Kalman滤波理论及其在导航系统中的应用

付梦印　邓志红　张继伟　编著

科学出版社
www.sciencep.com

Kalman 滤波理论及其在导航系统中的应用

付梦印　邓志红　张继伟　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书紧密结合Kalman滤波理论在导航、制导与控制领域的应用，系统介绍了Kalman滤波基础理论及其最新发展，主要内容涉及Kalman滤波基本理论、实用Kalman滤波技术和Kalman滤波理论的新应用。

本书注重理论与工程实际相结合，在介绍理论基础上，还融入了作者及其他研究者的实际应用成果，理论与实践并重。

本书可作为控制科学与控制工程各类专业的研究生教材，也可作为相关专业的研究人员和大学师生学习参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

Kalman滤波理论及其在导航系统中的应用/付梦印，邓志红，张继伟编著．—北京：科学出版社，2003

ISBN 7-03-012278-X

Ⅰ.K… Ⅱ.①付… ②邓… ③张… Ⅲ.①卡尔曼滤波-滤波理论 ②卡尔曼滤波-应用-导航 Ⅳ.0211.64

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第086822号

策划编辑：吕建忠/责任编辑：韩 洁

责任印制：吕春珉/封面设计：飞天创意

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年10月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2003年10月第一次印刷 印张：14

印数：1—4 000 字数：272 000

定价：20.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

前　言

Kalman 滤波实质上是一种实时递推算法，其设计方法简单易行，所需的存储空间小，因此，在工程实际中受到了重视。随着计算机技术的飞速发展，以 Kalman 滤波技术为核心的现代估计理论已广泛应用于航天、航空、航海、系统工程、通信、工业过程控制、遥感等各个领域。

本书紧密结合 Kalman 滤波理论在导航、制导与控制领域的应用展开，分三部分共 8 章。第一部分（1～3 章）为 Kalman 滤波基本理论，第 1 章概括介绍滤波理论的应用背景、滤波理论基础及 Kalman 滤波理论的发展和应用；第 2 章介绍线性系统 Kalman 滤波基本方程；第 3 章介绍 Kalman 滤波稳定性及误差分析。第二部分（4～6 章）为实用 Kalman 滤波技术，主要介绍实际应用过程中对 Kalman 基本滤波方程的改进，其中第 4 章介绍噪声不满足假设条件下的滤波、Kalman 滤波发散的抑制、非线性系统扩展 Kalman 滤波及自适应滤波等；第 5 章针对 Kalman 滤波的计算发散．介绍各种分解滤波方法；第 6 章针对滤波系统存在的不确定性，介绍鲁棒滤波理论，包括 H^{∞} 滤波理论和鲁棒最小方差滤波。第三部分（7、8 章）为 Kalman 滤波技术的新应用，其中第 7 章介绍 Kalman 滤波在信息融合技术中的应用；第 8 章介绍 Kalman 滤波在神经网络技术中的应用。本书注重理论与工程实际相结合，在介绍理论基础上，还融入了作者及其他研究者的实际应用成果，为 Kalman 滤波理论在相应领域的应用提供研究方法上的参考和借鉴。

中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所韩京清研究员和北京理工大学孙常胜教授详细审阅了本书并提出了许多宝贵意见，在此谨致深切谢意。

作者

2003 年 8 月

目　　录

第 1 章　绪论 …… 1
1.1　Kalman 滤波理论的应用背景 …… 1
1.2　Kalman 滤波理论基础 …… 2
1.3　Kalman 滤波理论的发展及应用 …… 4
1.4　本书概貌 …… 6
第 2 章　随机线性系统 Kalman 滤波基本方程 …… 8
2.1　随机线性系统的数学模型 …… 8
2.1.1　白噪声和有色噪声 …… 8
2.1.2　随机线性连续系统的数学模型 …… 10
2.1.3　随机线性离散系统的数学模型 …… 12
2.1.4　随机线性连续系统的离散化 …… 13
2.2　随机线性离散系统的 Kalman 滤波方程 …… 16
2.2.1　预备知识 …… 16
2.2.2　随机线性离散系统的 Kalman 滤波基本方程 …… 20
2.2.3　随机线性离散系统 Kalman 滤波方程的直观推导 …… 22
2.2.4　随机线性离散系统 Kalman 滤波方程的投影法推导 …… 25
2.3　随机线性连续系统 Kalman 滤波基本方程 …… 31
2.4　随机线性离散系统的最优预测与平滑 …… 36
2.4.1　随机线性离散系统的最优预测 …… 36
2.4.2　随机线性离散系统的最优平滑 …… 39
思考题 …… 43
第 3 章　Kalman 滤波的稳定性及误差分析 …… 45
3.1　稳定性的概念 …… 45
3.2　随机线性系统的可控性与可观测性 …… 46
3.2.1　随机线性系统的可控性 …… 46
3.2.2　随机线性系统的可观测性 …… 47
3.3　Kalman 滤波稳定性的判别 …… 48
3.3.1　随机线性系统的滤波稳定性判别 …… 48
3.3.2　特定条件系统的滤波稳定性判别 …… 50
3.4　Kalman 滤波的误差分析 …… 53
3.5　几种可观测性分析方法及在惯导中的应用 …… 57

思考题 …… 63
第 4 章 实用 Kalman 滤波技术 …… 65
4.1 噪声非标准假设条件下的 Kalman 滤波 …… 65
4.1.1 确定性控制存在时的 Kalman 滤波 …… 65
4.1.2 白噪声相关条件下的 Kalman 滤波 …… 66
4.1.3 有色噪声条件下的 Kalman 滤波 …… 69
4.2 Kalman 滤波发散的抑制 …… 74
4.2.1 Kalman 滤波中的发散现象 …… 74
4.2.2 Kalman 滤波发散的抑制 …… 77
4.3 随机非线性系统的 Kalman 滤波 …… 79
4.3.1 随机非线性离散系统标称状态线性化滤波 …… 80
4.3.2 随机非线性离散系统扩展 Kalman 滤波 …… 82
4.3.3 扩展 Kalman 滤波在车辆 GPS/DR 组合定位系统中的应用 …… 85
4.4 自适应滤波 …… 93
4.4.1 相关法自适应滤波 …… 94
4.4.2 GPS/INS 组合导航系统自适应滤波 …… 97
4.5 次优滤波 …… 102
思考题 …… 103
第 5 章 线性离散系统的分解滤波 …… 105
5.1 非负定阵的三角形分解 …… 105
5.1.1 矩阵的下三角分解法 …… 105
5.1.2 矩阵的上三角分解法 …… 107
5.2 观测值为标量的协方差平方根滤波 …… 107
5.3 信息平方根滤波 …… 111
5.3.1 信息滤波 …… 111
5.3.2 条件极值的求法 …… 113
5.3.3 信息平方根滤波 …… 114
5.4 序列平方根滤波 …… 116
5.4.1 观测向量的序列处理法 …… 116
5.4.2 序列平方根滤波 …… 117
5.5 UD 分解滤波 …… 120
5.5.1 观测更新算法 …… 121
5.5.2 时间更新算法 …… 122
5.6 奇异值分解最优滤波 …… 123
5.7 分解滤波在近地卫星 GPS 自主定轨算法中的应用 …… 124
思考题 …… 131
第 6 章 鲁棒滤波理论 …… 133

6.1　系统的不确定性 …… 133
6.2　鲁棒控制技术基础 …… 134
6.2.1　一些基础知识 …… 134
6.2.2　H^{∞}控制的标准设计问题 …… 135
6.2.3　Hamilton 矩阵与 H^{∞}标准设计问题的求解 …… 137
6.3　H^{∞}滤波 …… 140
6.3.1　H^{∞}滤波问题的表达 …… 140
6.3.2　次优 H^{∞}滤波问题的解 …… 141
6.3.3　H^{∞}滤波器的参数化 …… 142
6.3.4　GPS/INS 全组合导航系统 H^{∞}滤波 …… 143
6.4　最小方差鲁棒滤波 …… 147
思考题 …… 151
第 7 章　Kalman 滤波在信息融合技术中的应用 …… 152
7.1　信息融合技术基础 …… 152
7.1.1　信息融合技术的产生与发展 …… 152
7.1.2　信息融合的原理 …… 153
7.1.3　信息融合的方法 …… 155
7.1.4　信息融合研究的关键问题与研究方向 …… 157
7.2　各子滤波器估计不相关条件下的联邦滤波算法 …… 158
7.3　各子滤波器估计相关条件下的联邦滤波算法 …… 160
7.3.1　信息分配原则与全局最优估计 …… 161
7.3.2　联邦滤波算法的时间更新 …… 163
7.3.3　联邦滤波算法的观测更新 …… 165
7.3.4　联邦滤波器的结构 …… 167
7.4　信息融合在车载 GPS/DR 组合导航系统中的应用 …… 169
思考题 …… 174
第 8 章　Kalman 滤波在神经网络技术中的应用 …… 175
8.1　神经网络技术基础 …… 175
8.1.1　神经网络技术的发展与应用 …… 175
8.1.2　神经元模型 …… 176
8.1.3　神经网络结构和学习规则 …… 177
8.2　BP 网络及其算法 …… 180
8.2.1　BP 网络 …… 180
8.2.2　BP 算法 …… 181
8.2.3　BP 算法的不足 …… 182
8.3　Kalman 滤波在神经网络训练中的应用 …… 183
8.3.1　GEKF 训练算法 …… 184

8.3.2 解耦 EKF（DEKF）训练算法 …… 187
8.4 各种 EKF 训练算法的计算考虑 …… 188
8.4.1 微分计算 …… 188
8.4.2 多输出问题的有效计算公式 …… 189
8.5 具有权值约束的 EKF 训练算法 …… 190
8.6 基于 EKF 的神经网络学习算法在惯导初始对准中的应用 …… 193
思考题 …… 198
附录 …… 199
附录 A 随机变量与随机过程 …… 199
附录 B 矩阵运算的一些公式 …… 202
附录 C 几种常见估计方法的比较 …… 210
参考文献 …… 213

第1章 绪 论

1.1 Kalman 滤波理论的应用背景

信号是传递和运载信息的时间或空间函数。信号有两类,即确定性信号和随机信号。确定性信号的变化规律是既定的,可以表示为一确定的时间函数或空间函数,具有确定的频谱特性,如阶跃信号、脉宽固定的矩形脉冲信号,正余弦函数等,它们对于指定的某一时刻,可确定一相应的函数值。随机信号没有既定的变化规律,不能给出确定的时间或空间函数,在相同的初始条件和环境条件下,信号每次实现都不一样,如陀螺漂移、惯性导航系统的导航误差、GPS 的 SA 误差,海浪等,随机信号尽管没有确定的频谱特性,但是可以知道它的统计特性,即具有确定的功率谱。

信号在传输与检测过程中不可避免地要受到外来干扰与设备内部噪声的影响,使接收端收到的信号具有随机性。为获取所需信号,排除干扰,就要对信号进行滤波。所谓滤波,是指从混合在一起的诸多信号中提取出所需信号的过程。信号的性质不同,获取的方法就不同,即滤波的手段不同。对于确定性信号,由于其具有确定的频谱特性,可根据各信号所处频带的不同,设置具有相应频率特性的滤波器,如低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器及带阻滤波器等,使有用信号无衰减地通过,而干扰信号受到抑制。这类滤波器可用物理的方法实现,即模拟滤波器,亦可用计算机通过算法实现,即数字滤波器。对确定性信号的滤波处理通常称为常规滤波。

随机信号具有确定的功率谱特性,可根据有用信号和干扰信号的功率谱设计滤波器。美国学者维纳(N. Wiener)等人提出了 Wiener 滤波,它通过做功率谱分解设计滤波器,在对信号做抑制和选通这一点同常规滤波是相似的。由于在频域进行 Wiener 滤波器设计,需要求解维纳-霍普方程,且计算量较大,需要大量的存储空间,妨碍了 Wiener 滤波的应用。

Kalman 滤波是卡尔曼(R. E. Kalman)于 1960 年提出的从与被提取信号有关的观测量中通过算法估计出所需信号的一种滤波算法[1]。他把状态空间的概念引入到随机估计理论中,把信号过程视为白噪声作用下的一个线性系统的输出,用状态方程来描述这种输入-输出关系,估计过程中利用系统状态方程、观测方程和白噪声激励(系统噪声和观测噪声)的统计特性形成滤波算法,由于所用的信息都

是时域内的量,所以不但可以对平稳的一维的随机过程进行估计,也可以对非平稳的、多维随机过程进行估计。这就完全避免了 Wiener 滤波在频域内设计时遇到的限制,适用范围比较广泛。

实际上,Kalman 滤波是一套由计算机实现的实时递推算法,它所处理的对象是随机信号,利用系统噪声和观测噪声的统计特性,以系统的观测量作为滤波器的输入,以所要估计值(系统的状态或参数)作为滤波器的输出,滤波器的输入与输出之间是由时间更新和观测更新算法联系在一起的,根据系统方程和观测方程估计出所有需要处理的信号。所以,此处所谈的 Kalman 滤波与常规滤波的涵义与方法完全不同,实质上是一种最优估计方法。下面对 Kalman 滤波理论的基础理论——估计理论加以阐述。

1.2 Kalman 滤波理论基础

在工程系统随机控制和信息处理问题中,通常所得到的观测信号中不仅包含所需信号,而且还包含有随机观测噪声和干扰信号。通过对一系列带有观测噪声和干扰信号的实际观测数据的处理,从中得到所需要的各种参量的估计值,这就是估计问题。在工程实践中,经常遇到的估计问题有两类:(1)系统的结构参数部分或全部未知、有待确定。(2)实施最优控制需要随时了解系统的状态,而由于种种限制,系统中的一部分或全部状态变量不能直接测得。这就形成了估计的两类问题——参数估计和状态估计。

一般估计问题都是由估计验前信息、估计约束条件和估计准则三部分构成。若设

(1) X 为 n 维未知状态或参数,$\hat{X}$为其估计值。

(2) Z 为与 X 有关的 m 维观测向量,它与 X 的关系可表示为

$$Z = f(X, V) \tag{1.1}$$

(3) V 为 m 维观测噪声,它的统计规律部分或全部已知;

则一般地,估计问题可叙述为:给定观测向量 Z 和观测噪声向量 V 的全部或部分统计规律,根据选定的准则和约束条件(1.1),确定一个函数 $H(Z)$,使得它成为(在选定准则下)X 的最优估计,即

$$\hat{X} = H(Z) \tag{1.2}$$

为了衡量估计的好坏,必须要有一个估计准则。在应用中,我们总是希望估计出来的参数或状态越接近实际值越好,即得到状态或参数的最优估计。很显然,估计准则可能是各式各样的,最优估计不是惟一的,它随着准则不同而不同。因此在估计时,要恰当选择衡量估计的准则。

如前所述,估计准则以某种方式度量了估计的精确性,它体现了估计是否最优的含义。准则应该用函数来表达,估计中称这个函数为指标函数或损失函数。一般来说,损失函数是根据验前信息选定的,而估计式是通过损失函数的极小化或极大化导出的。不同的损失函数,导致不同的估计方法。原则上,任何具有一定性质的函数都可用作损失函数。然而,从估计理论的应用实践看,可行的损失函数只有少数几种。目前估计中常用的三类准则是直接误差准则,误差函数矩准则和直接概率准则。

直接误差准则,是指以某种形式的误差(比如估计误差 $\tilde{X} = X - \hat{X}$ 或对 Z 的拟合误差 $\tilde{Z} = Z - \hat{Z}$,$\hat{Z}$ 是 $\hat{X}$ 的函数)为自变量的函数作为损失函数的准则。在这类准则中,损失函数是误差的凸函数,估计式是通过损失函数的极小化导出的,而与观测噪声的统计特性无关。因此,这类准则特别适用于观测噪声统计规律未知的情况。最小二乘估计及其各种推广形式都是以误差的平方和最小作为估计准则。

误差函数矩准则,是以直接误差函数矩作为损失函数的准则。特别地,我们可把损失函数 $\tilde{X}$ 选作直接误差函数,以其均值为零和方差最小为准则。在这类准则中,要求观测噪声的有关矩是已知的,显然它比直接误差准则要求更多的信息,因而可望具有更高的精度。最小方差估计、线性最小方差估计等都是属于这类准则的估计。

直接概率准则,这类准则的损失函数是以某种形式误差的概率密度函数构成,有时也用熵函数构成。估计式由损失函数的极值条件导出。由于这类准则与概率密度有关,这就要求有关的概率密度函数存在,而且要知道它的形式。另外,除少数情况外,在这类准则下,估计的导出比较困难,因此,这类准则的应用是极有限的。极大似然估计和极大验后估计就是这类准则的直接应用。

选取不同的估计准则,就有不同的估计方法,估计方法与估计准则是紧密相关的。相应于上述三类估计准则,常用的估计方法有最小二乘估计、线性最小方差估计、最小方差估计、极大似然估计及极大验后估计。几种常见估计方法的比较见附录 C。

在估计问题中,常考虑如下随机线性离散系统模型

$$X_k = \Phi_{k,k-1}X_{k-1} + \Gamma_{k,k-1}W_{k-1} \quad \forall k \geqslant 0 \tag{1.3a}$$

$$Z_k = H_kX_k + V_k \quad \forall k \geqslant 0 \tag{1.3b}$$

式中 X_k 是系统的 n 维状态向量,Z_k 是系统的 m 维观测向量,W_k 是系统的 p 维随机干扰向量,V_k 是系统的 m 维观测噪声向量,$\Phi_{k,k-1}$ 是系统的 $n\times n$ 维状态转移矩阵,$\Gamma_{k,k-1}$ 是 $n\times p$ 维干扰输入矩阵,H_k 是 $m\times n$ 维观测矩阵。在以后的讨论中,省略条件 $\forall k \geqslant 0$。

根据状态向量和观测向量在时间上存在的不同对应关系，我们可以把估计问题分为滤波、预测和平滑，以式(1.3)所描述的随机线性离散系统为例，设 $\hat{X}_{k,j}$ 表示根据 j 时刻和 j 以前时刻的观测值，对 k 时刻状态 X_k 做出的某种估计，则按照 k 和 j 的不同对应关系，分别叙述如下：

(1) 当 $k=j$ 时，对 $\hat{X}_{k,j}$ 的估计称为滤波，即依据过去直至现在的观测量来估计现在的状态。相应地，称 $\hat{X}_{k,k}$ 为 X_k 的最优滤波估计值，简记为 $\hat{X}_k$。这类估计主要用于随机系统的实时控制。

(2) 当 $k>j$ 时，对 $\hat{X}_{k,j}$ 的估计称为预测或外推，即依据过去直至现在的观测量来预测未来的状态，并把 $\hat{X}_{k,j}$ 称为 X_k 的最优预测估计值。这类估计主要用于对系统未来状态的预测和实时控制。

(3) 当 $k<j$ 时，对 $\hat{X}_{k,j}$ 的估计称为平滑或内插，即依据过去直至现在的观测量去估计过去的历史状态，并称 $\hat{X}_{k,j}$ 为 X_k 的最优平滑估计值。这类估计广泛应用于通过分析实验或试验数据，对系统进行评估。

若把 X_k 换成 X_t，$\hat{X}_{k,j}$ 换成 $\hat{X}(t,t_1)$，则上述分类对于连续时间系统同样适用。换句话说，线性系统的状态估计都可分成以上三类。

在预测、滤波和平滑三类状态估计问题中，预测是滤波的基础，滤波是平滑的基础。我们将主要讨论滤波问题。

1.3 Kalman 滤波理论的发展及应用

我们知道，估计的准则不同，会导致不同的估计方法；同样，利用观测序列和观测信号的方式不同，也会导致不同的估计方法。由于这两个方面的原因，滤波估计经历了最小二乘法，Wiener 滤波和 Kalman 滤波的发展而不断地完善。

最早的估计方法是高斯 (K.F. Gauss) 于 1795 年在他的《天体运动理论》一书中提出的最小二乘法。最小二乘法没有考虑到被估参数和观测数据的统计特性，因此这种方法不是最优估计方法。由于最小二乘法在计算上比较简单，使得它成为一种应用最广泛的估计方法。1912 年费舍尔 (R.A. Fisher) 提出了极大似然估计方法，从概率密度出发来考虑估计问题，对估计理论做出了重大贡献。

对于随机过程的估计，到 20 世纪 30 年代才积极开展起来。1940 年，控制论的创始人之一美国学者 N. Wiener 根据火力控制上的需要提出一种在频域中设计统计最优滤波器的方法，该方法被称为 Wiener 滤波。同一时期，前苏联学者科尔莫郭洛夫(A.H. КОПМОГОЛОВ)提出并初次解决了离散平稳随机序列的预测和外推问题。Wiener 滤波和科尔莫郭洛夫滤波方法开创了一个应用统计估计方

法研究随机控制问题的新领域。由于 Wiener 滤波采用频域设计法,运算复杂,解析求解困难,整批数据处理要求存储空间大,造成其适用范围极其有限,仅适用于一维平稳随机过程信号滤波。

Wiener 滤波的缺陷促使人们寻求时域内直接设计最优滤波器的新方法,其中美国学者 R. E. Kalman 的研究最具有代表性。1960 年,R. E. Kalman 提出了离散系统 Kalman 滤波;次年,他又与布西(R. S Bucy)合作,把这一滤波方法推广到连续时间系统中去[2],从而形成 Kalman 滤波估计理论。这种滤波方法采用了与 Wiener 滤波相同的估计准则,二者的基本原理是一致的。但是,Kalman 滤波是一种时域滤波方法,采用状态空间方法描述系统,算法采用递推形式,数据存储量小,不仅可以处理平稳随机过程,也可以处理多维和非平稳随机过程。

正是由于 Kalman 滤波具有以上一些其他滤波方法所不具备的优点,Kalman 滤波理论一提出,立即应用到实际工程。阿波罗登月计划和 C-5A 飞机导航系统的设计是早期应用中最成功的实例。随着电子计算机的迅速发展和广泛应用,Kalman 滤波在工程实践中,特别在航空空间技术中迅速得到应用。目前,Kalman 滤波理论作为一种最重要的最优估计理论被广泛应用于各种领域,如惯性导航、制导系统[3~5]、全球定位系统[6,7]、目标跟踪[8~10]、通信与信号过程[11~13]、金融[14]、电机[15]。进一步,Kalman 滤波理论被用于随机最优控制问题、故障诊断等应用领域,其中组合导航系统的设计是其成功应用的一个最主要的方面。

R. E. Kalman 最初提出的滤波基本理论只适用于线性系统,并且要求观测方程也必须是线性的。在此后的十多年间,Bucy 和 Sunahara 等人致力于研究 Kalman 滤波理论在非线性系统和非线性观测下的扩展[16~18],拓宽了 Kalman 滤波的适用范围。扩展 Kalman 滤波(EKF)是一种应用最广泛的非线性系统滤波方法。为解决在某些没有有关初始状态信息和先验知识可供采用情况下的滤波,Fraser 提出了信息滤波[19],这种算法对测量更新比较有效,但时间更新所需的计算量比较大。

Kalman 滤波应用范围广泛,设计方法也简单易行,但它必须在计算机上执行。随着微型计算机的普及应用,人们对 Kalman 滤波的数值稳定性、计算效率、实用性和有效性的要求越来越高。由于计算机的字长有限,使计算中舍入误差和截断误差累积、传递,造成误差方差阵 P_k 失去对称正定性,造成数值不稳定[20~22]。在 Kalman 滤波理论的发展过程中,为改善 Kalman 滤波算法的数值稳定性,并提高计算效率,人们提出平方根滤波、UD 分解滤波、奇异值分解滤波等一系列数值鲁棒的滤波算法。首先提出平方根滤波思想的是 Potter[23],该平方根滤波算法经美国阿波罗登月舱的实际应用,证明是很成功的。Bierman ,Carlson 和 Schmidt 等人对平方根滤波算法的发展贡献极大[24~26]。平方根滤波在轨道确定[27]、飞行状态估计[28]和多传感器跟踪与辨识[29]等方面得到了应用。UD 分解滤波是 Bierman 于

1975～1977 年间提出的一套计算效率高，数值稳定的滤波算法[30～32]。奇异值分解由于具有较强的数值稳定性和可靠性，在滤波问题中得到应用，其中 Oshman 对奇异值分解最优滤波的贡献较大[33～35]。

传统的 Kalman 滤波是建立在模型精确和随机干扰信号统计特性已知基础上的，对于一个实际系统，往往存在着模型不确定性或(和)干扰信号统计特性不完全已知，这些不确定因素使得传统的 Kalman 滤波算法失去最优性，估计精度大大降低，严重时会引起滤波发散。近些年，人们将鲁棒控制的思想引入到滤波中来，形成了鲁棒滤波理论[36～37]，其中较有代表性的是 H^{∞} 鲁棒滤波算法[38～40]。

信息融合(Data Fusion)是在面向各种复杂应用背景下，多传感器信息系统大量涌现的时代背景下产生的。Kalman 滤波在控制领域得到广泛应用以后，也逐渐成为多传感器信息融合系统的主要技术手段之一。随着并行计算技术的成熟，在分散化滤波思想的基础上，1988 年 Carlson 提出了联邦滤波理论[41](Federated Filtering)，旨在为容错组合导航系统的设计提供理论。联邦 Kalman 滤波器设计的基本思想是先分散处理、再全局融合，从而获得建立在所有观测基础上的全局估计。Kalman 滤波方法是信息融合中进行位置估计的有效方法。目前美国空军已将联邦滤波器确定为新一代导航系统的通用滤波器。

神经网络吸取了生物神经网络的许多优点，它具有高度的并行性、非线性的全局作用，以及良好的容错性与联想记忆功能，并且具有很强的自适应、自学习能力。随着神经网络技术的不断发展，其应用领域在不断拓展，如模式识别与图像处理、控制及优化、金融预测与管理和通信等领域。但是网络权值的调节是一个关键问题，标准的 BP 算法存在一些缺陷和不足。因此，基于扩展 Kalman 滤波(EKF)算法形成的利用二阶微分信息的神经网络训练方法[42～43]，是一种实际和有效的处理方法。这就使得前馈和反馈神经网络在控制、信号过程和模式识别等问题中得以应用。

以上介绍了 Kalman 滤波的发展过程及其应用领域，相信随着科技的不断发展进步，其理论将不断完善，应用领域将更加广泛。

1.4　本书概貌

本书紧密结合 Kalman 滤波理论在导航、制导与控制领域的应用展开，主要内容分三部分：Kalman 滤波基本理论、实用 Kalman 滤波技术和 Kalman 滤波技术的新应用，分 8 章来具体讨论。

第一部分包括 3 章：第 1 章为绪论，概括介绍滤波理论的应用背景、滤波理论基础及 Kalman 滤波理论的发展及其应用。第 2 章为线性系统 Kalman 滤波基本方程的介绍，内容包括随机噪声的性质与统计假设、随机线性系统的数学模型、

Kalman 滤波基本方程及推导、随机线性离散系统的最优预测与平滑等。第 3 章为 Kalman 滤波稳定性及误差分析，主要介绍稳定性的概念、随机线性系统的可控性与可观测性、滤波稳定性的判别及滤波误差分析等内容。

第二部分为实用 Kalman 滤波技术，主要介绍实际应用过程中对 Kalman 基本滤波方程的改进。其中第 4 章介绍噪声不满足假设条件下的滤波、Kalman 滤波发散的抑制、非线性系统扩展 Kalman 滤波及自适应滤波等。第 5 章针对 Kalman 滤波的计算发散，介绍各种分解滤波方法。第 6 章针对滤波系统存在的不确定性，介绍鲁棒滤波理论，包括 H^{∞} 滤波理论和鲁棒最小方差滤波。

第三部分为 Kalman 滤波技术的新应用，其中第 7 章介绍 Kalman 滤波在信息融合技术中的应用，第 8 章介绍 Kalman 滤波技术在神经网络训练中的应用。

本书穿插有适量的例题和思考题，例题和思考题紧紧围绕 Kalman 滤波在导航领域中各方面的应用来设置，力求既能使读者全面、系统地了解、掌握 Kalman 滤波基本理论，又能为 Kalman 滤波理论在导航领域的应用提供设计理论和方法上的参考，也为 Kalman 滤波理论在其他相关领域的应用提供设计方法上的借鉴和参考。

第 2 章　随机线性系统 Kalman 滤波基本方程

Kalman 滤波是由 R.E.Kalman 于 1960 年首次提出的，它是一种线性最小方差估计，算法具有递推性，使用状态空间方法在时域内设计滤波器，适于对多维随机过程（平稳的、非平稳的）进行估计，具有连续和离散两类算法，便于在计算机上实现。随着计算机技术的飞速发展，Kalman 滤波理论作为一种最重要的估计理论被广泛应用于各个领域，组合导航系统的设计是其应用较成功的一个方面。本章首先给出随机线性系统的数学模型，然后详细推导随机线性离散系统的 Kalman 滤波基本方程，并给出随机线性连续系统的 Kalman 滤波基本方程及随机线性离散系统的最优预测和平滑方程。

2.1　随机线性系统的数学模型

在给出随机线性系统的数学模型之前，先简要介绍白噪声和有色噪声的概念。

2.1.1　白噪声和有色噪声

若随机过程 $w(t)$ 满足

$$\begin{cases} E[w(t)] = 0 \\ E[w(t)w^{\mathrm{T}}(\tau)] = q\delta(t-\tau) \end{cases} \tag{2.1}$$

则称 $w(t)$ 为白噪声过程，式中 q 称为 $w(t)$ 的方差强度。

式(2.1)的第二式即为 $w(t)$ 的自相关函数，即

$$R_w(t-\tau) = q\delta(t-\tau) \tag{2.2}$$

从式(2.2)可以看出，$w(t)$ 的自相关函数与时间间隔 $\mu(\mu = t-\tau)$ 有关，而与时间点 t 无关，所以 $w(t)$ 是平稳过程。

式(2.2)还说明，无论时间 t 和 τ 靠得多么近，只要 $t \neq \tau$，$w(t)$ 与 $w(\tau)$ 总不相关，两者没有任何依赖关系，这一特性在时间过程中的体现是信号做直上直下的跳变。

式(2.2)可进一步写成

$$R_w(\mu) = q\delta(\mu)$$

因此 $w(t)$ 的功率谱为

$$S_w(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} q\delta(\mu) e^{-j\omega\mu} \mathrm{d}\mu = q \tag{2.3}$$

式(2.3)说明,白噪声 $w(t)$的功率谱在整个频率区间内都为常值 q,这与白色光的频谱分布在整个频率范围内的现象是类似的,所以 $w(t)$被称为白噪声过程,且功率谱与方差强度相等。

若随机序列$\{W_k\}$满足

$$\begin{cases} EW_k = 0 \\ E[W_k W_j^{\mathrm{T}}] = Q_k \delta_{kj} \end{cases} \tag{2.4}$$

则 W_k 称为白噪声序列,在时间上,白噪声序列是出现在离散时间点上的杂乱无章的上下跳动。

凡是不满足式(2.1)的噪声过程都称为有色噪声过程。有色噪声的功率谱随频率而变,这与有色光的光谱分布在某一频段内的现象是类似的,“有色”一词也因此而得名。

有色噪声可看作某一线性系统在白噪声驱动下的响应。对有色噪声建模就是确定出这一线性系统。常用的建模方法一般有两种:相关函数法和时间序列分析法。

相关函数法也称为成型滤波器法。设有一单位白噪声过程(功率谱密度为 1)$w(t)$,输入到传递函数为 $\Phi(s)$的线性系统中。根据线性系统理论,对应的输出信号 $Y(t)$功率谱密度为

$$S_Y(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 \cdot 1 = \Phi(j\omega)\Phi(-j\omega) \tag{2.5}$$

因此,如果有色噪声 $Y(t)$的功率谱密度可写成 $\Phi(j\omega)\Phi(-j\omega)$的形式,则 $Y(t)$可看作传递函数为 $\Phi(s)$的线性系统对单位强度白噪声 $w(t)$的响应,即 $Y(t)$可以用 $w(t)$来表示,这就实现了对有色噪声 $Y(t)$的白化。$\Phi(s)$是实现白化的关键,被称为成型滤波器。

对随机过程做建模处理时,一般都假设其满足各态历经性,即用在一个样本时间过程中采集到的数据计算相关函数,再由相关函数求出功率谱,然后由功率谱求出成型滤波器,所以这种方法称为相关函数法。

时间序列分析法把平稳的有色噪声序列看作是各时刻相关的序列和各时刻出现的白噪声所组成,即 k 时刻的有色噪声 Y_k 为

$$\begin{aligned} Y_k = {} & \phi_1 Y_{k-1} + \phi_2 Y_{k-2} + \cdots + \phi_p Y_{k-p} \\ & + W_k - \theta_1 W_{k-1} - \theta_2 W_{k-2} - \cdots - \theta_q W_{k-q} \end{aligned} \tag{2.6}$$

式中,$\phi_i < 1 (i = 1,2,\cdots,p)$为自回归参数;$\theta_i < 1 (i = 1,2,\cdots,q)$为滑动平均参数;$\{W_k\}$为白噪声序列。上述表示有色噪声的递推方程称为$(p,q)$阶的自回归滑动平均模型 $ARMA(p,q)$。相应于模型中 $\phi_i = 0 (i = 1,2,\cdots,p)$和 $\theta_i = 0 (i = 1,2,\cdots,q)$,模型式(2.6)可分别简化为自回归模型 $AR(p)$和滑动和模型 $MA(q)$。