中学数理化学习指导丛书

初二几何辅导与练习

北京市海淀区教师进修学校主编

重 庆 出 版 社

一九八二年·重庆

内 容 提 要

在平面几何的学习中，初学者往往看不懂题，画不出图；画出图形，又不知如何找到解题思路；想出来又不会表达。因此造成了对几何学习不感兴趣，失去了学习的信心。产生以上问题多数是由于基本概念不清，看图、画图能力较差，解题的思考方法没有掌握好。

针对几何入门难的特点，本册在编写过程中，注意了配合现行的统编教材，对每章的基本概念和应培养的能力，进行了专题研究，对每章节的题型进行了总结，并配备了一定数量的练习、习题和自我检查题。

总之，本册在编写时，对看图、画图的能力，口头和笔头的表达能力、推理论证的能力等说、写、画、想几个方面进行了探讨，力图使读者能逐步掌握几何学习的规律，对学好几何有一定的帮助。

前　言

长期以来，我们感到：学生迫切需要一种能帮助他们学好功课的课外读物；家长希望有一种能督促和检查自己孩子学习的材料；教师欢迎出版一种能帮助自己辅导学生的书籍。为了解决这种问题，我们组织了一些有教学经验的教师，编写了这套书。

通过教学实践，我们认识到：

（1）只有把知识的结构分析清楚时，它才易于学生理解、记忆和运用；

（2）打好基础，是学生学好全部知识的前提。在基础知识之中，重点、难点之处掌握不好，又是有些学生学习不好的原因；

（3）引导学生对学过哪些主要题型心中有数，同时又掌握各类题型的解题规律，是提高学生解题能力的有效途径；

（4）在学好基础知识的前提下，提高综合运用知识的能力，以及把知识向深、广两个方面进行适当的引伸，对学习较好的学生来说，不但是可以的，而且是应该的。

（5）知识必须通过不断地复习、检查，才能逐步深化、巩固。

基于以上认识，本书在编写时，朝以下几个方面做了一

些努力：

（1） 注重知识系统和结构的分析；

（2） 注重基础知识，尤其是重点、难点部分的详细、通俗的讲解；

（3） 注重把习题归类，列出主要题型，配以典型的例题，并说明解题规律；

（4） 注重介绍教师的经验和体会，并适当启发学生对所学的知识做更深入地思考；

（5） 在每单元之后，配备知识面尽量全、具有一定综合性，足以检查本单元的学习是否可以“通过”的自我检查题。

为了与学生在学校用的教材紧密配合，本书编排顺序与教材顺序一致。

限于编者水平，不免出现错误或不妥之处，我们诚恳地希望读者给予批评提正。

北京市海淀区教师进修学校

1982年7月

目　　录

第一章　直线、相交线和平行线

平面几何是几何学的一部分，是研究在同一平面内图形性质（形状、大小和相互位置）的一门科学，它研究的主要对象是直线形和圆。

本章学习的主要内容有：

1. 线段、射线和直线的概念、性质和表示法。

2. 角的概念、表示法和它的度量、分类和作图及有关的两角——互为余角、互为补角、对顶角。

3. 两条直线的位置关系：相交线和平行线。相交线中垂线的概念、性质和作图。平行线的定义、判定和性质。

4. 命题、定义、公理和定理等概念。

本章的重点是线段和角的概念；垂线、对顶角的概念和性质；以及平行线的定义、判定和性质。

本章的基本概念内容较简单，但切不可忽视，它是整个平面几何的基础部分，应该严肃认真、一丝不苟的对待，打下良好的基础。

一、定义、公理、定理

1. 定　义

对一个名词或术语的意义的规定，就叫这个名词或术语

的定义。每学一个新的概念(名词或术语)，都要用旧概念来解释，使新概念有明确的含义。如“大于直角小于平角的角叫钝角”，是利用直角、平角的概念给钝角下定义。又如“两条直线相交成直角，叫做两条直线互相垂直”，是利用直角的概念给互相垂直下定义。

给一个概念下定义时，应该注意以下几个问题：

（1） 定义应当是恰当地反映概念的实质，不能过宽或过窄。如把钝角定义说成是：“小于平角的角叫做钝角”就犯了过宽的毛病，因为直角、锐角都小于平角。又如把锐角定义说成是：“小于 45° 的角叫锐角”，就犯了过窄的毛病，因为50°，87°的角都是锐角。

（2） 定义不应当是循环的。所谓循环定义指的是：用甲给乙下定义，又用乙给甲下定义。例如用直角给互相垂直下定义：两条直线相交成直角，叫做两条直线互相垂直”。如果再说：两条边互相垂直的角叫做直角，这就犯了循环定义的毛病。

（3） 定义一般不采取否定式，下定义的目的是揭示概念的实质，而否定形式就达不到这个目的。如“钝角不是锐角”这句话没有毛病，但不能作为钝角的定义，因为它根本没有说出什么是钝角。

由以上可知，定义必须是揭露概念的本质的，并能与其它概念区别开，又由于定义是推理论证的一种依据，所以同学们必须确切地、牢固地掌握每一个概念的定义。

2． 命　题

判断一件事情的句子叫做命题。必须强调“判断”、“句子”两个条件，也就是说命题是带有肯定语气或否定语气的一

句完整的话。如：①这朵花是红的；②对顶角不相等；③熊猫是珍贵的动物；④开车！⑤今天几号？⑥明天不一定下雨；⑦这张椅子；⑧必定相等；⑨等角的补角相等。这些例子中，只有①、②、③、⑨，是命题，⑦、⑧都不是完整的句子，④、⑤、⑥虽然都是句子，但对所述的对象既不是肯定的，也不是否定的，故也不是命题。内容与几何的事实有关的命题是几何命题，如②、⑨。

对命题要明确以下几个问题：

（1） 命题有肯定的，也有否定的；命题有正确的，也有不正确的，既有真命题也有假命题。但不一定肯定的就是真命题，否定的就是假命题，例如“相等的角是对顶角”这是一个肯定的命题，但它是假命题，又如“两条直线被第三条直线所截，如果这两条直线不平行，那么同位角不相等”，这是一个否定的命题，但它是真命题。

（2） 命题是由题设和结论两部分组成，题设就是命题中所给的条件，结论是命题中判断的结果。一般情况下，命题的条件是由“若”“如果”或“已知”等字样表示，用“则”“那么”或“求证”等字样表示出命题的结论。例如“两条直线如果都平行于第三条直线，那么这两条直线平行。”此种形式称为数学命题的标准形式。对于这种形式的命题，就很容易指出它的条件和结论。然而在有些命题中，这些字样往往被略去不写，如“对顶角相等”、“等角的补角相等”我们必须会把它们恢复为标准形式，即“如果两个角是对顶角，那么这两个角相等”，“若两角分别是两个等角的补角，则这两个角相等”。这就要求拿到一个命题反复的读，直到弄懂它的意思为止，也只有把任一个命题都会改写成标准形式，才能够说

已经分清命题的题设和结论了。

（3） 在数学中要判断一个命题是真命题，就得经过证明，证明凡符合题设的所有情况，都能得出结论。要说明一个命题是假命题，只要举出一个反例说明命题不能成立。如"相等的角是对顶角"这个命题是错误的，只要举"$\angle A=\angle B=50°$，但$\angle A$，$\angle B$不是对顶角"就可以了。

3． 公理、定理

在几何学中常见的真命题有两种，一种是人类在实践中反复验证过的，不需要再进行推理证明而被公认的真理叫做公理，一种是必须经过推理的方法证明是正确的命题叫做定理。公理和定理都是推理论证的依据。

公理有一般公理，如等量公理、不等量公理，和几何公理，如"两点之间，线段最短"，"过一点有且只有一条直线垂直于已知直线"等。

定理都是真命题，但要用推理的方法证明才能确定它的真实性，为什么一定要经过推理证明呢？采用直接测量或观察不行吗？有的问题是可以的，如身高可直接测量，但要判断一架飞机飞行的高度，一座山的高度，单凭直接测量和观察是解决不了的。另外观察的结果有时也是不可靠的，如图1-1中凭目力观察会认为线段a比线段b短，其实线段a是等于线段b的。

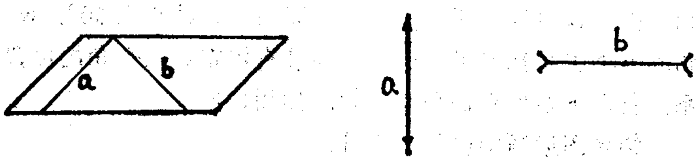

图 1-1

所以在几何研究上，只有经过证明的判断才是确实可靠的，使人信服的。再者通过证明得到的结论，能更普遍更本质地反映客观事实，因而用处更广。如要说明“对顶角相等”，只采用测量的方法，那么最多只能证实某一组或几组具体的对顶角是相等的，不可能一一都加以测量一切对顶角都相等。但如果采用推理方法证明了对顶角相等，那么就可以确信一切对顶角都相等，综上所述，定理必须要进行推理论证。

证明定理的步骤如下：

（1） 分清定理的题设和结论，根据定理的题设画出图形。

（2） 结合图形写出定理的已知条件和求证的结论。

（3） 假设结论已证出，根据已知条件、学过的定义、公理和定理进行分析，探求证明的途径。

（4） 从已知条件出发，写出证明的全部推理过程，证明中的每一步都要有根据。已知条件、学过的定义、公理、定理和学过的运算定律、运算性质等，都可以作为推理的根据。

例 同角的余角相等。

此命题的一般形式应为：“如果两个角是同一个角的余角，那么这两个角相等”。这样就很容易弄清了命题的题设和结论。根据题设先画出一个角，再分别画出这个角的两个余角。由于题中只说两个角互余，即两个角的和为90°。两个角的大小关系知道了，但题中并没有规定这两个角的位置关系，所以不要把它们画在一起。如图1-2

结合图形写出已知、求证。

已知：$\angle 2$ 是 $\angle 1$ 的余角，$\angle 3$ 是 $\angle 1$ 的余角。

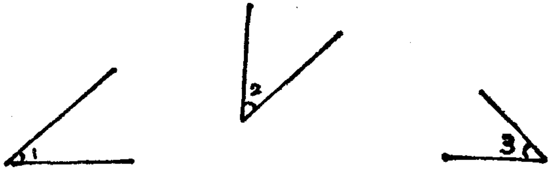

图 1-2

求证：$\angle 2=\angle 3$，

分析：（探求证明的途径）若想推出$\angle 2=\angle 3$，则必须考虑$\angle 2$，$\angle 3$分别和什么角有关系？由题设知$\angle 1+\angle 2=90°$，$\angle 1+\angle 3=90°$，故可以依据等量公理得出结论。

证明：$\because \angle 2$是$\angle 1$的余角　（已知）

$\therefore \angle 1+\angle 2=90°$　（余角定义）

$\because \angle 3$是$\angle 1$的余角　（已知）

$\therefore \angle 1+\angle 3=90°$　（余角定义）

$\therefore \angle 1+\angle 2=\angle 1+\angle 3$　（等量代换）

$\therefore \angle 2=\angle 3$　（等量减同量，差相等）

注：一般证明都要画出图形，结合图形考虑性质，进行推理。但类似此题论证过程和图形关系不大时，也可以不画图。同学们应学会把命题写成一般形式，并能根据题设进行分析。但在证题时，不必写出分析过程。

例　证明"对顶角相等"

此命题的一般形式为："若两个角是对顶角，则这两个角相等"。由题设知道"两个角的位置关系是对顶角"，而结论是要推出"这两个角是相等的"事实。先画出图（如 1-3）再结合图形写出定理的已知和求

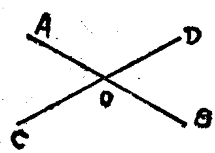

图 1-3

证：

已知：$\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 是对顶角

求证：$\angle AOC=\angle BOD$

分析：若证 $\angle AOC=\angle BOD$，必须找出和这两个角有关的角，由图形中看到 $\angle AOD$（或 $\angle BOC$）分别与这两个角互补，但要推出两角互补就必须先说明AB，CD为直线，由已知条件 $\angle AOC$，$\angle BOD$ 是对顶角，根据对顶角的定义可以得到AB，CD是直线，故此题得证。

证明：$\because \angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 是对顶角，（已知）

$\therefore$ CD、AB为直线，（对顶角定义）

$\therefore \angle AOC+\angle AOD=180^\circ$，

$\angle BOD+\angle AOD=180^\circ$，（平角定义）

$\therefore \angle AOC+\angle AOD$，

$=\angle BOD+\angle AOD$，（等量代换）

$\therefore \angle AOC=\angle BOD$．（等量减同量，差相等）

练　习

1．区别下列命题的题设和结论：

（1）中华人民共和国的首都是北京市；

（2）两条直线相交只有一个交点；

（3）同号的两个有理数相加和为正数；

（4）等角的余角相等。

2．证明：

（1）等角的余角相等；

（2）同角的补角相等；

（3）等角的补角相等。

二、平　行　线

在同一平面内，不重合的两条直线不相交就平行，平行线是学习平面几何的基础，是平面几何的重要内容之一。

1． 要把平行线这部分知识学好，首先要弄清三线八角的概念：两条直线和第三条直线相交构成了八个角。根据角与角的位置关系要分清什么是同位角？什么是内错角？什么是同旁内角？它们有什么共同点？有什么不同点？另外为什么一谈同位角(内错角、同旁内角)，总是先提出两条直线被第三条直线所截呢？就是说，是不是一组同位角(内错角、同旁内角)，必须先看它们的边是否由三条直线所组成。如图1-4甲中∠1、∠2的一边分别是在直线AB、CD上，并且另一边都在直线EF上，故∠1，∠2是同位角。图1-4乙中∠3、∠4就不是同位角，因为它们的边分别在四条直线上。所以

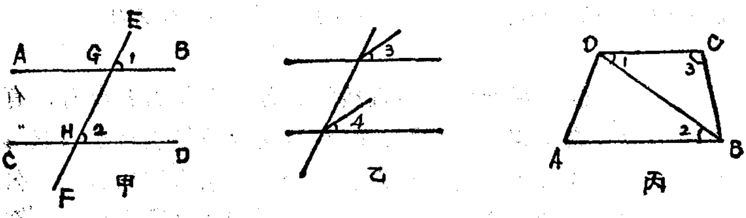

图 1-4

在考虑问题时，首先要明确是哪两条直线所截而成的角。如图1-4丙中∠1和∠2是直线DC、AB被第三条直线DB所截而成的内错角；∠1和∠3是直线DB、CB被第三条直D

线C所截而成的同旁内角。

练　习

1．指出图 1-5 中∠1，∠2；∠3、∠4；∠5、∠6；是不是同位角、内错角、同旁内角。如果是，是什么角？并指出由哪两条直线被哪一条直线所截而成的？

2．图 1-6 中指出直线AB、DC 分别被直线 BC、AC、AD 所截时出现什么角？

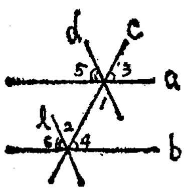

图 1-5

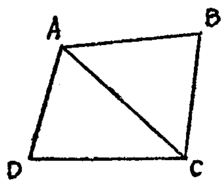

图 1-6

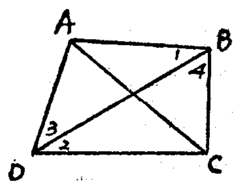

图 1-7

3．图1-7中，内错角∠1、∠2，是由哪三条直线决定的？∠3 和∠4呢？若 BC 作第三条直线，∠4和∠ACB 有什么关系？另外两直线是什么？∠ABC 和∠ACB 有什么关系？对哪三条直线说的？

2．在同一平面内两条直线的位置关系是由有没有，有几个公共点来决定的。根据公理“经过两点只能引一条直线”，如果两条直线有两个公共点则必重合；两条直线只有一个公共点则相交；两条直线没有公共点时，即本章所提出的：“在同一平面内不相交的两条直线”叫做平行线。因之在同一平面内不重合的两条直线的位置关系只有相交与平行两种情况。

在平行线的定义中，必须明确两点：（1）在同一平面内；

（2）不相交的两条直线。因为空间还存在着不相交又不平行的两条直线，为了排除这种情况，在定义中必须强调“在同一平面内”。另外强调“不相交的两条直线”，就说明了两条直线没有公共点。平行线的定义既可以用来判定两条直线平行，也可以当作性质使用。

平行线公理“经过直线外的一点，有且只有一条直线和这条直线平行”。是以后证题中很重要的一条依据，必须要熟记。在叙述时一定要强调出“直线外一点”，这样才说出了点和直线的位置，另外还要说清“有且只有一条直线”，“有”是说存在这样一条直线，“只有”是说这样的直线是唯一的，即过直线外一点平行于这条直线的直线只有一条，再没第二条。但初学时往往忽视而说成为“经过一点，有一条直线和这条直线平行”，没有强调唯一性，这是错误的。

平行线的判定方法，本章讲了六种：（1）根据平行线定义；（2）利用公理“两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行(简写为：同位角相等，则两直线平行)；（3）利用定理“内错角相等，则两条直线平行；（4）利用定理“同旁内角互补，则两条直线平行；（5）利用定理”在同一平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线平行；（6）利用定理“如果两条直线都和第三条直线垂直，那么这两条直线平行。一般情况下，很少用定义判定两直线平行，更多的是用公理和定理，到底是采用哪种方法，要结合具体问题的已知条件来决定。

平行线的性质有：（1）两条直线不相交，（2）当它们被第三条直线所截时，①同位角相等②内错角相等，③同旁内角互补；（3）如果一条直线和两条平行线中的一条垂直，则

这条直线也和另一条垂直。

在平行线的判定方法和性质中的一些定理，同学们一定要会证明。证明时应该注意它们之间的顺序，如判定定理第一个是“内错角相等，则两直线平行”，是以公理“同位角相等，则两直线平行”为依据的；第二个出现的判定定理“同旁内角互补，两直线平行”，可以用公理或第一个定理“内错角相等，两直线平行”为依据；同样，第三个出现的判定定理，可以用公理或第一、二个定理为依据，依此类推。但决不能利用后面定理来证前面定理。最好尽量用公理为依据一一加以证明，这样可避免循环论证的错误。

在应用定理时，要注意平行线的判定定理和平行线性质定理的区别，由于有些判定定理和性质定理的条件和结论正好相反，即它们互为逆命题，因而容易混淆。刚开始学习时就要特别注意，关键是要弄清定理的条件和结论。一般知道角的关系去判定两条直线是否平行是应用判定定理，而性质定理则是在已知二直线平行的前提下，推导出某两个角相等或互补的关系。所以要认清定理的实质，才能正确的应用。下面用例题加以说明。

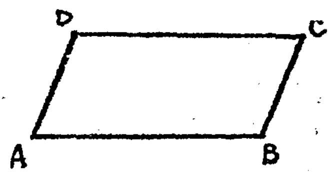

图 1-8

例：已知：$AB \parallel DC$，$\angle A=\angle C$.　(图1-8)

求证：$AD \parallel BC$.

由已知条件$AB \parallel CD$，根据平行线性质定理“两直线平行，则同旁内角互补”，可推出$\angle A+\angle D=180^\circ$的关系，又因为$\angle A=\angle C$，可用$\angle C$代换等式中的$\angle A$，则可推出$\angle C$