千里马．有一天，他见到一只大蛤蟆，他以为这就是好马了，高高兴兴地拿回家中，对他的爸爸说："得一马，略与相同，但蹄不如累曲耳"．伯乐知道自己的孩子愚笨，便风趣地说："此马好跳，不堪御也"．这就是按图索骥的故事．这个成语的原意是用来比喻办事拘泥于教条，只知局部，不知全体；只知表象，不知本质．而现在使用这个成语，用来比喻按照线索去寻找事物．意义和原来的不一样了．

代数等式的条件和结论，一个等式的左右两端终究会有一点线索相联系的（否则这个等式也就变得无法证明了），按照这个线索去寻找等式证明的思路，这就是按图索骥这个成语给我们的启示．为了找出线索，首先应分析等式中的不同

点与相同点，由此找出它们之间的联系。然后用恰当的方法，消灭不同点，达到证明的目的。

例 1 求证 $x(x-1)(x-2)(x-3)+1=(x^2-3x+1)^2$。

分析 等式左边是和，右边是积．若从运算入手，可以将左边第一项全部乘开，合并同类项，然后再因式分解，配出一个完全平方式来．这样做无疑是可行的．但是如果我们注意到右边的二次三项式是 x^2-3x+1，按照这个线索将左边的第一项变为

$$
\begin{aligned}
&x(x-1)(x-2)(x-3)\\
&=[x(x-3)][(x-1)(x-2)]\\
&=(x^2-3x)(x^2-3x+2)\\
&=[(x^2-3x+1)-1][x^2-3x+1)+1].
\end{aligned}
$$

这样就构造出右边所需要的二次三项式来了．这样做计算量显然会大为减少．

证 左边 $=[(x^2-3x+1)-1][x^2-3x+1)+1]+1$

$$
\begin{aligned}
&=(x^2-3x+1)^2-1+1\\
&=(x^2-3x+1)^2=\text{右边}.
\end{aligned}
$$

例 2 求证 $(ax-by)^2+(bx+ay)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$。

分析 左边是和，右边是积．欲从左证到右，则应将左化积．但此两项并无公因式，故只能将左边两个因式展开合并，然后按右边的模式，进行因式分解．

证 左边 $=a^2x^2-2axby+b^2y^2+b^2x^2+2bxay+a^2y^2$

$$
\begin{aligned}
&=a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2\\
&=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)\\
&=(a^2+b^2)(x^2+y^2)=\text{右边}.
\end{aligned}
$$

例 3　求证 $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

$$=3(a+b)(b+c)(c+a).$$

分析　左边是和，右边是积．故应将左边化和为积．而这只有采用提取公因式的方式才能解决．由于右边有因式 $a+b$，左边四项并没有公因式 $a+b$，因此，一定要按照提出因式 $a+b$（或 $b+c$ 等）的线索去处理左式．由于

$$-a^3-b^3=-(a^3+b^3)=-(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

因而左边的第二、三项合并后有 $a+b$ 的因式．由此可断定左边第一、四项合并后也应有 $a+b$ 因式．故将左边四项分成两组，先找出公因式 $a+b$，然后对余下的因式用同样的思想去进行分解．

证　左边 $=[(a+b+c)^3-c^3]-(a^3+b^3)$

$$\begin{aligned}
&=(a+b)[(a+b+c)^2+(a+b+c)c+c^2]\\
&\quad-(a+b)(a^2-ab+b^2)\\
&=(a+b)[(a+b+c)^2+(a+b+c)c+c^2\\
&\quad-a^2-b^2+ab]\\
&=(a+b)\{[(a+b+c)^2-a^2]+(b+c)c\\
&\quad-(b^2-c^2)+(ab+ac)\}\\
&=(a+b)[(b+c)(2a+b+c)+(b+c)c\\
&\quad-(b+c)(b-c)+a(b+c)]\\
&=(a+b)(b+c)[2a+b+c+c-b+c+a]\\
&=(a+b)(b+c)(3a+3c)\\
&=3(a+b)(b+c)(c+a)=\text{右边}.
\end{aligned}$$

例 4　求证 $a^4+b^4+(a+b)^4=2(a^2+ab+b^2)^2$.

分析　两边都按乘法公式展开，即可以得等式成立，但

证明过程不够简捷．如果我们按右边 a^2+ab+b^2 的因式的结构将 $(a+b)^4=[(a+b)^2]^2=(a^2+2ab+b^2)^2=[(a^2+ab+b^2)+ab]^2=(a^2+ab+b^2)^2+2ab(a^2+ab+b^2)+a^2b^2$ 变为 a^2+ab+b^2 的形式，然后再与右边比较，猜想上面展开式所余的部分与 a^4+b^4 合并后也应是 $(a^2+ab+b^2)^2$．而这根据三数和的平方公式则显然是成立的．

证 左边 $=a^4+b^4+(a^2+ab+b^2+ab)^2$

$$
\begin{aligned}
&=a^4+b^4+a^2b^2+2ab(a^2+ab+b^2)\\
&\quad+(a^2+ab+b^2)^2\\
&=(a^2)^2+(b^2)^2+(ab)^2+2(ab)a^2+2a^2\cdot b^2\\
&\quad+2(ab)b^2+(a^2+ab+b^2)^2\\
&=(a^2+ab+b^2)^2+(a^2+ab+b^2)^2\\
&=2(a^2+ab+b^2)^2=\text{右边}
\end{aligned}
$$

例 5 求证

$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$．

分析 因右边有因式 $a+b+c$，按照这个线索将左边的 $a+b$ 变为 $a+b+c-c$，然后展开得

$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(b+c)(c+a)-c(b+c)(c+a)$．对 $-c(b+c)(c+a)+abc$ 同样处理，也可得到因式 $a+b+c$．最终必得公因式 $a+b+c$．

证 左边 $=(a+b+c)(b+c)(c+a)-c(b+c)(c+a)$

$$
\begin{aligned}
&\quad+abc\\
&=(a+b+c)(b+c)(c+a)-c[(b+c)(c+a)\\
&\quad-ab]\\
&=(a+b+c)(b+c)(c+a)-c^2(a+b+c)
\end{aligned}
$$

$$=(a+b+c)[(b+c)(c+a)-c^2]$$
$$=(a+b+c)(ab+bc+ca)=\text{右边}.$$

例 6 设 a、b、c 是实数。且 $1+bc\neq 0$，$1+ca\neq 0$，$1+ab\neq 0$。求证

$$\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}+\frac{a-b}{1+ab}=\frac{b-c}{1+bc}\cdot\frac{c-a}{1+ca}\cdot\frac{a-b}{1+ab}.$$

分析 左边是商和，右边是商积，要解决这个和与积的差异，从分母比较中可以看出，对左边应该通分。通分后，分子变为

$$(b-c)(1+ca)(1+ab)+(c-a)(1+bc)(1+ab)$$
$$+(a-b)(1+bc)(1+ca).$$

与右边分子比较，应有 $b-c$(或 $c-a$ 等)的因式，按此线索对上述分子中的第二项的 $c-a$，将其变为 $c-b+b-a$。则第二项变为

$$-(b-c)(1+bc)(1+ab)-(a-b)(1+bc)(1+ab).$$

让后者与第三项合并，提取 $a-b$ 的因式后，在余因式中再分解出 $b-c$ 的因式来。

证 因为

$$(b-c)(1+ca)(1+ab)+(c-a)(1+bc)(1+ab)$$
$$+(a-b)(1+bc)(1+ca)$$
$$=(b-c)(1+ca)(1+ab)-(b-c)(1+bc)(1+ab)$$
$$-(a-b)(1+bc)(1+ab)+(a-b)(1+bc)(1+ca)$$
$$=(b-c)[(1+ca)(1+ab)-(1+bc)(1+ab)]$$
$$+(a-b)[(1+bc)](1+ca)-(1+bc)(1+ab)]$$
$$=(b-c)(1+ab)[(1+ca)-(1+bc)]$$

$$+(a-b)(1+bc)[(1+ca)-(1+ab)]$$

$$=(b-c)(1+ab)(ca-bc)+(a-b)(1+bc)(ca-ab)$$

$$=(b-c)(a-b)(c+abc)+(a-b)(c-b)(a+abc)$$

$$=(b-c)(a-b)[c+abc-a-abc]$$

$$=(b-c)(a-b)(c-a).$$

所以，左边=右边。

例 7　求证

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1.$$

分析　左边是和，右边是积，故应通分。通分后得

$$左边=\frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

因为右边是1，故对上式分子应进行因式分解，然后与分母约分。因式分解也与前几个例子一样，按分母的"图"去"索骥"。问题即不难解决。

证　因为

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$$

$$=-a^2(b-c)+b^2(a-b)+b^2(b-c)+c^2(b-a)$$

$$=-(b-c)(a^2-b^2)+(a-b)(b^2-c^2)$$

$$=-(b-c)(a-b)(a+b)+(a-b)(b-c)(b+c)$$

$$=(b-c)(a-b)[-(a+b)+(b+c)]$$

$$=(b-c)(a-b)(c-a),$$

故　$$左边=\frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(b-c)(a-b)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1=右边.$$

例 8 当 $n\geqslant 2$ 时，求证

$$\frac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}=\frac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}.$$

分析 左边是和商，右边是积商，故应将左边分子分母化积．看分子，右边的分子有 $n+1$ 这个因式，还有 $\sqrt{n-2}$ 这个因式，而左边分子的第三项

$$(n^2-1)\sqrt{n^2-4}=(n-1)\sqrt{n-2}\,(n+1)\sqrt{n+2}$$

也有这个因式，故 n^3-3n-2 应能分解出 $(n+1)\sqrt{n-2}$ 因式来．事实上，

$$\begin{aligned}n^3-3n-2&=(n+1)(n^2-n-2)\\&=(n+1)(n-2)(n+1)\\&=(n+1)^2(n-2)\\&=[(n+1)\sqrt{n-2}]^2\qquad(\because\ n\geqslant 2).\end{aligned}$$

对分母，也"按图索骥"，即可顺利地完成证明．

证

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{n^3-3n-2+(n+1)\sqrt{n-2}\,(n-1)\sqrt{n+2}}{n^3-3n+2+(n-1)\sqrt{n+2}\,(n+1)\sqrt{n-2}}\\&=\frac{[(n+1)\sqrt{n-2}]^2+(n+1)\sqrt{n-2}(n-1)\sqrt{n+2}}{[(n-1)\sqrt{n+2}]^2+(n-1)\sqrt{n+2}(n+1)\sqrt{n-2}}\\&=\frac{(n+1)\sqrt{n-2}\,[(n+1)\sqrt{n-2}+(n-1)\sqrt{n+2}]}{(n-1)\sqrt{n+2}\,[(n-1)\sqrt{n+2}+(n+1)\sqrt{n-2}]}\\&=\frac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}=\text{右边}.\end{aligned}$$

对于条件等式的证明，不仅要考虑到求证式左边与右边的字母和运算的差异，而且要考虑到条件式与求证式之间的

字母和运算的差异．一般的做法是，将求证式的左边按右边的“图”采用条件式使其达到转化．另一种就是将条件式经过恒等变形，使条件式与求证式之间的差异消失，从而达到证明的目的．

例 9　已知 $2b=a+c$，求证 $a^2+8bc=(2b+c)^2$．

分析　求证式左边有 a，右边没有 a；左边是和，右边是积．为了证明求证式，可利用条件式解出 $a=2b-c$，代入求证式左边达到消灭 a 的目的，然后再和化积即可．

证　由条件式得 $a=2b-c$，代入求证式左边得

$$\begin{aligned}a^2+8bc&=(2b-c)^2+8bc\\&=4b^2-4bc+c^2+8bc\\&=4b^2+4bc+c^2\\&=(2b+c)^2.\end{aligned}$$

例 10　已知 $ab=1$，求证 $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}=1$．

分析　求证式左边是和，右边是积．按图索骥，应该将左边通分．因为右边不含分母，仅仅是数字 1，故猜想左边的分子分母应该一样．而通分后的分子是 $2ab+a+b$，要与分母约分，可将一个 ab 用 1 代替，即可分解为 $(a+1)(b+1)$．当然也可以将分母展开，分子分母中的 ab 都用条件式 $ab=1$ 代入，即可发现分子分母相同．

证一　$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}=\frac{ab+a+ba+b}{(a+1)(b+1)}$$

$$=\frac{ab+a+b+1}{(a+1)(b+1)}$$

$$=\frac{(a+1)(b+1)}{(a+1)(b+1)}=1;$$

证二 $$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}=\frac{a}{\frac{1}{b}+1}+\frac{b}{b+1}$$

$$=\frac{ab}{1+b}+\frac{b}{b+1}$$

$$=\frac{ab+b}{b+1}=\frac{1+b}{b+1}$$

$$=1.$$

例 11 已知 $bc=ad$，求证 $ab(c^2-d^2)=cd(a^2-b^2)$。

分析 求证式左边有 c^2、d^2，右边有 a^2、b^2。故应利用条件式，将左边的含 c^2 的项变为含 a^2 项。例如，

$$abc^2=ac(bc)=ac(ad)=a^2cd.$$

同样处理，将 d^2 变为 b^2。

证 $$ab(c^2-d^2)=abc^2-abd^2$$

$$=ac(bc)-bd(ad)$$

$$=ac(ad)-bd(bc)$$

$$=a^2cd-b^2cd$$

$$=cd(a^2-b^2).$$

例 12 已知 $a^2=b^2+c^2$，求证 $\frac{a+b+c}{c+a-b}=\frac{a+b-c}{b+c-a}$。

分析 求证式左边与右边都是分式。但分子分母均各不相同。要证明两个分式相同，当然应该通分，在分母相同的情况下，再去比较分子。而在证明本例时，可以对左边分子分母都乘以 $b+c-a$。然后将分子展开，并利用条件凑出因式 $c+a-b$ 来。再将此因式约去后，即可达到右边的目的。