数学奥林匹克

一讲一练

主编：熊 斌 冯志刚

高一年级

上海科学普及出版社

书香策划

数学奥林匹克

一讲一练

三年级

四年级

五年级

六年级

初一年级

初二年级

初三年级

■ 高一年级

高二年级

高三年级

ISBN 7-5427-2227-1

9 787542 722270 >

ISBN 7-5427-2227-1/O·59

定价：18.00元

数学奥林匹克

一讲一练

·高一年级·

主编　熊　斌　冯志刚

上海科学普及出版社

《数学奥林匹克一讲一练》编委会

序　　言

纵观世界，中小学数学教育质量以我国为最好。

早在1993年，我国著名数学教育家张奠宙先生[1]就曾指出，中国数学教育是“双料冠军”：

(1) 我国在中学生国际数学奥林匹克中连获总分第一名(1989,1990,1992,1993)。

(2) 1988年举行的国际教育进展评价(IAEP)的结果表明，在对21个国家和地区的13岁学生的测试中，中国大陆学生的数学得分率列第一位(80分)。我国台湾地区和韩国并列第二(73分)，苏联(70分)，西欧、北美诸国均在60分左右。

时间过去近十年，我国中小学数学教育依然处于领先地位，不可动摇。我国中小学数学教育成绩卓著的原因可以举出很多，例如：

(1) 家长重视。自古以来就有“养不教，父之过”的说法，每一个合格的中国家长无不关心子女的教育，他们倾注了大量的心血与精力。

(2) 教师认真。“教不严，师之惰”。每一位称职的教师都会对学生严格要求，布置适当的作业，采用测试、考试等手段督促学生学习，决不放任自流。

(3) 学生努力。外国(尤其是欧美)很多学生视数学为畏途，甚至在小说中也说：“喏，如果你不喜欢我的故事，那么到教室里去背诵你的算术乘法表，看看你是不是更加喜欢它。”[2]中国学生，没有不会背乘法表的，即使是文盲也能说出“不管三七二十一”。成绩好的学生爱好数学，成绩中下的学生也都知道数学是一门主课，升学考试必考，因而要花力气去学。

(4) 风气纯正。我国舆论历来认为学生应当把学习搞好。虽然也曾出现过“白专道路”，“知识越多越反动”，“高分低能”等等谬论，但社会上仍然正确地坚持读书光荣，“知识就是力量”，对于分数也给予适当的重视。

我国尤其重视英才的培养。对于爱好数学的学生应当给他们更多的机会、更多的培养，其中最重要的一件事就是应当提供给他们一套好的书。由熊斌、冯志刚先生主编，上海科学普及出版社出版的《数学奥林匹克一讲一练》、《数学奥林匹克试题精编ABC卷》就是这样的书。

《数学奥林匹克一讲一练》将奥林匹克数学的内容以一讲一练的形式系统地

组织起来,每一讲设三部分内容:

(1) 将竞赛中所需的知识加以简明扼要的归纳、总结;

(2) 围绕竞赛的热点,选择典型的例题精讲,着重介绍竞赛中的基本思想与基本方法;

(3) 有针对地选择一些名题、好题、新题供读者练习,以提高解题能力。

《数学奥林匹克试题精编 ABC 卷》是同步练习册,A 卷是“一讲”内容的延伸与拓展,题目难度较小;B 卷进一步加强竞赛的基本功,突出了解题的基本技巧与方法;C 卷是为准备在竞赛中取得优异成绩的同学设计的,题目具有挑战性,是学生发挥自己的创造性,一显身手的用武之地。

如果你使用这两套书,经过一段时间,就会有显著的变化:视野开阔了,数学素养提高了,解题与应试的能力加强了,不仅在课内考试可以脱颖而出,在各种数学竞赛中也可望获得好的成绩。当然,书中的练习必须及时地、亲自地做一做。练是学好数学的第一个关键;练了以后还必须进行总结,将不必要的步骤尽量删去,使解题中的主要思想更加凸现,这是学好数学的第二个关键。

一道题目,想了很久,终于想了出来,这是一件非常愉快的事情,是任何其他东西所不能代替的。如果你曾经有过这样的体验,那么你就能学好数学。如果你还没有这样的体验,那么抓紧做练习吧,相信你很快就会享受到这种解题的快乐。

“学而时习之,不亦乐乎”。对孔夫子的这句话,使用本书的学生,一定会发出会心的微笑。

单　墫

[1] 张奠宙. 中国数学教育的文化传统和未来走向. 数学家谈数学教育. 九章出版社,2000
[2] 查尔斯·金斯利. 木偶译. 水孩子. 人民文学出版社,2000

前　言

数学奥林匹克竞赛对于激发学生的学习兴趣、开发智力、培养创新能力、开拓视野有着非常积极的作用。通过开展数学奥林匹克活动，可以更好地发现和培养优秀学生，并能提高教师的教学水平，促进教学改革。

本丛书从小学三年级至高中三年级共10册，将数学奥林匹克的内容以“一讲一练”的形式系统地组织起来，目的是希望能为学生提供一套强化知识、开阔视野、提高数学素质和能力的教材，让学生能借助这套教材的学习，具备或提高参加各种数学竞赛的知识和能力，使学生不仅能把自己的课内成绩提高，而且能在数学竞赛中取得理想的成绩。

本书的每一讲都由“讲”和“练”组成，每一讲分设三部分内容：

1. 竞赛热点、考点、知识点。将数学竞赛的知识、内容以及当前的热点问题和历届数学竞赛中经常出现的问题给予分析、归纳、阐述和总结。

2. 典型例题精讲。围绕数学竞赛的热点、考点，选择典型的例题，通过对典型例题的分析、讲解，使学生能够掌握基本思想和基本方法，进而提高分析问题和解决问题的能力。

3. 能力训练习题。有针对性地选择一些名题、新题、好题给学生练习。通过这样的练习，使得学生能更好地掌握所学的知识，提高解题能力，培养创新意识。

参加本套丛书编写的作者既有长期在数学竞赛辅导第一线的教师，又有曾获国际数学奥林匹克金牌的选手，还有多次参与各级各类数学竞赛命题的专家，由于他们的参与，保证了本套教材的质量。

本套丛书的编写，得到了单墫先生、顾鸿达先生、刘鸿坤先生的热情关怀和指导，借此对他们表示衷心的感谢。

熊　斌　冯志刚

目　　录

第一讲　集合的概念与运算

竞赛热点、考点、知识点

概括原则:任给一个性质 p,那么存在一个集合 S,它的元素恰好是具有性质 p 的所有对象,即

$$S=\{x \mid p(x)\}.$$

其中 $p(x)$是“x 具有性质p”的缩写．

集合的运算:**交**($A\cap B=\{x|x\in A$ 且$x\in B\}$),**并**($A\cup B=\{x|x\in A$ 或$x\in B\}$),

补($\overline{A}=\{x|x\in I$ 且$x\notin A\}$),**差**($A\setminus B=\{x|x\in A$,但 $x\notin B\}$).

集合的运算法则

分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

De Morgen 法则　　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

$$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C),$$

$$A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C).$$

集合的各种表示法各具特点,在直观上表示集合,特别是表示两个或两个以上集合之间的关系时,常常用一个平面上的封闭图形来形象地表示集合,即 Venn 图,可以方便地验证集合间的各种关系．集合的确定性和互异性特征是其重要的基本特征．

空集不含任何元素,并且是任何集合的子集．

典　型　例　题　精　讲

例 1　若 $a^2+b^2+c^2\neq0$,证明:三个方程 $ax^2+bx+\frac{c}{4}=0$,$bx^2+cx+\frac{a}{4}=0$,$cx^2+ax+\frac{b}{4}=0$ 的根中至少有一个实根．

证明　(1) 若 $a\cdot b\cdot c=0$,则三个方程中至少有一个为一次方程,显然结论成立;

(2) 若 $a\cdot b\cdot c\neq0$,三个一元二次方程的判别式分别为 Δ_1、Δ_2、Δ_3,于是

$$\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3=b^2-ac+c^2-ba+a^2-cb$$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant0.$$

可以知道三个判别式至少有一个非负,故结论成立．

由(1)、(2)得,当 $a^2+b^2+c^2\neq0$ 时,三个方程的根中至少有一个实根．

例 2　设 $P=\{$不小于 3 的正整数$\}$,定义 P 上的函数f 如下:若 $n\in P$,定义 $f(n)$为不是 n 的约数的最小正整数,例如 $f(7)=2$,$f(12)=5$. 记函数 f 的值域为M. 证明:$19\in M$;$99\notin M$.

证明　当 $n=18!$ 时,由于 $1,2,\cdots,18$ 都是 n 的约数,故此时 $f(n)=19$.

若存在 $n\in P$,使 $f(n)=99$,则对小于 99 的正整数 k,均有 $k\mid n$,从而,$9\mid n$ 且 $11\mid n$,但是 $(9,11)=1$,由整除理论中的性质,应有 $9\times11=99$ 是 n 的约数．这是一个矛盾．

说明　可以证明 $M=\{p\mid p$ 为质数$\}$,这一点利用本题的方法即可完成．

例3 设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$，$B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2,a_5^2\}$，其中 $a_i(1\leqslant i\leqslant 5)$ 都是正整数，且 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，$a_1+a_4=10$，并满足 $A\cap B=\{a_1,a_4\}$，$A\cup B$ 中所有数之和为224，求集合 A.

解 由 $A\cap B=\{a_1,a_4\}$，可知 a_1、a_4 为完全平方数，又 $a_1+a_4=10$，于是只能是 $a_1=1$，$a_4=9$. 这时由 $a_4<a_5$，可知 $a_5>9$，但 $A\cup B$ 中所有元素之和为224，故 $a_5^2\leqslant 224-9^2-1^2-(1+9)-2^2-3^2-(2+3)$，所以，$a_5<11$，故 $a_5=10$. 这时 $a_2^2+a_3^2+a_2+a_3=32$，类似地，利用不等式估计，可知 $a_2=3$，$a_3=4$，从而 $A=\{1,3,4,9,10\}$.

说明 充分利用题中各已知条件之间的关系是解本例类型问题的关键.

例4 为搞好学校工作，全校各班级一共提出了 P 条建议($P\in\mathbf{N}_+$). 已知有些班级有相同的建议，且任何两班都至少有一条建议相同，但没有两班提出全部相同的建议，求证该校的班级数不多于 2^{P-1} 个.

证明 假设全校有 m 个班级，他们的建议分别组成集合 $A_1,A_2,\cdots,A_m$. 这些集合中没有两个相同(因为没有两个班级提出全部相同的建议)，而任何两个集合都有公共元素，因此任何一个集合都不是另一个集合的补集，这样在 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中至多有 A(所有 P 条建议所组成的集合)的 $\frac{1}{2}\cdot 2^P=2^{P-1}$ 个子集，

所以 $$m\leqslant 2^{P-1}.$$

例5 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=ax+2\}$，$B=\{(x,y)\mid y=|x+1|\}$，且 $A\cap B$ 是一个单元素集合，求实数 a 的取值范围.

解 我们在图1中作出函数 $y=ax+2$ 与 $y=|x+1|$ 的图像，由题意 $A\cap B$ 是单元素集合，故它们的图像只有一个交点，由图像可知 a 的取值范围是 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

说明 这是一个常见的求解含字母不等式的讨论问题，解答中利用图像来处理，显得简洁明了.

例6 已知 $A\subseteq\{1,2,\cdots,2000\}$，且 A 中任意两个数之差的绝对值不等于4或7，求 $|A|$ 的最大值.

解 注意到，$2000=11\times 181+9$，我们取 $A=\{x\mid x=11t+1,11t+4,11t+6,11t+7,11t+9,0\leqslant t\leqslant 181,t\in\mathbf{Z}\}$，则 A 中任意两个数之差不是4或7. 事实上，若 $|11(t-r)+(b-a)|=4$ 或7，这里 $a,b\in\{1,4,6,7,9\}$，而 $0\leqslant r\leqslant t\leqslant 181$，则当 $t-r\geqslant 2$ 时，显然不能成立；当 $t-r=1$ 时，应有 $|11+(b-a)|=4$ 或7，去绝对值后，应有 $|b-a|=4$ 或7，这一点直接验证即知不能成立；当 $t-r=0$ 时，与上类似，也不能成立. 所以，$|A|$ 的最大值 $\geqslant 5\times 182=910$. 另一方面，设 A 是满足条件的集合，且 $|A|>910$. 这时，存在 t，使得集合 $\{x\mid x=11t+r,1\leqslant r\leqslant 11\}$ 中出现6个数都减去 $11t$ 后都属于 A，说明 $1,2,\cdots,11$ 中，有6个数入选 A，我们证明这是不可能的. 将 $1,2,\cdots,11$ 排成一个圆圈，例如：1,5,9,2,6,10,3,7,11,4,8(这里1与8首尾相连)，则此圆圈上，任意相邻两个的差的绝对值为4或7. 从中任取6个数，必有两个数相邻，从而 $1,2,\cdots,11$ 中，不能有6个数同时入选 A. 所以，矛盾.

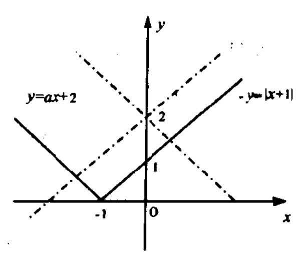

图1

综上所述，$|A|$ 的最大值为910.

能力训练习题

1. 已知 $I=\{1,2,5,a^2-3a\}$，$A=\{2,5\}$，$B=\{a,5\}$，$\overline{A\cup B}=\{a-3\}$，求 a 的值．

2. 在集合$\{1,2,\cdots,50\}$的子集 S 中，任意两个元素的平方和不是 7 的倍数，求$|S|$的最大值．这里$|S|$表示 S 的元素个数．

3. 已知集合 $A=\{x\mid x=a^2+1,a\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{y\mid y=b^2-6b+10,b\in\mathbf{N}^*\}$，问集合 A 和 B 之间的关系是怎样的．

4. 设 $A=\left\{x\,\middle|\,\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2},x\in\mathbf{R}\right\}$，$B=\{x\mid x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0,x\in\mathbf{R}\}$，且 $A\subseteq B$，求 a 的取值范围．

5. 已知集合 $A=\{x\mid x=12a+8b,a,b\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=20c+16d,c,d\in\mathbf{Z}\}$，求证 $A=B$．

6. 设 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 15$，集合 A、B 都是 $I=\{1,2,\cdots,n\}$的真子集，$A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=I$．证明：集合 A 或 B 中，必有两个不同的数，它们的和为完全平方数．

7. 考虑集合$\{1,2,\cdots,2000\}$的满足下述条件的子集 A，A 中没有一个数是另一个数的 5 倍，求$|A|$的最大值．

8. 已知集合 $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y-3}{x-2}=a+1\right\}$，$B=\{(x,y)\mid(a^2-1)x+(a-1)y=15\}$满足 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的值．

9. 集合 A、B、C(不必相异)的并集 $A\cup B\cup C=\{1,2,\cdots,9\}$．问：这样的有序三元组$(A,B,C)$有多少组？

10. N 为 n 个点组成的集合，M 是 N 的子集组成的族，具有性质：若 N 的子集 A，B 在 M 中．则 $A\cup B$，$A\cap B$，$\overline{A}$ 都在 M 中．问 M 可含多少个元素？

11. 已知 $f(x)=x^2+px+q$．$A=\{x\mid f(x)=x\}$，$B=\{x\mid f(x-1)=x+1\}$，p、$q\in\mathbf{R}$，若 $A=\{2\}$，求 B．

12. 已知实数集 $\mathbf{R}$ 的子集 P 满足两个条件：(1)$1\notin P$；(2)若实数 $a\in P$，则$\frac{1}{1-a}\in P$．求证：

(1)若 $2\in P$，则 P 中必含有其他两个数，并求出这两个数；

(2)集合 P 不可能是单元素集．

13. 设 $M=\{n\mid n=x^2-y^2,x,y\in\mathbf{N}^*\}$，证明：$2000\in M$，并求 M 中从小到大的第 2000 个正整数的大小．

14. 对任意集合 X，用 $n(X)$表示 X 的子集的个数(包括 $\varnothing$ 与 X 本身)．已知集合 A，B，C 满足$n(A)+n(B)+n(C)=n(A\cup B\cup C)$，$|A|=|B|=100$．求$|A\cap B\cap C|$的最小值．

第二讲　集合与子集

竞赛热点、考点、知识点

定义:如果集合 A 的每个元素都属于集合 B,则集合 A 称为集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$.

集合 A 和 B 的差集 $A\setminus B$　$A\setminus B$ 是集合 A 的子集,它由所有属于 A 但不属于 B 的元素组成.如果 $B\subset A$,则差集 $A\setminus B$ 称为集合 B 在集合 A 中的补集.

若 $A\subseteq B$,但存在 $x\in B$ 且 $x\notin A$,则称 A 是 B 的真子集,记作 $A\subset B$.

显然地,$A\subseteq A$,$\varnothing\subseteq A$,$\varnothing\subset A$(非空).并且在集合的交、并、补运算中存在着以下关系

$$A\cap B\subseteq A,A\cap B\subseteq B;$$

$$A\cup B\supseteq A,A\cup B\supseteq B.$$

故而

$$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B.$$

$$A\setminus B\subseteq A.$$

若 $|A|=n$,则集合 A 的子集个数为 2^n 个,真子集的个数为 2^n-1 个.

典　型　例　题　精　讲

例 1　集合 $A=\{0,1,2,\cdots,9\}$,$B_1,B_2,\cdots,B_k$ 为 A 的非空子集,且其中任意两个子集的交集至多含两个元素,求 k 的最大值.

解　设 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 是所求的子集,不妨假定每一个子集 $B_i(i=1,2,\cdots,k)$ 至多只含 3 个元素.如果其中有一个子集 B_i 含有 4 个以上的元素,那么 B_i 的任意一个含三个元素的子集必不在 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 中,因为由题设 B_i 与这 $k-1$ 个集合的交集至多含两个元素.于是可以用 B_i 的任意一个三个元素的子集代替 B_i,这时候与题设要求:任意两个子集的交集至多含两个元素不矛盾.经过有限次调整可以使子集仅含一个元素、两个元素、三个元素.于是

$$k_{\max}=C_{10}^1+C_{10}^2+C_{10}^3=175.$$

例 2　已知集合 $A=\{x\mid x^2-5x+4\leqslant 0\}$ 与 $B=\{x\mid x^2-2ax+a+2\leqslant 0,a\in\mathbf{R}\}$ 满足 $B\subseteq A$,求 a 的取值范围.

解　如图 2,显然,$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$.记

$$y=x^2-2ax+a+2,$$

它的图像是一条开口向上的抛物线.

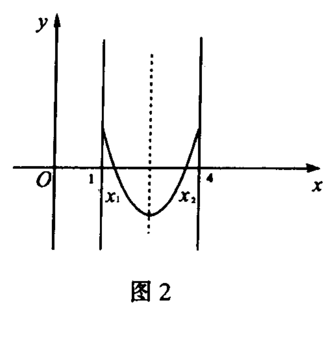

图 2

(1) 若 $B=\varnothing$,则显然 $B\subseteq A$,此时抛物线与 x 轴无交点,故 $\Delta<0$,即

$$4a^2-4(a+2)<0,$$

所以

$$-1<a<2;$$

(2) 若 $B\neq\varnothing$,设抛物线与 x 轴交点的横坐标为 x_1,x_2,且 $x_1\leqslant x_2$,欲使 $B\subseteq A$,应有

$$1\leqslant x_1<x_2\leqslant 4.$$

观察图像可知,应满足

当 $x=1$ 时,$y=1^2-2a\cdot 1+a+2\geqslant 0$;

当 $x=4$ 时，$y=4^2-2a\cdot4+a+2\geqslant0$，且 $1\leqslant-\frac{-2a}{2}\leqslant4$. 解得

$$2\leqslant a\leqslant\frac{18}{7}.$$

故由(1)、(2)得，a 的取值范围是

$$(-1,\frac{18}{7}].$$

例3 设 $S=\{1,2,\cdots,2n\}$，对每个 $A\subseteq S$ 定义一个数．

$$\beta_A=\begin{cases}\sum\limits_{a\in A}(-1)^a\cdot a^2, & A\neq\varnothing,\\ 0, & A=\varnothing.\end{cases}$$

试求：$I=\sum\limits_{A\subseteq S}\beta_A$.

解 S 中每个数 a 属于 S 的 2^{n-1} 个子集，故

$$\begin{aligned}I&=\sum_{A\subseteq S}\beta_A=\sum_{A\subseteq S}\sum_{a\in A}(-1)^a\cdot a^2=2^{n-1}\cdot\sum_{a\in S}(-1)^a\cdot a^2\\&=2^{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n}[(2k)^2-(2k-1)^2]=2^{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n}(4k-1)\\&=2^n\cdot n(n+1)-2^{n-1}\cdot n\\&=n(2n+1)\cdot2^{n-1}.\end{aligned}$$

例4 设 $M=\{1,2,\cdots,20\}$，对于 M 的任一 9 元子集 S，函数 $f(S)$ 取 1 至 20 之间的整数值．求证：不论 f 是怎样的一个函数，总存在 M 的一个 10 元子集 T，使得对所有的 $k\in T$，都有

$$f(T-\{k\})\neq k$$

($T-\{k\}$ 即 T 对 $\{k\}$ 的差集).

证明 如果一个 10 元子集 T 具有性质：对任何 $k\in T$，均有 $f(T-\{k\})\neq k$，我们就称 T 为“好集”，不是“好集”的 10 元子集称之为“坏集”，也就是说，如果 T 为“坏集”，则在 T 中必有一个 k_0 使得

$$f(T-\{k_0\})=k_0.$$

令 $S=T-\{k_0\}$，这是一个 9 元子集．

一方面，$f(S)=k_0$；

另一方面，$T=S\cup\{k_0\}$，即

$$T=S\cup\{f(S)\}.$$

上式表示了“坏集”的结构，它可由某一个 9 元子集 S 生成，即 S 与 $\{f(S)\}$ 的并集构成了“坏集”.

如果 $f(S)\in S$，那么 $S\cup\{f(S)\}$ 是一个 9 元子集，而不是 10 元子集．因此，任一 9 元子集至多能按上式生成一个“坏集”. 于是

“坏集”的个数 $\leqslant$ 9 元子集的个数 $<$ 10 元子集的个数．

最后的一个不等式成立是因为：每个 9 元子集可由包含它的 11 个 10 元子集划去相应元素得到，而每一个 10 元子集划去其中任一元素只能得到 10 个不同的 9 元子集．

由此可知，“好集”是存在的．

能力训练习题

一、填空题

1. 已知 a 为给定的实数,那么集合 $M=\{x \mid x^2-3x-a^2+2=0, x\in\mathbf{R}\}$ 的子集的个数是(　　).

2. 设集合 $A=\{0,1\}$,集合 $B=\{x \mid x\subseteq A\}$,则 A 与 B 的关系是(　　).

3. 设 $M=\{1,2,3,\cdots,1995\}$,A 是 M 的子集且满足条件:当 $x\in A$ 时,$15x\notin A$. 则 A 中元素的个数最多是(　　).

4. 已知集合 $B=\{(x,y) \mid (x-1)^2+(y-2)^2=4\}$,且集合 A、C 满足:$A\subset B\subset C$,请用列举法写出一个集合 $A=$(　　　　),用描述法写出一个集合 $C=$(　　).

二、解答题

5. 已知集合 A,B,C 满足 $A\cap B=A$,$B\cap C=B$,求证 $A\subseteq C$.

6. 设 A 是 $\{1,2,\cdots,2000\}$ 的子集,$|A|\geqslant 1000$. 证明:要么 A 中有一个数为 2 的幂,要么 A 中存在两个数 a,b,使得 $a+b$ 为 2 的幂.

7. 将集合 $\{1,2,3,\cdots,9,10\}$ 分拆成 5 个互不相交的子集,且每个子集中的元素和相等. 不考虑各子集的顺序,这样的分拆是否唯一? 集合为 $\{1,2,3,\cdots,13,14\}$ 时呢? 当 n 为何值时,集合 $\{1,2,3,\cdots,n-1,n\}$(n 为正整数)可分拆成 5 个互不相交的子集且每个子集中的元素和相等.

8．一个集合含有10个互不相同的两位数，试证：这个集合必有两个无公共元素的子集合，此两子集的各元素之和相等．

9．求集合 $M=\{1,2,3,\cdots,10\}$ 的所有子集的元素之和．

10．设 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}(n\geqslant5)$．取 $X\subseteq S_n$，$Y\subseteq S_n$（无顺序），若 $X\subseteq Y$ 或 $X\supseteq Y$ 时，则称 X,Y 为“包含子集对”，否则称为非包含子集对．问 S_n 中包含子集对多还是非包含子集对多？证明你的结论．

11．设正整数 $n\geqslant5$，n 个不同的正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有下列性质：对集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的任何两个不同的非空子集 A,B．A 中所有数的和与 B 中所有数的和都不会相等．在上述条件下，求 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ 的最大值．

第三讲 有限集元素的数目

竞赛热点、考点、知识点

元素个数有限的集合称为有限集,若 A 为有限集,用 $|A|$ 表示它的元素个数.

映射定义:设 A、B 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对于 A 中的任何一个元素 x,按此法则,在 B 中一定有一个唯一确定的元素 y 与之对应.我们就称 f 是 A 到 B 的映射,记为 $f:A\to B$ 或 $f:x\to y$.元素 y 称为元素 x 的像,记作 $y=f(x)$,称 x 是 y 的一个原像(或逆像),A 是映射 f 的定义域,记为 D_f,称 $\{y\,|\,y=f(x),x\in D_f\}$ 为 f 的值域,记为 R_f 或 $f(A)$,它是 A 中的有元素的像的全体组成的集合.

若 $f:A\to B$ 是一个映射,且对任意 $x,y\in A$,$x\neq y$,都有 $f(x)\neq f(y)$,则称 f 是 A 到 B 的一个单射,显然 $|A|\leqslant|B|$;若对任意 $y\in B$,都有一个 $x\in A$,使得 $y=f(x)$,则称 f 是 A 到 B 上的一个满射,显然 $|A|\geqslant|B|$;若 f 既是单射又是满射,则称 f 是 A 到 B 的一个一一映射,显然 $|A|=|B|$.

容斥原理:设集合 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m$,则有

$$|A|=\sum_{1\leqslant i\leqslant m}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^{m-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|.$$

当 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两不相交时,则是加法公式

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m|=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_m|.$$

特别地,当 A,B,C 都是有限集时,

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|.$$

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|.$$

典 型 例 题 精 讲

例1 对于集合 $A=\{a,b,c,d\}$,问从 A 到 A 的映射有多少个?其中有多少个是从 A 到 A 上的一一映射?

解 (1) 从 A 到 A 的任一映射可以表示成 $f:a\to x_1,b\to x_2,c\to x_3,d\to x_4$,其中 $x_1,x_2,x_3,x_4\in B\subseteq A$.因此,从 A 到 A 的映射 f 的个数等于将 a,b,c,d 在 x_1,x_2,x_3,x_4 位置上可重复排列的排列数,即 $4^4=256$;

(2) 从 A 到 A 上的一一映射的个数恰好是 a,b,c,d 在 x_1,x_2,x_3,x_4 位置上不重复排列的排列数,即 $P_4^4=24$.

例2 设 $X=\{1,2,\cdots,100\}$,对 X 的任一非空子集 M,M 中的最大数与最小数的和称为 M 的特征,记为 $m(M)$.求 X 的所有非空子集的特征的平均数.

解 设 $A\subset X$,令 $f:A\to A'$,$A'=\{101-a\,|\,a\in A\}\subset X$.于是 $f:A\to A'$ 是 X 的非空子集的全体(子集组成的集)Y 到 Y 自身的满射,记 X 的非空子集为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$(其中 $n=2^{100}-1$),则特征的平均数为